装液回转壳体的固有频率和振型的计算

周科健

提　要　用有限单元法计算液体和壳体的相互耦合振动问题。当自由液面压力 $p=0$ 时，相当于在壳体运动方程中附加一质量矩阵 $[M_a]$，反映壳体和液体的耦合影响。考虑这一影响后，壳体的固有频率有很大降低，而低阶振型几乎不变。

一、壳体和液体的耦合方程

壳体的无阻尼运动方程为

$$[K]\{u\}+[M]\{\ddot{u}\}=\{R\} \tag{1}$$

式中 $[K]$ 为总刚度矩阵，$[M]$ 为总质量矩阵，$\{u\}$ 为节圆位移列阵，$\{\ddot{u}\}$ 为节圆加速度列阵，$\{R\}$ 为节圆力列阵。

根据 Zienkiewicz 的见解[1]，当自由液面波动较小时，可取自由液面压力 $p=0$，因此研究液体对壳体固有特性的影响，$\{R\}$ 只考虑液体与壳体交界面 A 上的液体压力 p 引起的节圆力，即

$$\{R\}=\iint_A [N_S]^T p\,dA \tag{2}$$

式中 N_S 为轴对称壳体单元的形状函数。

对不可压缩液体的无旋运动，有 Laplace 方程

$$\nabla^2 p=0 \tag{3}$$

而液体压力

$$p=[N_l]\{P\} \tag{4}$$

式中 N_l 为轴对称液体单元的形状函数，$\{P\}$ 为轴对称平面 ρz（图1）中的节点液体压力列阵。应用 Green 第三公式[2]

$$\iiint_V [p\nabla^2 p+(\mathrm{grad}\,p)^2]\,dV=\iint_A p\frac{\partial p}{\partial n}dA \tag{5}$$

及

本文1981年11月收到

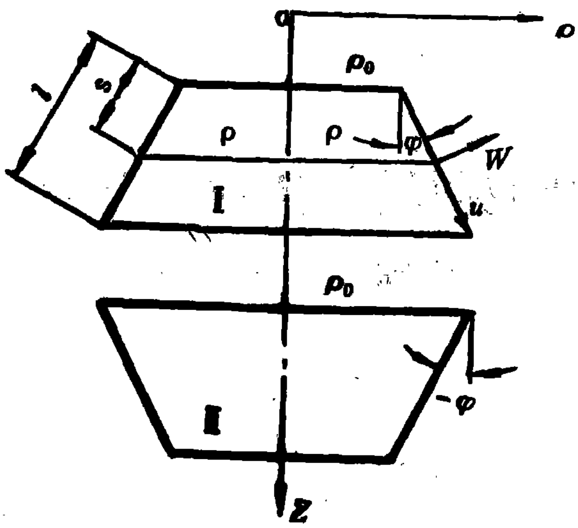

图 1

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\gamma_l}{g}\ddot{w} \tag{6}$$

式中V为A所包围的液体体积，γ_l为液体的重度，g为重力加速度，$\ddot{w}$为交界面的法向(n)加速度，可以写为

$$\ddot{w} = [N_l]\{\ddot{u}\} \tag{7}$$

考虑到液体的轴对称性，与壳体的位移函数[5]一样，p只取对称分布，环向以$\cos j\theta$表示，j为环向全波数。将式(4)代入式(2)，再代入式(1)，将式(7)代入式(6)，与式(4)、式(3)一起代入式(5)，并进行局部坐标系与总体坐标系的变换，便可得到壳体和液体的耦合方程[3,4]

$$[K]\{u\} + [M]\{\ddot{u}\} = [L]\{P\} \tag{8}$$

$$[H]\{P\} = -\frac{\gamma_l}{g}[L]^T\{\ddot{u}\} \tag{9}$$

式(8)中$[K]$、$[M]$引用文献[5]的结果。式(9)中

$$[H] = \sum_1^{n_l}\iiint_V\left(\frac{\partial[N_l]^T}{\partial\rho}\frac{\partial[N_l]}{\partial\rho} + j^2\frac{[N_l]^T[N_l]}{\rho^2} + \frac{\partial[N_l]^T\partial[N_l]}{\partial z\partial z}\right)\rho d\rho dz d\theta \tag{10}$$

上式中n_l为液体的单元数，$[H]$是$n\times n$阶，n为平面ρz中节点总数。式(8)和式(9)中

$$[L] = \sum_1^{n_s}\int_l [N_s]^T[T][N_l]\rho ds \tag{11}$$

式中n_s为壳体的单元数，$\rho=\rho_0+s\cdot\sin\varphi$，坐标变换矩阵

$$[T] = [-\sin\varphi \quad 0 \quad \cos\varphi]$$

对于情况Ⅱ（图1），则用$-\varphi$代入即可。计算$[H]$及$[L]$时，先求出单元的，然后分别综合成总体的$[H]$及$[L]$。由式(10)和式(11)可知，反映液体特性的$[H]$与环向波数j有关，反映壳体和液体耦合特性的$[L]$与环向波数j无关。由于$[L]$中单元的积分是沿壳体母线进行的，单元的$[N_l]$是1×2阶，所以$[L]$是$4(n_s+1)\times(n_s+1)$阶。

将式(9)进行简化，可分块写成

$$\begin{bmatrix} H_{ss} & H_{sl} \\ H_{ls} & H_{ll} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_s \\ P_l \end{Bmatrix} = -\frac{\gamma_l}{g}\begin{bmatrix} L_s \\ 0 \end{bmatrix}^T \{\ddot{u}\} \tag{12}$$

或

$$[H_{ss}]\{P_s\}+[H_{sl}]\{P_l\}=-\frac{\gamma_l}{g}[L_s]^T\{\ddot{u}\}$$

$$\{P_l\}=-[H_{ll}]^{-1}[H_{ls}]\{P_s\}$$

将后式代入前式，得

$$\Big([H_{ss}]-[H_{sl}][H_{ll}]^{-1}[H_{ls}]\Big)\{P_s\}=-\frac{\gamma_l}{g}[L_s]^T\{\ddot{u}\}$$

用Gauss后退消去法容易求得上式左部方阵$[H^*_{ss}]$，上式也可写为

$$\{P_s\}=-\frac{\gamma_l}{g}[H^*_{ss}]^{-1}[L_s]^T\{\ddot{u}\} \tag{13}$$

当$j=0$时，$[H^*_{ss}]$为奇异矩阵，必须消去给定的边界值才能求逆，本文取自由液面压力为零，即$\{P_s\}$中$P_1=0$。

将式(13)代入式(8)，得到考虑液体影响的壳体运动方程

$$[K]\{u\}+([M]+[M_a])\{\ddot{u}\}=0 \tag{14}$$

$$[M_a]=\frac{\gamma_l}{g}[L_s][H^*_{ss}]^{-1}[L_s]^T \tag{15}$$

由此可见，液体对壳体的耦合影响，相当于在壳体运动方程中附加一质量矩阵$[M_a]$。

二、算 例

液体的矩形单元（图2）的形状函数为

$$[N_l]=\frac{1}{s_0}\Big[(\bar{\rho}-\bar{r}_0)(1-\bar{z}) \quad (\bar{\rho}-\bar{r}_0)\bar{z} \quad (1-\bar{\rho})(1-\bar{z}) \quad (1-\bar{\rho})\bar{z}\Big]$$

三角形单元（图3)的形状函数为

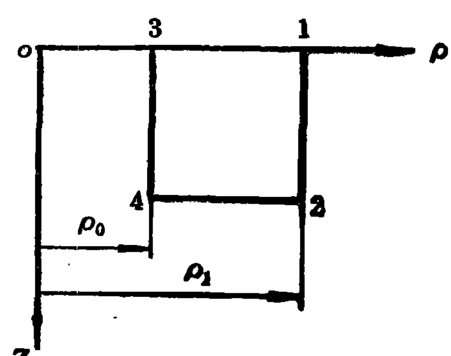

图 2

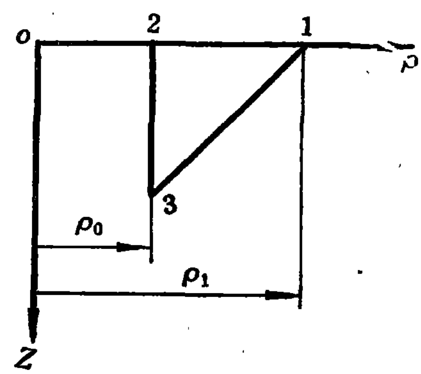

图 3

$$[N_l]=\Big[\frac{1}{s_0}(\bar{\rho}-\bar{r}_0) \quad \frac{1}{s_0}(1-\bar{\rho})-\bar{z} \quad \bar{z}\Big]$$

在$[L]$中，此两种单元的形状函数是一样的，均为

$$[N_l]=[1-\bar{s}\quad \bar{s}]$$

以上各式中 $\bar{s}=\dfrac{s}{l}$，$\bar{r}_0=\dfrac{\rho_0}{\rho_1}$, $s_0=1-\bar{r}_0$，$\bar{\rho}=\dfrac{\rho}{\rho_1}$，$\bar{z}=\dfrac{z}{z_0}$，其中$z_0$为单元在$z$方向的高度。

截锥壳单元的形状函数[3]为

$$[N_s]^T=\begin{pmatrix} 1-\bar{s} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\bar{s} & 0 \\ 0 & 0 & 1-3\bar{s}^2+2\bar{s}^3 \\ 0 & 0 & l(\bar{s}-2\bar{s}^2+\bar{s}^3) \\ \bar{s} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{s} & 0 \\ 0 & 0 & 3\bar{s}^2-2\bar{s}^3 \\ 0 & 0 & l(-\bar{s}^2+\bar{s}^3) \end{pmatrix}$$

1. 圆柱壳

图4所示圆柱壳，杨氏模量$E=2.11\times10^6\text{kg/cm}^2$，泊松系数$\mu=0.3$，壳体的重度$\gamma_s=0.007868\text{kg/cm}^3$，液体为水，壳体尺寸单位为cm，频率单位为Hz。壳的上端自由，下端固定。计算时取$n_s=10$，$n_l=40$，$n=55$，固有频率的计算结果见表1。

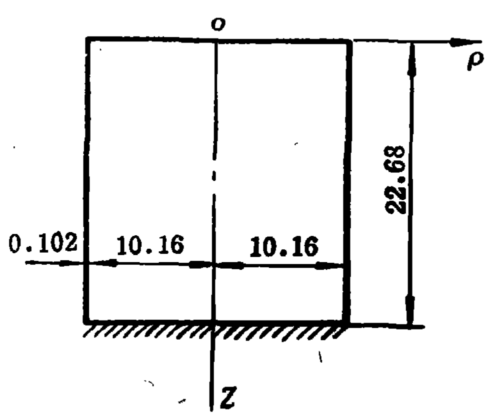

图 4

圆柱壳的固有频率　　　　表1

i \ j	3		4	
	空　壳	装液壳	空　壳	装液壳
1	565.8	288.7	485.3	243.5
2	2259	1204	1613	847.5
3	4406	2426	3376	1850

表中i是按频率大小排列的序号

固有振型的计算结果见表 2。

圆柱壳的固有振型 ($j=4$) **表 2**

节圆号 \ w \ i	1		2	
	空 壳	装液壳	空 壳	装液壳
1	1.0	1.0	1.0	1.0
2	0.8621	0.8621	0.5825	0.5830
3	0.7362	0.7363	0.1576	0.1620
4	0.6103	0.6103	-0.2390	-0.2329
5	0.4872	0.4873	-0.5543	-0.5477
6	0.3699	0.3702	-0.7456	-0.7404
7	0.2623	0.2626	-0.7919	-0.7889
8	0.1684	0.1687	-0.6992	-0.7008
9	0.0924	0.0927	-0.5010	-0.5069
10	0.0404	0.0406	-0.2618	-0.2693
11	0.0	0.0	0.0	0.0

2. 圆柱——椭球壳

图 5 所示圆柱——椭球壳，$E=7\times10^5\text{kg/cm}^2$，$\mu=0.33$，$\gamma_s=0.0028\text{kg/cm}^3$，$n_s=10$，$n_l=50$，$n=62$。固有频率的计算结果见表 3。

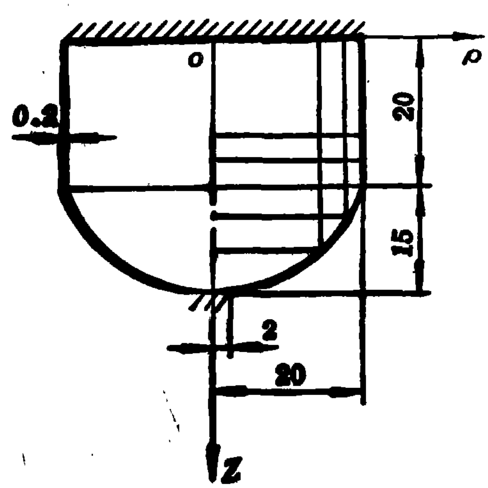

图 5

圆柱——椭球壳的固有频率　　表 3

i \ j	7		8	
	空　壳	装液壳	空　壳	装液壳
1	1029	429.9	1079	472.9
2	2106	937.2	2023	939.3
3	3174	1530	3091	1538

固有振型的计算结果见表 4 。

圆柱——椭球壳的固有振型($j=7$)　　表 4

节圆号 \ w \ i	1		2	
	壳　体	装液壳	壳　体	装液壳
1	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.4531	0.4511	-0.9427	-0.9742
3	0.8602	0.8524	-0.8448	-0.8511
4	1.0	1.0	0.3072	0.2724
5	0.7554	0.7525	1.0	1.0
6	0.2253	0.2253	0.3166	0.3815
7	0.0321	0.0333	0.0338	0.0433
8	0.0032	0.0035	0.0051	0.0087
9	0.0001	0.0002	0.0003	0.0006
10	0.0	0.0	0.0	0.0
11	0.0	0.0	0.0	0.0

算例表明，考虑液体的影响后，壳体的固有频率有很大降低，而液体对振型在低频时基本上沒有影响，在较高频率时影响亦不大。

本文为科硏课题的一部份，张連举同志曾参加过此项工作。程序的编制曾得到于晏悦同志热情帮助和指导。徐后华同志审阅了本文稿。

参 考 文 献

[1] Zienkiewicz, O.C., Earthquake Behavior of Reservoir-Dam Systems, ASCE, vol. 95, EM3, June 1969.
[2] 《数学手册》编写组，数学手册，人民教育出版社，1979.
[3] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method, third edition, 1977.
[4] Marcal, P.V., A Solid Mechanics Approach to the Solution of Fluid-Solid Vibration Problems by Finite Element, 在北航讲稿，1979.
[5] 周科健，圆锥壳的固有频率和振型的计算，国防科学技术大学学术资料 81·1013.

A Computation for the Natural Frequencies and Mode Shapes of Revolutionary Shells Having Liquid

Zhou Ke-jian

Abstract

A finite element method is used for computing liquid-shell interaction vibration problem. When the pressure on the free surface have $p=0$, this is equivalent to add an additional mass matrix $[M\alpha]$ in the governing equation for the shell, which represents the effect of the coupling of liquid and shell. After having been taken account of this effect, the natural frequencies of shell descend very largerly, while the fundamental mode shapes vary less.