水晶片的几个光学性能(一)

高伯龙

提 要 本文计算了四频差动陀螺中所使用的水晶片的几个光学性能，其中有旋光性消除激光偏振的椭圆度，激光没有严格过光轴所引起的差分损耗。详细地分析了后者带来的恶果，提出有效措施，曾使激光陀螺的性能大为改善。

前 言

本文是77年初和78年夏季分别写的三篇文章合并而成的，是有关四频差动陀螺所使用的水晶片的几个光学性能。这些性能在以前是不会受人注意的，只有在使用圆偏振光的激光环路里才显出它们的重要性。第一个性能是水晶片的旋光性有消除偏振的椭圆度的作用，在75年11月时就已经在全国会议上从物理直观上定性分析过，77年初补了一个定量的数学证明（见§1）。78年5～6月在差动陀螺的第一个原理样机上进行测试，出现过很大的零漂，并且左旋与右旋光曾有很大光强差，很不对称。7～8月份作了一連串单项实验，同时进行了理论分析，最后弄清楚了原因。产生大零漂和大的光强不对称的原因之中，水晶片使用不当占主要分量。本文§2所详细计算的光沒有严格过光轴所引起左、右旋光的差分损耗就是一个重要效应，其恶果载于§3。在78年7～8月理论结合实验分析清楚后，采取了有效措施，大大改进了陀螺的性能（见§3），本文后两节即为当时的作品，包括79年初补充了一些新的实验数据在内[1]。

78年7～8月还发现幷彻底弄清了水晶片另一些重要性能，采取了有效措施幷已彻底消除它对零漂的影响，还写了理论文章。为了不使本文过于庞大以及其它原因，决定另辟专文作为本文的续篇以发表[2]。

§1. 旋光性对消除椭圆度的作用

沿水晶光轴进行的光束，由于水晶片的旋光效应，抑制了线偏振光模式，这是极其强烈的效应。但是，由于反射片对 S、p 偏振的反射率不等，增透片对 S、p 偏振的透射率不等，又不能出现完全的圆偏振光。估计椭圆偏振度微弱，尤其是当水晶片的厚

本文1981年12月收到

度 4.8132mm，即旋光角为$\frac{\pi}{2}$时，更是这样。计算结果证明上述直观的正确，并给出定量关系。当然，我们讨论的是光沿水晶片光轴传播的情形，光不严格沿水晶光轴传播的情形将在下节中讨论。

令线偏振沿S方向为标号1，p方向为标号2。电位移矢量$\overrightarrow{D}$为

$$\overrightarrow{D}=\begin{pmatrix}D_1\\D_2\end{pmatrix}。\tag{1}$$

为肯定起见，只算外腔式四频差动陀螺。从增益管发出的$\overrightarrow{D}$为(1)式，经过一个增透窗片以及反射片，从水晶片的一个面输入水晶内，总的振幅变化应乘振幅反射系数和透射系数，综合量令为r_{s_1}、r_{p_1}；然后过水晶片，经受旋光角ϑ；接着从水晶片的另一面输出，经过若干反射面和增透面，最后输入增益管，总的振幅变化的综合量令为r_{s_2}、r_{p_2}；过增益管受到纯增益，乘系数g_s、g_p（皆稍大于1）。因此，绕环路一圈后，$\overrightarrow{D}$矢量的变化为

$$\overrightarrow{D}\longrightarrow \underline{\underline{A}}\overrightarrow{D},\tag{2-1}$$

$$\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}g_s, & 0\\0, & g_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_{s_2}, & 0\\0, & r_{p_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\vartheta, & -\sin\vartheta\\\sin\vartheta, & \cos\vartheta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_{s_1}, & 0\\0, & r_{p_1}\end{pmatrix},\tag{2-2}$$

其中$\underline{\underline{A}}$为复矩阵，含时间的因子$e^{i\omega t}$被略去。自再生条件为

$$\underline{\underline{A}}\overrightarrow{D}=a\overrightarrow{D},\tag{3}$$

其中a必须为1，它靠g_s、g_p来保证。后两系数是饱和的振幅增益，激光器内部自动调节$\overrightarrow{D}$的大小以改变g_s、g_p，最后保证$|a|=1$。a的复相角是无关紧要的，是因为：我们没有把环路的光程$\langle L\rangle$放进去，如乘$e^{-ik\langle L\rangle}$则保证$ae^{-ik\langle L\rangle}$的复相角为2π的整数倍（其中$k=\frac{2\pi}{\lambda}$）。

(3)式的本征值为：

$$\left.\begin{aligned}&a=\frac{(g_sr_s^2+g_pr_p^2)\cos\vartheta\pm\sqrt{(g_sr_s^2+g_pr_p^2)^2\cos^2\vartheta-4g_sg_pr_s^2r_p^2}}{2}\\&r_s^2\equiv r_{s_1}r_{s_2},\ r_p^2\equiv r_{p_1}r_{p_2}。\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

特例1. $\vartheta=0$：

$$a=g_sr_s^2\equiv a_s,\ 或\ a=g_pr_p^2\equiv a_p,\tag{5}$$

相应本征矢量为

$$\overrightarrow{D}=\begin{pmatrix}D_1\\0\end{pmatrix}\equiv\overrightarrow{D}_s,\quad 或\overrightarrow{D}=\begin{pmatrix}0\\D_2\end{pmatrix}\equiv\overrightarrow{D}_p,\tag{6}$$

此即完全的线偏振光。$|a|=1$的保证为

$$g_s=\frac{1}{r_s^2},\quad g_p=\frac{1}{r_p^2},\quad a_s=a_p=1,\tag{7}$$

特例2. $\vartheta=90°$：

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}0, & -g_s r_{s_2} r_{p_1}\\ g_p r_{s_1} r_{p_2}, & 0\end{bmatrix},\\ a=a_+\equiv i g r_s r_p,\ \text{或}\ a=a_-\equiv -i g r_s r_p,\end{array}\right\} \tag{8}$$

相应本征矢量为*

$$\vec{D}_+=C_+\begin{bmatrix}\sqrt{g_s r_{s_2} r_{p_1}}\\ -i\sqrt{g_p r_{p_2} r_{s_1}}\end{bmatrix},\ \vec{D}_-=C_-\begin{bmatrix}\sqrt{g_s r_{s_2} r_{p_1}}\\ i\sqrt{g_p r_{p_2} r_{s_1}}\end{bmatrix}, \tag{9}$$

其中C_+、C_-是两常数。又式中

$$g\equiv\sqrt{g_s g_p}. \tag{10}$$

$|a|=1$的保证为

$$g=\frac{1}{r_p r_s},\ a_+=i,\ a_-=-i. \tag{11}$$

(9)式的解为主轴线与S、p偏振同向的椭圆偏振光，一为右旋，另一为左旋。现在按强度定义一椭圆偏振度$\in$：

$$\in\equiv\frac{|D_1|^2-|D_2|^2}{|D_1|^2+|D_2|^2} \tag{12}$$

当以(9)式的解代入，得

$$\in=\frac{|g_s r_{s_2} r_{p_1}|-|g_p r_{p_2} r_{s_1}|}{|g_s r_{s_2} r_{p_1}|+|g_p r_{p_2} r_{s_1}|}=\frac{\left|\frac{g_s r_{s_2}}{g_p r_{p_2}}\right|-\left|\frac{r_{s_1}}{r_{p_1}}\right|}{\left|\frac{g_s r_{s_2}}{g_p r_{p_2}}\right|+\left|\frac{r_{s_1}}{r_{p_1}}\right|}, \tag{13}$$

(13)式适用于右旋及左旋光。由于S、p各量相差很小，即：

$$|g_s|\cong g_p,\ |r_{s_2}|\cong|r_{p_2}|,\ |r_{s_1}|\cong|r_{p_1}|, \tag{14}$$

故(13)式可简化为

$$\in\cong\frac{1}{4}\left[\frac{(1+G_s)R_{s_2}}{(1+G_p)R_{p_2}}-\frac{R_{s_1}}{R_{p_1}}\right], \tag{13'}$$

其中

$$\left.\begin{array}{l}1+G_s\equiv|g_s|^2,\quad 1+G_p\equiv|g_p|^2\\ R_{sj}\equiv|r_{sj}|^2,\quad R_{pj}\equiv|r_{pj}|^2,\ (j=1,2)。\end{array}\right\} \tag{15}$$

G_s、G_p即通常所称的每圈的增益，不过它是对S、p偏振光的饱和增益，不是通常的非饱和增益。R_{s_1}、R_{p_1}是从增益管端面输出后过水晶片前对S、p偏振光的综合反射率（即所有反射面的反射率与所有透射面的透射率等的乘积），R_{s_2}、R_{p_2}是过水晶片后，从增益管另一端面输入前的综合反射率。

显然，增益管有自调能力使$|\varepsilon|$尽可能小。例如：$R_{s_1}>R_{p_1}$，过水晶片前长轴是S偏振方向，过水晶片后旋转了90°，长轴是p方向，如果$R_{s_2}/R_{p_2}\leqq R_{s_1}/R_{p_1}$，则进增益管后长轴在$^p_s$方向；但如果长轴在$^p_s$方向，增益管的非饱和增益$G_p$必$\leqq G_s$，故

* 本文的±号代表右旋与左旋（+号为右旋，-号为左旋），这与文献[2]用R、L代表右旋、左旋而±代表±旋的符号不同，不要搞混了。因本文只讨论旋光，不讨论磁场效应，与[2]不同。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(1+G_s)R_{s_2}}{(1+G_p)R_{p_2}}>\frac{R_{s_2}}{R_{p_2}},\ \text{当}\frac{R_{s_2}}{R_{p_2}}<\frac{R_{s_1}}{R_{p_1}};\\&\frac{(1+G_s)R_{s_2}}{(1+G_p)R_{p_2}}<\frac{R_{s_2}}{R_{p_2}},\ \text{当}\frac{R_{s_2}}{R_{p_2}}>\frac{R_{s_1}}{R_{p_1}}。\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

因此，G_s、G_p 数值的自调使 $|\varepsilon|$ 减小。令

$$\varepsilon'=\frac{1}{4}\left[\frac{R_{s_2}}{R_{p_2}}-\frac{R_{s_1}}{R_{p_1}}\right],\tag{17}$$

则

$$|\varepsilon|<|\varepsilon'|.\tag{18}$$

假设增益管内部自调 G_s、G_p 的反馈作用影响较小，则可得

$$\varepsilon\cong\varepsilon'=\frac{1}{4}\left(\frac{R_{s_2}}{R_{p_2}}-\frac{R_{s_1}}{R_{p_1}}\right)。\tag{19}$$

由于环路使用的各元件损耗皆很小，令

$$\gamma_{sj}\equiv1-R_{sj},\ \gamma_{pj}\equiv1-R_{pj},\ (j=1,2).\tag{20}$$

为相应各段的 S、p 偏振损耗，则(19)式可写成：

$$\varepsilon\cong\varepsilon'=\frac{1}{4}\left[(\gamma_{p_2}-\gamma_{s_2})-(\gamma_{p_1}-\gamma_{s_1})\right].\tag{21}$$

从(21)式可知：即使方括弧的数字达 1%，椭圆度 ε 的数字不过 0.25%，在实际应用中可以忽略不计。实际数字例：基片 K_9(折射率用1.52)，MgF_2(1.38)及 ZnS(2.30)镀的全反膜，单片损耗的理论值见表 1 。

单个全反片的损耗的理论值 表 1

入 射 角	11层		21层	
	γ_s	γ_p	γ_s	γ_p
15°	5.92×10^{-3}	7.50×10^{-3}	3.32×10^{-5}	5.20×10^{-5}
30°	4.13×10^{-3}	1.06×10^{-2}	1.63×10^{-5}	1.06×10^{-4}

从表 1 可知：不管入射角多大，也不管用多少层的膜片以及镀膜的质量怎样，环路中由于 S 、 p 的损耗不同所产生的椭圆度是很小的。当然，如果有意匹配，使(21)式的

$$\gamma_{p_2}-\gamma_{s_2}\cong\gamma_{p_1}-\gamma_{s_1},\tag{22}$$

则椭圆度就更小了。

我们回过头来讨论旋光角 ϑ 为任意值的一般情形。令(4)式右式的 ± 号对应 $a_\pm$ 值。则不难求得(3)式对应于本征值 $a_\pm$ 的本征矢量 $\vec{D}_\pm$ 为：

$$\left.\begin{aligned}&\vec{D}_\pm\equiv\begin{pmatrix}D_{\pm1}\\D_{\pm2}\end{pmatrix},\\&\frac{D_{\pm2}}{D_{\pm1}}=\frac{1}{2}\Bigg[\cot\vartheta\left(\frac{r_{s_1}}{r_{p_1}}-\frac{g_pr_{p_2}}{g_sr_{s_2}}\right)\\&\qquad\pm i\sqrt{\left(\frac{g_pr_{p_2}}{g_sr_{s_2}}+\frac{r_{s_1}}{r_{p_1}}\right)^2-\left(\frac{r_{s_1}}{r_{p_1}}-\frac{g_pr_{p_2}}{g_sr_{s_2}}\right)^2\csc^2\vartheta}\ \Bigg]。\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

对$\vec{D}_{\pm}$，依次把坐标轴旋转 $\phi_{\pm}$角，新的分量满足以下关系：

$$\left.\begin{aligned}&\vec{D}_{\pm}\equiv\begin{pmatrix}D'_{\pm1}\\D'_{\pm2}\end{pmatrix},\\&D'_{\pm1}=D_{\pm1}\cos\phi_{\pm}+D_{\pm2}\sin\phi_{\pm},\\&D'_{\pm2}=-D_{\pm1}\sin\phi_{\pm}+D_{\pm2}\cos\phi_{\pm},\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

则

$$\left.\begin{aligned}D'_{\pm1}=&\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{rs_1}{rp_1}-\frac{g_prp_2}{g_srs_2}\right)\cot\vartheta\sin\phi_{\pm}+\cos\phi_{\pm}\right.\\&\left.\pm\frac{i}{2}\sqrt{\left(\frac{g_prp_2}{g_srs_2}+\frac{rs_1}{rp_1}\right)^2-\left(\frac{rs_1}{rp_1}-\frac{g_prp_2}{g_srs_2}\right)^2\csc^2\vartheta}\sin\phi_{\pm}\right\}D_{\pm1},\\D'_{\pm2}=&\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{rs_1}{rp_1}-\frac{g_prp_2}{g_srs_2}\right)\cot\vartheta\cos\phi_{\pm}-\sin\phi_{\pm}\right.\\&\left.\pm\frac{i}{2}\sqrt{\left(\frac{g_prp_2}{g_srs_2}+\frac{rs_1}{rp_1}\right)^2-\left(\frac{rs_1}{rp_1}-\frac{g_prp_2}{g_srs_2}\right)^2\csc^2\vartheta}\cos\phi_{\pm}\right\}D_{\pm1},\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

选 $\phi_{\pm}$使

$$D'_{\pm2}/D'_{\pm1}=\mp i\xi_{\pm},\tag{26}$$

把(26)式代入(25)式，并分别令实数部分与虚数部分各相等，经过化简后，可得

$$\phi_-=\phi_+\equiv\phi,\quad \xi_-=\xi_+\equiv\xi.\tag{27}$$

又

$$\operatorname{tg}2\phi=\cot\vartheta\left(\frac{g_srs_2\,rs_1}{g_prp_2rp_1}-1\right)\Big/\left(\frac{g_srs_2}{g_prp_2}-\frac{rs_1}{rp_1}\right),\tag{28}$$

$$\begin{aligned}\xi=&2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{rs_1}{rp_1}-\frac{g_prp_2}{g_srs_2}\right)\cot\vartheta\cot\phi-1\right]\\&\cdot\left[\left(\frac{rs_1}{rp_1}+\frac{g_prp_2}{g_srs_2}\right)^2-\left(\frac{rs_1}{rp_1}-\frac{g_prp_2}{g_srs_2}\right)^2\csc^2\vartheta\right]^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{29}$$

(28)式的 ϕ 角，其定义是(26)式，它说明在带撇的新坐标系中，$\vec{D}$的两个分量相差于$\frac{\pi}{2}$，因而是右旋和左旋光，新坐标系的轴线是椭圆的长短轴，比值是 ξ。因而，椭圆偏振光的椭圆度为

$$\varepsilon=\frac{|D'_{\pm1}|^2-|D'_{\pm2}|^2}{|D'_{\pm1}|^2+|D'_{\pm2}|^2}=\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}。\tag{30}$$

把(28)、(29)代入(30)式即可得出 ε。

简化一下(28)、(29)式。令

$$\delta_A\equiv\frac{g_srs_2\,rs_1}{g_prp_2rp_1}-1,\quad \delta_B\equiv\frac{g_srs_2}{g_prp_2}-\frac{rs_1}{rp_1}.\tag{31}$$

则从(28)式可得

$$\cot\phi=\frac{\operatorname{tg}\vartheta.\delta_B}{\delta_A}\cdot\left[1\pm\sqrt{\frac{\cot^2\vartheta\delta_A{}^2}{\delta_B{}^3}+1}\right]。\tag{32}$$

又(29)式可写成

$$\xi=\left(\cot\vartheta\cot\phi\delta_A-\frac{2g_sr_{s_2}}{g_pr_{p_2}}\right)\left[(2+\delta_A)^2-\delta_A^2\csc^2\vartheta\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\pm\sqrt{\delta_B^2+\cot^2\vartheta\delta_A^2}-\left(\frac{g_sr_{s_2}}{g_pr_{p_2}}+\frac{r_{s_1}}{r_{p_1}}\right)\right]\left[(2+\delta_A)^2-\delta_A^2\csc^2\vartheta\right]^{-\frac{1}{2}}.\tag{33}$$

令

$$\delta_1\equiv\frac{r_{s_1}}{r_{p_1}}-1,\ \delta_2\equiv\frac{g_sr_{s_2}}{g_pr_{p_2}}-1,\tag{34}$$

则
$$\delta_A=(1+\delta_1)(1+\delta_2)-1\cong\delta_1+\delta_2,\ \delta_B=\delta_2-\delta_1,\tag{35}$$

代入(33)，得

$$\xi=[\pm\sqrt{\delta_B^2+\cot^2\vartheta\ \delta_A^2}-(2+\delta_A)][(2+\delta_A)^2-\delta_A^2\csc^2\vartheta]^{-\frac{1}{2}}.\tag{36}$$

于是(30)式取 δ_A、δ_B 的一次方项，成为

$$\varepsilon=\frac{\pm1}{2}\sqrt{(\delta_2-\delta_1)^2+(\delta_2+\delta_1)^2\cot^2\vartheta}\ .\tag{37}$$

(34)式的 δ_1、δ_2 与(20)式的损耗有如下关系：

$$\left.\begin{aligned}&\delta_1=\sqrt{\frac{1-\gamma_{s_1}}{1-\gamma_{p_1}}}-1\cong\frac{1}{2}(\gamma_{p_1}-\gamma_{s_1}),\\&\delta_2\cong\frac{1}{2}(\gamma_{p_2}-\gamma_{s_2}),\ \text{当}\ g_s=g_p\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

这样就可看出(37)式是(21)式的推广。

数字例：$\gamma_{p_1}-\gamma_{s_1}=8\times10^{-3}$，$\gamma_{p_2}-\gamma_{s_2}=12\times10^{-3}$，则 $|\varepsilon|=\frac{10^{-3}}{2}\sqrt{4+100\cot^2\vartheta}$ $=1\times10^{-3}\sqrt{1+25\cot^2\vartheta}$。对于$\vartheta=\frac{\pi}{2}$，$|\varepsilon|=1\times10^{-3}$；对$\vartheta=\frac{\pi}{4}$，$|\varepsilon|=5.04\times10^{-3}$。可见椭圆度皆很小，$\vartheta=\frac{\pi}{2}$的情形尤小。

§2. 光沒有严格过光轴所引起的差分损耗

当光沒有严格过光轴，只有长、短轴为一定比值的椭圆偏振光在传播过程中能保持偏振性能，该比值为[3]

$$h=\frac{D_0'\text{,长轴}}{D_0'\text{,短轴}}=\frac{|n_E-n_O|\sin^2\alpha}{|n_L-n_R|}+\sqrt{1+\frac{(n_E-n_O)^2\sin^4\alpha}{(n_L-n_R)^2}}.\tag{39}$$

$\vec{D}_0'$ 是电矢量$\vec{D}$的振幅；n_O、n_E 是线偏振光O线、E线的折射率；n_L、n_R 是沿光轴的圆

偏振光左旋、右旋的折射率；α 是光与光轴的夹角。在传播中能保持偏振性能的椭圆偏振光为（为肯定起见，设水晶为右旋水晶）：

$$\vec{D}_R \propto \binom{i}{h},\quad \vec{D}_L \propto \binom{h}{i}。\tag{40}$$

设进入水晶的是线偏振光 S、p，开始时可写成：

$$\vec{D}_s(0)=C_s\binom{1}{0},\quad \vec{D}_p(0)=C_p\binom{0}{1},\tag{41}$$

(41)式可用(40)展开：

$$\left.\begin{aligned}\vec{D}_s(0)&=C_s\left[-\frac{i}{h^2+1}\binom{i}{h}+\frac{h}{h^2+1}\binom{h}{i}\right],\\ \vec{D}_p(0)&=C_p\left[\frac{h}{h^2+1}\binom{i}{h}-\frac{i}{h^2+1}\binom{h}{i}\right].\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

当传播一路程后，由于右旋光与左旋光的相速度不同，有一相位差 δ，因此，可以把右旋光与左旋光各乘因子 $e^{i\delta/2}$、$e^{-i\delta/2}$，这样，保持了偏振状态，又反映了相位差 δ，于是

$$\left.\begin{aligned}\vec{D}_s(\delta)&=\frac{C_s}{h^2+1}\begin{pmatrix}e^{i\delta/2}+h^2e^{-i\delta/2}\\ 2h\sin\frac{\delta}{2}\end{pmatrix},\\ \vec{D}_p(\delta)&=\frac{C_p}{h^2+1}\begin{pmatrix}-2h\sin\frac{\delta}{2}\\ h^2e^{i\delta/2}+e^{-i\delta/2}\end{pmatrix}.\end{aligned}\right\}\tag{43}$$

对于我们的情形：水晶的旋光角为 $\vartheta=\frac{\pi}{2}$，则右旋、左旋光的相位差 $\delta=\pi$，于是有

$$\left.\begin{aligned}\vec{D}_s(\pi)&=\frac{C_s}{h^2+1}\begin{pmatrix}i(1-h^2)\\ 2h\end{pmatrix},\\ \vec{D}_p(\pi)&=\frac{C_p}{h^2+1}\begin{pmatrix}-2h\\ i(h^2-1)\end{pmatrix}.\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

令

$$\sin\Psi\equiv\frac{h-\frac{1}{h}}{h+\frac{1}{h}},\quad \cos\Psi\equiv\frac{2}{h+\frac{1}{h}}\tag{45}$$

则(44)式可写成

$$\left.\begin{aligned}\vec{D}_s(\pi)&=C_s\begin{pmatrix}-i\sin\Psi\\ \cos\Psi\end{pmatrix},\\ \vec{D}_p(\pi)&=C_p\begin{pmatrix}-\cos\Psi\\ i\sin\Psi\end{pmatrix}.\end{aligned}\right\}\tag{44'}$$

这样，通过右旋与左旋的相位差为 π 的水晶片后，(41)式的偏振状态变换为(44′)的状态，因而变换矩阵为

$$\begin{pmatrix}-i\sin\Psi, & -\cos\Psi\\ \cos\Psi, & i\sin\Psi\end{pmatrix}.\tag{46}$$

(46)式的矩阵取代(2)式沿光轴且旋光角 ϑ 的矩阵

$$\begin{pmatrix}\cos\vartheta, & -\sin\vartheta\\ \sin\vartheta, & \cos\vartheta\end{pmatrix}, \tag{47}$$

上式 $\vartheta=\dfrac{\pi}{2}$ 与(46)式 $\Psi=0$（即 $h=1$）是一样的。矩阵$\underline{\underline{A}}$现在成为

$$\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}g_s, & 0\\ 0, & g_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_{s_2}, & 0\\ 0, & r_{p_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\sin\Psi, & -\cos\Psi\\ \cos\Psi, & i\sin\Psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_{s_1}, & 0\\ 0, & r_{p_1}\end{pmatrix}; \tag{48}$$

(4)式的本征值现在变成

$$a=ia'_{\pm}=\frac{i}{2}\left[(g_pr_p^2-g_sr_s^2)\sin\Psi\pm\sqrt{4g_sg_pr_s^2r_p^2+(g_pr_p^2-g_sr_s^2)^2\sin^2\Psi}\right]; \tag{49}$$

(23)式的本征矢量现在变成

$$\frac{D_{\pm2}}{D_{\pm1}}=i\left[\pm\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}+\frac{1}{4}\left(\sigma_1+\frac{1}{\sigma_2}\right)^2\mathrm{tg}^2\,\Psi}-\frac{1}{2}\left(\sigma_1+\frac{1}{\sigma_2}\right)\mathrm{tg}\,\Psi\right]; \tag{50}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_1\equiv1+\delta_1\equiv r_{s_1}/r_{p_1}\text{——过水晶片前},\\ &\sigma_2\equiv1+\delta_2\equiv g_sr_{s_2}/(g_pr_{p_2})\text{——过水晶片后。}\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

由于

$$|\delta_1|\ll1,\quad |\delta_2|\ll1, \tag{52}$$

故(50)式可简化成

$$D_{\pm2}\cong\pm iD_{\pm1}\left(1+\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right)h^{\mp1}。 \tag{53}$$

显然，(53)式的 $1+\dfrac{\delta_1-\delta_2}{2}$因子当 $h=1$ 亦存在，是上节中光过光轴时发生的效应；$h^{\mp1}$是光不过光轴的效应。两种效应分隔清楚。

h 的值见(39)式，对 0.6328μ 以及 λ 射角 α 不大时，可简化为

$$h-1\cong138\alpha^2, \tag{54}$$

而Ψ角与 h 的关系见(45)式。根据(39)式和(45)式所算得的数值见表 2。

当光与光轴夹角为 α 时的 h 值及 $\sin\Psi$　　　表 2

α	10′	20′	30′	1°	2°	3°	4°
$h-1$	1.17×10^{-3}	4.67×10^{-3}	0.0105	0.0419	0.1675	0.377	0.670
$\sin\Psi$	1.17×10^{-3}	4.67×10^{-3}	0.0105	0.0410	0.1537	0.309	0.472

要计算激光绕环路一圈所受的损耗，必须作以下的区别。(53)式所算的$\vec{D}$，是激光离开增益管前的值，过水晶片后的值$\vec{D}$，应为$\vec{D}$乘以变换矩阵(48)的前两个：

即：

$$\begin{pmatrix}D'_{\pm1}\\ D'_{\pm2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\sin\Psi, & -\cos\Psi\\ \cos\Psi, & i\sin\Psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_{s_1}, & 0\\ 0, & r_{p_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_{\pm1}\\ D_{\pm2}\end{pmatrix}. \tag{55}$$

$$\left.\begin{aligned}&D'_{\pm1}=-ir_{s_1}\sin\Psi D_{\pm1}-r_{p_1}\cos\Psi D_{\pm2},\\ &D'_{\pm2}=r_{s_1}\cos\Psi D_{\pm1}+ir_{p_1}\sin\Psi D_{\pm2},\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

以(53)式代入，并用 $r_{s_1}=r_{p_1}(1+\delta_1)$，得

$$\left.\begin{aligned}D'_{\pm1}&=\mp ir_{p1}D_{\pm1}\left(1+\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right)\left(1\pm\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\sin\Psi\right),\\D'_{\pm2}&=\pm i\left(1+\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\right)h^{\pm1}D'_{\pm1}。\end{aligned}\right\}\tag{57}$$

又因 $|\delta_1|\lesssim5\times10^{-3}$，$|\delta_2|\lesssim5\times10^{-3}$，$\sin\Psi\cong\mathrm{tg}\Psi\lesssim0.2$，故从 (53)、(57) 诸式，忽略高次小的项后，可得

$$\left.\begin{aligned}&|D_{\pm2}|^2\cong(1+\delta_1-\delta_2)h^{\mp2}|D_{\pm1}|^2,\\&|D'_{\pm1}|^2\cong r_{p1}^2(1+\delta_1-\delta_2)[1\pm(\delta_1+\delta_2)\sin\Psi]|D_{\pm1}|^2,\\&|D'_{\pm2}|^2\cong(1+\delta_1+\delta_2)h^{\mp2}|D'_{\pm1}|^2。\end{aligned}\right\}\tag{58}$$

$$\begin{aligned}\gamma_\pm&=\frac{(1-r_{s1}^2)|D_{\pm1}|^2+(1-r_{p1}^2)|D_{\pm2}|^2}{|D_{\pm1}|^2+|D_{\pm2}|^2}\\&\quad+\frac{(1-r_{s2}^2)|D'_{\pm1}|^2+(1-r_{p2}^2)|D'_{\pm2}|^2}{|D'_{\pm1}|^2+|D'_{\pm2}|^2}\\&=(1-r_{p1}^2)+(1-r_{p2}^2)+\frac{(r_{p1}^2-r_{s1}^2)|D_{\pm1}|^2}{|D_{\pm1}|^2+|D_{\pm2}|^2}\\&\quad+\frac{(r_{p2}^2-r_{s2}^2)|D'_{\pm1}|^2}{|D'_{\pm1}|^2+|D'_{\pm2}|^2}。\end{aligned}\tag{59}$$

以(58)式代入(59)式，并按(15)、(20)式把有关量变成过水晶前(“1”)、后(“2”)的损耗，得

$$\begin{aligned}\gamma_\pm&=\gamma_{p1}+\gamma_{p2}+\frac{\gamma_{s1}-\gamma_{p1}}{[1+(1+\delta_1-\delta_2)h^{\mp2}]}\\&\quad+\frac{\gamma_{s2}-\gamma_{p2}}{[1+(1+\delta_1+\delta_2)h^{\mp2}]}。\end{aligned}\tag{60}$$

从(60)式可得差分损耗 $\gamma_+-\gamma_-$，经化简后，成为

$$\gamma_+-\gamma_-=(\gamma_s-\gamma_p)\sin\Psi,\tag{61}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\gamma_s&\equiv\gamma_{s1}+\gamma_{s2},\\\gamma_p&\equiv\gamma_{p1}+\gamma_{p2}。\end{aligned}\right\}\tag{62}$$

γ_s、γ_p 为 S、p 偏振光每圈的总损耗。(61) 式的精度到 δ_1、δ_2 的平方项，即十万分之一的量级，故可认为是严格的。因此，右旋与左旋的差分损耗只有当光不沿水晶光轴时才存在。

由于“1”、“2”原标号是光束过水晶片的“前”、“后”，顺时钟的“1”、“2”与逆时钟的“2”、“1”是相同的，故改变一下符号，以顺时钟的“1”、“2”为准，而得到

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{\pm顺}&=\gamma_{p1}+\gamma_{p2}+\frac{\gamma_{s1}-\gamma_{p1}}{1+(1+\delta_1-\delta_2)h^{\mp2}}+\frac{\gamma_{s2}-\gamma_{p2}}{1+(1+\delta_1+\delta_2)h^{\mp2}},\\\gamma_{\pm逆}&=\gamma_{p2}+\gamma_{p1}+\frac{\gamma_{s2}-\gamma_{p2}}{1+(1+\delta_2-\delta_1)h^{\mp2}}+\frac{\gamma_{s1}-\gamma_{p1}}{1+(1+\delta_1+\delta_2)h^{\pm2}}。\end{aligned}\right\}\tag{63}$$

从(63)式，并利用(38)式，得

$$\gamma_{\pm顺}-\gamma_{\pm逆}\cong\frac{4\delta_1\delta_2h^{\mp2}}{1+(1+\delta_1+\delta_2)h^{\mp2}}\left[\frac{1}{1+(1+\delta_2-\delta_1)h^{\mp2}}-\frac{1}{1+(1+\delta_1-\delta_2)h^{\mp2}}\right]$$

$$=\frac{8\delta_1\delta_2(\delta_1-\delta_2)h^{\mp4}}{[1+(1+\delta_1+\delta_2)h^{\mp2}]\cdot[1+(1+\delta_2-\delta_1)h^{\mp2}][1+(1+\delta_1-\delta_2)h^{\mp2}]}$$

$$\cong\frac{8\delta_1\delta_2(\delta_1-\delta_2)h^{\mp4}}{(1+h^{\mp2})^3}\approx\delta_1\delta_2(\delta_1-\delta_2)\approx0. \tag{64}$$

(64)式准到 δ^3 项($\lesssim10^{-7}$)。在实用中，10^{-7} 的差损较小，可忽略不计，因此，可近似认为光束不严格通过水晶的光轴并不产生顺逆方向的差损。

(61)式的结果可以用很简单的方法求得。从上节及本节(53)式，由于旋光角近90°，S、p 偏振的差损造成的椭圆度很小，并且此效应与光束不严格过光轴的椭圆效应几乎完全独立，因此，在计算 $\gamma_+-\gamma_-$ 时可以不考虑 S、p 差损的椭圆效应。这样，椭圆长短轴的比值恒为 h，就可求得：

$$\gamma_\pm\cong\frac{\gamma_s|D_{\pm1}|^2+\gamma_p|D_{\pm2}|^2}{|D_{\pm1}|^2+|D_{\pm2}|^2}=\frac{\gamma_s+\gamma_ph^{\mp2}}{1+h^{\mp2}}, \tag{65}$$

$$\gamma_+-\gamma_-\cong\frac{(h^2-1)(\gamma_s-\gamma_p)}{1+h^2}=(\gamma_s-\gamma_p)\sin\Psi. \tag{66}$$

(66)式即(61)式，不过推导要简单很多。至于(64)式的结果不是简单方法能得到的，直观上却易理解。

数字例：$\gamma_s-\gamma_p=\pm5\times10^{-3}$，$\alpha=1°$，$\sin\Psi=0.0410$，得 $\gamma_+-\gamma_-=\pm2.05\times10^{-4}$，此数值比起通常环路里所存在的顺、逆时钟光束的差损($\gamma_{逆}-\gamma_{顺}\approx\pm1\times10^{-6}$)要大得多。

§3. 差损的恶果，有效措施

左、右旋偏振光有差损的直接效果是产生两者的光强差。令 $g_\pm$ 为增益，$I_\pm$ 为光强，则根据经验公式，可写成

$$I_\pm=I_0\left(\frac{g_\pm}{\gamma_\pm}-1\right). \tag{67}$$

式中 I_0 是常数，$g_\pm$ 与工作点的频率有关。令 G_m 为峰值增益，在激光陀螺中应控制在下列范围内：

$$\frac{G_m}{\gamma}\cong1.015\sim1.060, \tag{68}$$

其中，

$$\gamma=\frac{\gamma_++\gamma_-}{2}\text{：平均损耗。} \tag{69}$$

设 $\gamma=3\times10^{-2}$，$G_m=1.03\times\gamma=3.09\times10^{-2}$，$\gamma_+-\gamma_-=\pm2\times10^{-4}$，则峰值光强差的比值为：

$$\frac{I_{+峰}-I_{-峰}}{\bar{I}}=\left(\frac{G_m}{\gamma_+}-\frac{G_m}{\gamma_-}\right)\Big/\left(\frac{G_m}{\gamma}-1\right)$$

$$\cong -\frac{G_m}{\gamma}\cdot\frac{\gamma_+-\gamma_-}{G_m-\gamma}=\mp 0.23. \tag{70}$$

这个比值很大。在实验中，我们出现过比上述数字更大的情况，相当于 $\gamma_+-\gamma_-\cong 1\times10^{-3}$，$\gamma\cong3\times10^{-2}$，$\gamma_+\cong3.05\times10^{-2}$，$\gamma_-\cong2.95\times10^{-2}$，$G_m=1.03\gamma=3.09\times10^{-2}$，这样

$$\left.\begin{aligned}&\frac{I_{+峰}-I_{-峰}}{\bar{I}}\cong-1.14,\\&I_{+峰}/I_{-峰}\cong 2/7.\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

由于差动陀螺是用左、右旋模式的光强差来稳频，上述差损引起的光强差效应对性能不利：(1)当稳频于左、右模光强相等的工作点，必然使损耗小的对模偏到增益曲线的边沿，严重时将接近跳模点(见图 1a)，更严重时将不存在 $I_+=I_-$ 的工作点(见图 1b)；

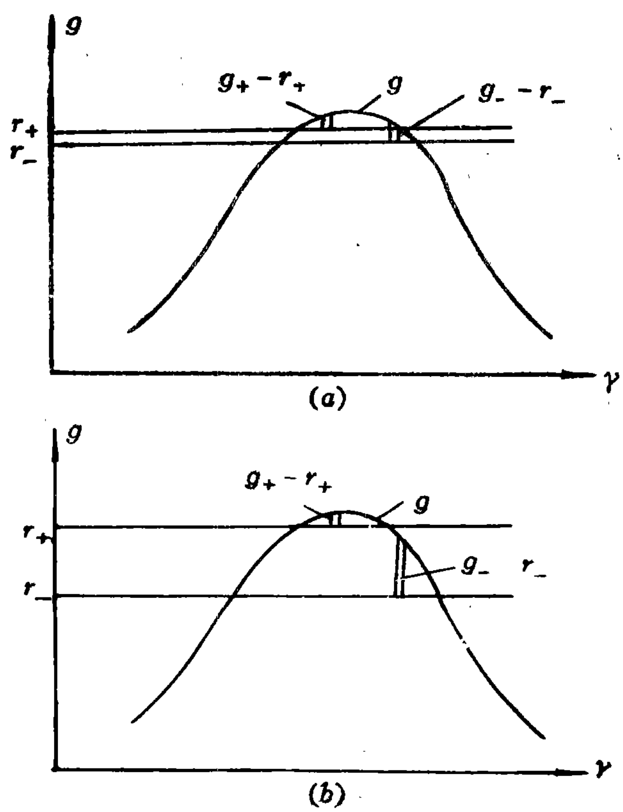

图 1 (当 $\gamma_+>\gamma_-$)

(2)$I_+=I_-$ 的工作点是随增益而改变的，图 2 中，增益从曲线 g 增加到 g'，则对模的工作点从实线的位置变到虚线的位置，增益增加使工作点的位置向对称位置移动；(3)由于相对比例因子 SFC 中的 S_ρ、S_τ、S_R 项皆与光强成正比 [4,5]，故右、左旋模式的

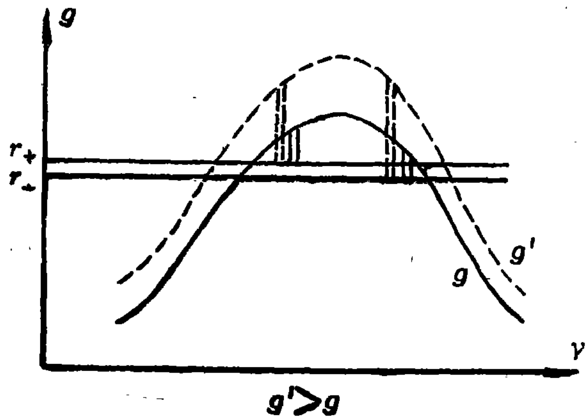

图 2*

S_p、S_τ、S_R 与 γ_+、γ_- 有关，SFC 与 γ_+、γ_- 有关，即使频率工作点相同，SFC 左$\neq$ SFC 右，这种不对称性增加了差动陀螺的零漂漂动[1]。

以上三种效应都在我们的实验中出现过，并曾经严重影响性能，其中尤以一个对模的工作点偏近到跳模点（图 1a）引起强烈的多模耦合零漂为最严重[1]。在弄清上述机构以后，我们把水晶片的入射平面与环路平面成 45° 左右的夹角，并稍作细调，这样就可使相对于水晶片来说的 γ_s 与 γ_p 接近相等，即使光不完全沿光轴，$\sin\Psi\neq0$，(61)式的 $\gamma_+-\gamma_-$ 亦很微小。当然，首先要求光尽可能沿光轴使 $\sin\Psi$ 小，再加上旋 45° 使 $\gamma_s-\gamma_p$ 小，就可达到预期结果。我们采取上述措施后，头两个效应已很小，第三个效应亦大为削弱，大大改善了陀螺的性能。

上面的有效措施，是实验中常用的，并经国内同行试行皆认为有效。但我们后来发现：如果仅仅靠旋转 45° 左右去追求 $\gamma_+-\gamma_-$ 小，而忽视过光轴的准确性，仍有隐患潜伏着，例如左旋对模与右旋对模的耦合，两对模有不同的光路等等。因此，过光轴的准确性更为首要。

参 考 文 献

[1] 国防科技大学激光教研室外腔式四频差动陀螺组：“外腔式四频差动陀螺的研制”国防科技大学“工学学报”1979 年 1 期 p.35, $p.p$.39～42.

[2] 高伯龙：“水晶片的几个光学性能（二）”1981 年 11 月苏州全国激光陀螺第三次交流会文献。

[3] P.Drude:“The Theory of Optics”, P.410, Dover Pullications, Inc, New York, 1959.

[4] 高伯龙：“激光陀螺的物理性能（一）”，单行本，封面为“环形激光讲义,”“环形激光协作组 1976 年 5 月,”由中国计量科学研究院印发。p.43

[5] F. Aronowitg, J.E. Killpatrich and S.B. Callaghan. J.Quant.Electronics, QE-10, No.2, Part Ⅱ, $p.p$201～208, 1974.

* 图 2 的g'曲线右对模应与左对模同光强，原图有错。

Several Optical Properties of Quartz（Ⅰ）

Gao Bo—long

Abstract

This paper calculates several optical properties of quartz used in differential laser gyro.The contents are the elimination of elliptic degree of laser polarization by optical activity, and the differential lose due to the light wave propagating not strictly along light axis. The serious faults of the later are discussed detailly, and we point out the effective way to weaken them. As a result, the properties of differential laser gyro have been improved greatly.