再入飞行器的最大飞行距离的统计决策鉴定

张 金 槐

提　要　为了充分利用验前信息，在小子样的场合下进行统计评定工作，文中运用了Bayes统计决策方法，讨论了两方面的问题。1. 再入飞行器的最大飞行距离鉴定的Bayes决策方法。引入了损失函数及验前信息，将决策中所冒的风险与射击效果结合了起来。2. Bayes估计。给出了最大飞行距离的Bayes统计估值。理论及计算结果表明：合理地使用验前信息，将有利于在小子样容量之下进行最大飞行距离的统计推断工作。

一、问题的提出

再入飞行器的最大飞行距离是一个重要的战术技术指标，在验收前必须经过严格的鉴定。对于同一批次生产的产品，经过多次飞行试验，运用统计数学方法，可以确定出最大飞行距离。然而，在试验次数较少的場合下，经典的方法遇到了困难。因为在子样容量较小的情况下，所获得的最大飞行距离估计（或检验），其置信度是不高的。对于昂贵的试验来说，我们只能作极少数的全程试验，此时，我们遇到的将是特小子样。另外，经典的统计方法往往沒有考虑历史资料，即历次试验中的信息。因此单靠少量的试验结果，也将难于作出合乎实际的评定。因此，我们认为寻求在小子样，且运用验前信息的場合下对最大飞行距离进行统计评定是一个需要解决的重要问题。

所谓最大飞行距离 $L_{\max}$ 是指这样的距离，它满足

$$P\{L \geqslant L_{\max}\} = 1-\alpha \tag{1.1}$$

其中L是飞行距离，$1-\alpha$ 为置信概率，α 为置信水平，常取 $\alpha=1\%$或2%.

假定 $L \sim N(L^*, \sigma^*)$，于是

$$P\{L_{\max}\} = \Phi\left(\frac{L_{\max}-L^*}{\sigma^*}\right), \tag{1.2}$$

其中

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

本文1982年1月收到。
本文曾在1981年宇航学会测控专业8112会议上报告，这次作了部分修改。

一个直观的方法是直接验证(1.1)式的成立。事实上，设 n 个落点数据为 $L_1,\cdots,L_n$，则记

$$\bar{L}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}L_i,\qquad \hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(L_i-\bar{L})^2},$$

以 $\bar{L}$，$\hat{\sigma}$ 分别代替 L^* 及 σ^*. 如果对于预定的 $L_{\max}$，它使

$$\Phi\left(\frac{L_{\max}-\bar{L}}{\hat{\sigma}}\right)\leqslant\alpha,$$

则我们认为产品的最大飞行距离是符合要求的。这种直观的方法毕竟太粗糙，因为 $\bar{L}$，$\hat{\sigma}$ 作为 L^* 和 σ^* 的近似值，只有在子样的容量充分大时才能认为是合理的。因此必须建立在严格的统计评定的基础上。

为此，我们运用经典统计评定方法。

在 $L\sim N(L^*,\sigma^{*2})$ 的前提下，如果 $L_{\max}$ 符合要求，则由(1.1)及(1.2)，得

$$\Phi\left(\frac{L_{\max}-L^*}{\sigma^*}\right)=\alpha,$$

因此
$$L_{\max}=L^*+\sigma^*\Phi^{-1}(\alpha), \tag{1.3}$$
或者
$$L_{\max}=L^*-\sigma^*\Phi^{-1}(1-\alpha). \tag*{(1.3)$'$}$$
其中 $\Phi^{-1}(\alpha)$ 为 $\Phi(\alpha)$ 的反函数。对于 n 个落点的纵向距离 $L_1,\cdots,L_n$，记 $L_i=L^*+\varDelta L_i$，则易知 $\varDelta L_i\sim N(0,\sigma^{*2})$，记

$$\bar{L}_n=L^*+\varDelta\bar{L}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}L_i,$$

$$S_n=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(L_i-\bar{L})^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\varDelta L_i-\overline{\varDelta L_n})^2},$$

作统计量

$$T=\frac{\sqrt{n}\,(\bar{L}_n-L_{\max})}{S_n}. \tag{1.4}$$

则 T 为非中心学生氏 t 一变量，其自由度为 $n-1$，非中心参数为 $-\sqrt{n}\,\Phi^{-1}(\alpha)$.

于是，在 $L_{\max}$ 满足(1.1)的条件下，令

$$P\left\{|T|=\left|\frac{\sqrt{n}\,(\bar{L}_n-L_{\max})}{S_n}\right|>t\right\}=\gamma(t;\alpha,n),$$

则运用非中心 t 一分布表，便可用熟知的方法对最大飞行距离 $L_{\max}$ 进行假设检验。这样的检验方法，在子样容量 n 太小时，检验的特性函数(oc—函数)不是良好的。因此，人们常不易获得令人信服的结果。此外，试验之前关于最大飞行距离的信息完全没有考虑。因此，验前的试验资料没有被充分的利用。

为此，本文将运用 Bayes 统计决策中的估计及假设检验方法，对再入飞行器的最大飞行距离进行统计推断。在讨论中，我们将着重于理论分析，具体的实例计算将在另外的场合进行。

二、具有验前信息时最大飞行离距Lmax的Bayes统计决策鉴定

对于最大飞行距离，我们要求它满足关系式(1.3)，或者

$$L^* = E[L] = L_{\max} - \sigma^* \Phi^{-1}(\alpha).$$

其中σ^*为落点的标准偏差，它可以由落点的散布鉴定中确定出来，于是引入统计假设

$$H_0:\qquad P\{L < L_{\max}\} = p \text{ 或 } E[L] = L_0 = L_{\max} - \sigma^* \Phi^{-1}(p)$$
$$= L_{\max} + \sigma^* \Phi^{-1}(1-p),$$
$$H_1:\qquad E[L] = L_1 = \lambda L_0, \quad \lambda < 1.$$

在原假设H_0中，$L_{\max}$用规定的指标值，p选为1%或2%．关于验前信息，给定为$P_{H0} = P_0$，$P_{H1} = P_1 = 1 - P_0$．由Bayes统计决策方法，决策不等式为[5]

$$\mathcal{L}(Z) \underset{acc.H_0}{\overset{acc.H_1}{\gtrless}} \gamma, \tag{2.1}$$

其中$\mathcal{L}(Z)$为似然比

$$\mathcal{L}(Z) = p(Z/H_1)/p(Z/H_0)$$

此处$Z = [L_1 \cdots L_n]^T$为样本空间中的样本点，n为子样的容量。(2.1)式中，γ为决策门限：

$$\gamma = \frac{c_{10} - c_{00}}{c_{01} - c_{11}} \cdot \frac{P_{H_0}}{P_{H_1}}.$$

其中$c_{ij} \equiv H_j$为眞而决策，为采纳H_i所造成的损失。这里，我们将运用0—k损失[1]．即当采取正确决策时，损失为0，而在错误决策时，损失为常量，于是$c_{00} = c_{11} = 0$．因此，为了决定决策不等式，需要合理地选定$c_{ij}(i \neq j)$．关于c_{ij}，有各种不同的确定方法，它视决策中的具体要求而定。在下面讨论中，我们将着重于再入飞行器在使用中的效果，以此来定义决策的损失函数。为此，我们考虑对面目标射击时的效果问题。

众所周知，对面目标射击时，常以对面目标的平均相对毁伤量$E[\Theta]$作为射效指标。这里Θ表示毁伤的相对面积，即毁伤面积与总的目标面积之比，它是随机的．于是定义

$$c_{ij} = \frac{|E[\Theta/H_j] - E[\Theta/H_i]|}{E[\Theta/H_j]}, \qquad i, j = 0, 1.$$

在具体实施时，取面目标为典型圆目标。于是$E[\Theta]$由再入飞行器在射击中的威力半径、精度和密集度等因素确定，它的计算可藉助于Monte-Carlo方法或者预先计算好的计算网格法进行[2],[3]．

运用决策不等式(2.1)时所引起的Bayes风险为

$$B = \sum_{i,j=0,1} c_{ij} P_{H_j} \int_{z_i} p(Z/H_j)\, dZ. \tag{2.2}$$

其中$z_0 + z_1 = \Omega$，Ω为样本空间，$z_i(i=0,1)$为采纳H_i的决策域。

Bayes决策中对应的犯两种错误的概率分别为

$$\alpha=\int_{Z_1} p(Z/H_0)\,dZ, \tag{2.3}$$

$$\beta=\int_{Z_0} p(Z/H_1)\,dZ. \tag{2.4}$$

下面给出具体方案。为表达清晰起见，记σ^*为σ．注意到

$$p(Z/H_i)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^{n}(L_j-L_i)^2},\quad i=0,1.$$

于是决策不等式为

$$\frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^{n}(L_j-L_1)^2\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^{n}(L_j-L_0)^2\right]}\underset{acc.H_0}{\overset{acc.H_1}{\gtrless}}\gamma,$$

取对数，经过整理，得

$$\frac{L_1-L_0}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}L_j+\frac{n}{2\sigma^2}(L_0^2-L_1^2)\underset{acc.H_0}{\overset{acc.H_1}{\gtrless}}\log\gamma=\log\left(\frac{c_{10}}{c_{01}}\cdot\frac{P_{H_0}}{P_{H_1}}\right).$$

或者

$$\sum_{j=1}^{n}L_j\underset{acc.H_0}{\overset{acc.H_1}{\gtrless}}\frac{n(L_1^2-L_0^2)}{2(L_1-L_0)}+\frac{\sigma^2}{L_1-L_0}\log\left(\frac{c_{10}}{c_{01}}\cdot\frac{P_{H_0}}{P_{H_1}}\right)$$

$$=\frac{n(1+\lambda)}{2}L_0+\frac{\sigma^2}{L_0(\lambda-1)}\log\left(\frac{c_{10}}{c_{01}}\cdot\frac{P_{H_0}}{P_{H_1}}\right)。 \tag{2.5}$$

决策的 Bayes 风险及检验中可能犯的两种错误的概率可由下法给出。引入统计量

$$u(Z)=\frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma}\sum_{j=1}^{n}L_j,$$

于是决策不等式为

$$u(Z)\underset{acc.H_0}{\overset{acc.H_1}{\gtrless}}\frac{\sqrt{n}(\lambda+1)}{2\sigma}L_0+\frac{\sigma}{(\lambda-1)L_0\sqrt{n}}\log\left(\frac{c_{10}}{c_{01}}\cdot\frac{P_{H_0}}{P_{H_1}}\right)\triangleq\gamma_u, \tag{2.6}$$

为确定$u(Z)$的分布，只需注意

$$E[u(Z)]=\frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma}nE[L]=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}E[L],$$

$$D[u(Z)]=\left(\frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)^2\cdot nD[L]=1.$$

于是

$$p(u/H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(u-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}L_0\right)^2}$$

$$p(u/H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(u-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}L_1\right)^2}$$

因此，Bayes 风险为

$$B=C_{01}P_{H_1}\int_{\gamma_u}^{+\infty}p(u/H_1)\,du+C_{10}P_{H_0}\int_{-\infty}^{\gamma_u}p(u/H_0)\,du$$

$$=C_{01}P_{H_1}\left[1-\Phi\left(\gamma_u-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}L_1\right)\right]+C_{10}P_{H_0}\Phi\left(\gamma_u-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}L_0\right). \tag{2.7}$$

而由(2.3)，(2.4)，

$$\alpha=\int_{z_1}p(u/H_0)\,du=\int_{-\infty}^{\gamma_u}p(u/H_0)\,du$$

$$=\Phi\left(\gamma_u-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}L_0\right), \tag{2.8}$$

$$\beta=\int_{z_0}p(u/H_1)\,du=\int_{\gamma_u}^{+\infty}p(u/H_1)\,du$$

$$=1-\Phi\left(\gamma_u-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}L_1\right). \tag{2.9}$$

这样，我们可以运用常用的统计决策方法对最大飞行距离进行鉴定。

三、Lmax 的 Bayes 估计

注意到最大飞行距离 L_{max} 如果符合定型要求的话，则它和平均飞行距离 L^* 的关系为

$$L_{max}=L^*+\sigma^*\Phi^{-1}(p). \tag{3.1}$$

因此，在通过了假设检验之下，如果对 L^* 进行估计，则 L_{max} 的估计便可相应地确定出来。这里，我们利用验前信息对 L^* 作 Bayes 估计。为此，将 L^* 作为随机的，且给出 L^* 的验前分布。我们假定 L^* 的验前分布为正态的，且

$$L^*\sim N(\hat{L}^*,\ \nu^2). \tag{3.2}$$

式中 $\hat{L}^*$ 及 ν^2 来源于历史资料的分析。例如，在试验之先应用有关资料估算出来，或者通过比较可靠的模拟计算估计出来。不妨设有 m 个验前的飞行距离信息

$$L_1^{(0)},\cdots,L_m^{(0)},$$

于是在 σ^* 为已知的場合下，取 L^* 的验前分布为

$$N\left(\bar{L}_m^{(0)},\ \frac{\sigma^{*2}}{m}\right),$$

其中

$$\bar{L}_m^{(0)}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}L_{(i)}^{(0)},$$

即是说，在(3.2)中，令

$$\hat{L}^*=\bar{L}_m^{(0)},\qquad \nu^2=\frac{\sigma^{*2}}{m}. \tag{3.3}$$

在以(3.3)为验前信息的情况下，如果我们获得了 n 个飞行试验的距离数据

$$L_1,\ L_2,\cdots,L_n,$$

则 L^* 的验后分布为[4]

$$L^*\sim N(\mu_1,\ \nu_1^2).$$

此处

$$\begin{cases}\mu_1=\dfrac{\sigma^{*2}\hat{L}^*+n\nu^2\bar{L}_n}{\sigma^{*2}+n\nu^2},\\ \nu_1^2=\dfrac{\sigma^{*2}\nu^2}{\sigma^{*2}+n\nu^2}.\end{cases}\tag{3.5}$$

其中 $\hat{L}^*$, ν^2 由(3.3) 给出，而 $\bar{L}_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}L_i$. 在 Bayes 估计中，如果取损失函数为平方误差损失函数，则 L^* 的 Bayes 估计（决策解）为 L^* 的验后数学期望，即

$$E[L^*/L_1,\cdots,L_n]=\mu_1\tag{3.6}$$

现在，我们来分析引入验前信息之下的 Bayes 估计与经典的估值方法比较时带来的好处。

当不运用验前信息时，经典的方法常取 $\bar{L}_n$ 作为 L^* 的估计，此时

$$E[\bar{L}_n]=L^*,\qquad 即\quad E[\bar{L}_n-L^*]=0,$$

$$D[\bar{L}_n]=\frac{\sigma^{*2}}{n}.$$

当运用前述验前信息时，L^* 的 Bayes 估计为其条件期望值，即

$$\mu_1=E[L^*/L_1,\cdots L_n],$$

而

$$E[E(L^*/L_1,\cdots L_n)]=E[L^*],$$

于是

$$E[\mu_1-L^*]=0.$$

因此，从无偏的角度来看，两种估计的效果是相同的。再从方差的角度来分析，对于验前飞行距离信息 $L_1^{(0)},\cdots,L_m^{(0)}$，不妨假定它来自 $N(L^*,\ \sigma^{*2})$ 总体，于是

$$\bar{L}_m^{(0)}\sim N\left(L^*,\ \frac{\sigma^{*2}}{m}\right).$$

(3.5) 式中之 μ_1 依赖于子样，此时

$$D[\mu_1]=D\left[\frac{m\bar{L}_m^{(0)}+n\bar{L}_n}{m+n}\right]=\frac{1}{(m+n)^2}\left[m^2\frac{\sigma^{*2}}{m}+n^2\cdot\frac{\sigma^{*2}}{n}\right]$$

$$=\frac{\sigma^{*2}}{m+n}<\frac{\sigma^{*2}}{n}=D[\bar{L}_n].$$

因此均值的 Bayes 估计有较高的精确度。

此外，从置信估计的角度来看，

$$L^*/L_1,\cdots,L_n\sim N(\mu_1,\ \nu_1^2),\qquad \bar{L}_n\sim N\left(L^*,\ \frac{\sigma^{*2}}{n}\right),$$

因此，对 Bayes 估计，

$$P\left\{\left|\frac{L^*-\mu_1}{\nu_1}\right|<\delta\,\middle|\,L_1,\cdots,L_n\right\}=2\Phi(\delta)-1;$$

对常用的经典的估计方法，

$$P\left\{\left|\frac{L^*-\overline{L}_n}{\sigma^*/\sqrt{n}}\right|<\delta\right\}=2\Phi(\delta)-1.$$

因此，在同样的置信概率之下，Bayes 置信估计的置信区间的长度小于经典的置信估计的区间之长，减少的长度为

$$2\left[\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}-\nu_1\right]\delta=2\left[\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}-\frac{\sigma^*\nu}{\sqrt{\sigma^{*2}+n\nu^2}}\right]\delta=2\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+m}}\right]\sigma^*\delta. \qquad (3.7)$$

由此可知，当 m 越大，则置信区间的长度缩小越快．说明了验前信息的充分利用，对置信估计是十分有利的。

最后，我们指出，当 L^* 和 σ^* 均为未知时，上面讨论的方法受到了限制。我们知道当最大飞行距离通过了假设检验（鉴定）之后，L_{max} 的 Bayes 估计可由下式给出

$$E[L_{max}/L_1,\cdots L_n]=E[L^*/L_1,\cdots,L_n]+aE[\sigma^*/L_1,\cdots,L_n], \qquad (3.8)$$

其中 $$a=\Phi^{-1}(p).$$

为要估计 L_{max}，只需计算(3.8)式右端两项。为此，我们确定 L^* 和 σ^* 的验后联合分布 $p(L^*,\sigma^*/L_1,\cdots,L_n)$．首先给出$(L^*,\ \sigma^*)$的验前分布。

假定在试验之先，具有 n_0 个关于飞行距离的信息 $L_1^{(0)},\cdots,L_{n_0}^{(0)}$．在 σ^* 任意给定之下，L^* 的验前分布设为[5]

$$N\left(\overline{L}_{n_0},\ \frac{\sigma^{*2}}{n_0}\right)\triangleq N(\overline{L}_{n_0},\ \eta_0 D^*),$$

此处 $$\overline{L}_{n_0}=\frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0}L_i^{(0)}, \qquad \eta_0=\frac{1}{n_0}. \qquad (3.9)$$

而假定 σ^{*2} 的边缘密度为逆 Gamma 分布[5]，其分布参数为

$$\begin{cases}\alpha_0=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_0}(L_i^{(0)}-\overline{L}_{n_0})^2,\\ \beta_0=\dfrac{n_0-1}{2}.\end{cases} \qquad (3.10)$$

即 σ^{*2} 的分布密度为

$$g(t;\alpha_0,\beta_0)=\frac{\alpha_0{}^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)}t^{-(\beta_0+1)}e^{-\frac{\alpha_0}{t}}, \qquad t>0 \qquad (3.11)$$

我们知道，$(L^*,\ D^*)$的验后分布与验前分布是共轭的，它仍为正态——逆 Gamma 分布，且有下列关系[5]

$$p(L^*,D^*/L_1,\cdots,L_n)$$

$$\propto D^{*-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2\eta_1 D^*}(L^*-\mu_1)^2}D^{*-(\beta_1+1)}\cdot e^{-\frac{\alpha_1}{D^*}}, \qquad (3.12)$$

其中

$$\begin{cases}\eta_1=\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{\eta_0}}=\dfrac{1}{n_0+n},\\[2ex] \mu_1=\dfrac{n\overline{L}_n+\dfrac{1}{\eta_0}\cdot\overline{L}_{n_0}}{n+\dfrac{1}{\eta_0}}=\dfrac{n\overline{L}_n+n_0\overline{L}_{n_0}}{n+n_0};\end{cases}\tag{3.13}$$

$$\begin{cases}\alpha_1=\alpha_0+\dfrac{n}{2}u+\dfrac{1}{2}\ \dfrac{n(\overline{L}_n-\overline{L}_{n_0})^2}{n\eta_0+1}\\[2ex] \beta_1=\beta_0+\dfrac{n}{2};\end{cases}\tag{3.14}$$

$$u=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(L_i-\overline{L}_n)^2.$$

于是

$$p(L^*/L_1,\cdots,L_n)=\int_0^{+\infty}p(L^*,D^*/L_1,\cdots,L_n)\,dD^*$$

$$\propto\int_0^{+\infty}D^{*-\left(\beta_1+\frac{1}{2}+1\right)}\cdot e^{-\frac{1}{D^*}\frac{2\eta_1\alpha_1+(L^*-\mu_1)^2}{2\eta_1}}\,dD^*,$$

注意到

$$\int_0^{+\infty}D^{*-(\beta+1)}\,e^{-\frac{\alpha}{D^*}}\,dD^*=\frac{\Gamma(\beta)}{\alpha^\beta},\qquad \alpha>0,\ \beta>0.$$

因此

$$\int_0^{+\infty}p(L^*,D^*/L_1,\cdots,L_n)\,dD^*$$

$$\propto\frac{1}{\left[\alpha_1+\dfrac{1}{2\eta_1}(L^*-\mu_1)^2\right]^{\beta_1+\frac{1}{2}}}$$

$$\propto\left[1+\frac{1}{2\alpha_1\eta_1}(L^*-\mu_1)^2\right]^{-\frac{2\beta_1+1}{2}}=\left[1+\frac{1}{2\beta_1}\frac{\beta_1}{\alpha_1\eta_1}(L^*-\mu_1)^2\right]^{-\frac{2\beta_1+1}{2}}.$$

作变换

$$Y=\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1\eta_1}\right)^{1/2}(L^*-\mu_1),\tag{3.15}$$

此时

$$L^*=\left(\frac{\alpha_1\eta_1}{\beta_1}\right)^{1/2}Y+\mu_1,\tag{3.15'}$$

于是Y的密度函数为

$$p_Y(y)=\left(\frac{\alpha_1\eta_1}{\beta_1}\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{2\beta_1}y^2\right)^{-\frac{2\beta_1+1}{2}}$$

$$\propto\left(1+\frac{y^2}{2\beta_1}\right)^{-\frac{2\beta_1+1}{2}} \tag{3.16}$$

由(3.16)即知 $p_Y(y)$ 为具有 $2\beta_1$ 个自由度的学生氏变量。于是

$$E[L^*/L_1,\cdots,L_n]=\left(\frac{\alpha_1\eta_1}{\beta_1}\right)^{1/2}E[Y]+\mu_1=\mu_1. \tag{3.17}$$

其次，再确定 $E[\sigma^*/L_1,\cdots,L_n]$. 为此，只需注意 $\sigma^{*2}=D^*$ 的验后密度函数为

$$p_{D^*}(D^*/L_1,\cdots,L_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(L^*,D^*/L_1,\cdots,L_n)\,dL^*$$

$$=\frac{\alpha_1{}^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)}D^{*\,-(\beta_1+1)}\,e^{-\frac{\alpha_1}{D^*}},\qquad D^*>0.$$

它为逆 Gamma 函数。于是 σ^* 的验后密度函数为

$$p_{\sigma^*}(\sigma^*/L_1,\cdots,L_n)=\frac{\alpha_1{}^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)}2\sigma^*[(\sigma^*)^2]^{-(\beta_1+1)}\cdot e^{-\frac{\alpha_1}{\sigma^{*2}}}$$

$$=\frac{2\alpha_1{}^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)}\sigma^{*\,-(2\beta_1+1)}e^{-\frac{\alpha_1}{\sigma^{*2}}},\qquad \sigma^*>0.$$

于是

$$\begin{aligned}
&E[\sigma^*/L_1,\cdots,L_n]\\
&=\frac{2\alpha_1{}^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^{+\infty}\sigma^*\cdot\sigma^{*\,-(2\beta_1+1)}e^{-\frac{\alpha_1}{\sigma^{*2}}}\,d\sigma^*\\
&=\frac{2\alpha_1{}^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^{+\infty}(\sigma^*)^{-2\beta_1}\,e^{-\frac{\alpha_1}{\sigma^{*2}}}\,d\sigma^*\\
&=\frac{\alpha_1{}^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^{+\infty}t^{\beta_1-\frac{3}{2}}e^{-\alpha_1 t}\,dt\\
&=\frac{\alpha_1{}^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\beta_1-\frac{3}{2}}e^{-x}\frac{dx}{\alpha_1}\\
&=\frac{\alpha_1{}^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)}(\alpha_1)^{\frac{3}{2}-\beta_1-1}\int_0^{+\infty}x^{\beta_1-\frac{3}{2}}e^{-x}\,dx\\
&=\frac{\alpha_1{}^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\beta_1)}\cdot\Gamma\left(\beta_1-\frac{1}{2}\right)\\
&=\sqrt{\alpha_1}\frac{\Gamma\left(\beta_1-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta_1)}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

最后，我们获得 L_{max} 的 Bayes（决策）估计为

$$\hat{L}_{max}=\mu_1+\Phi^{-1}(p)\sqrt{\alpha_1}\cdot\frac{\Gamma\left(\beta_1-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta_1)}. \tag{3.19}$$

参 考 文 献

[1] James O. Berger, Statistical Decision Theovy, Foundations, Concepts and Methods, Springer-Verlag, 1980.

[2] 苏咏美、李增惠，M[θ]计算的Monte-Carlo方法，3512会议技术报告，1976年7月，北京.

[3] 王有志等，计算多弹对任意目标集火射击时的平均相对毁伤的网格法，1976年7月，北京.

[4] 张金槐，Bayes方法及其在飞行器试验结果分析中的运用，湖南宇航学会控制分会技术报告，1981年11月.

[5] 张金槐，专题报告：Bayes方法，1981年8月.

Statistical Detection of the Maximum Range of Reenter Vehicle

Zhang Jin—huai

Abstract

For sufficiently using the prior information of the range of reenter vehicle for the purpose to detect the maximum range, we apply the statistical decision method. In this paper, we discuse two problems: 1. Bayesian statistical decision method for detecting maximum range. We introduce the lossfunction and prior information, and combine the Bayes risk with the effectiveness of the attack. 2. Bayesian estimation. We give the Bayesian statistical estimation of the maximum range. It appears from theoretical and numerical analysis, that the use of prior information appropriately, we can make the statistical inference in the smaller volume of the sample.