高能质子引起的核内级联过程

陈　翔

提　要　本文用蒙特卡罗方法计算了重核(U^{238})在高能入射质子(235MeV)的轰击下，所产生的核内级联过程。

高能粒子进入核后，在某个时间与核内的一个核子相互作用，接着被碰撞核子又可用同样的方式与核内的其他核子相互作用，这就是核内的级联过程。其中一些级联核子从核内逃脱，称之为级联产物。级联产物出射后，剩余核处于激发态。激发核可通过蒸发粒子来退激。

入射粒子在核中作随机运动（见图1），故可采用蒙特卡罗方法进行跟踪模拟。

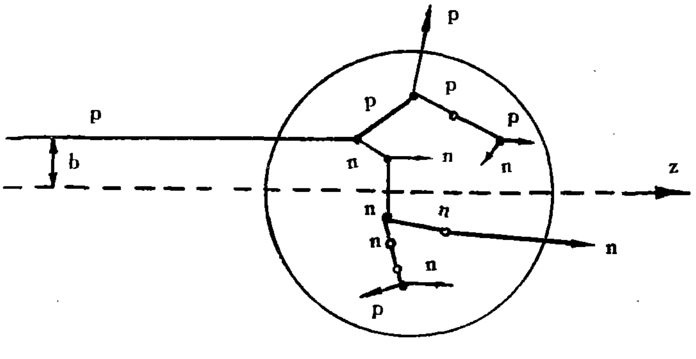

图 1　核内级联过程的示意图

图中：· 点表示碰撞位置；

○点表示泡利不相容原理所限制的碰撞位置；

b 是碰撞参数；n 表示中子；p 表示质子。

由于是高能入射核子，故核子波长小于核半径，因而核子的运动可半经典的来考虑。

在高能情况下，计算核子在核物质内的平均自由程时，可以把核中的核子看作是温度为绝对零度的费米气体。绝对零度相应于靶核的基态。

一、入射粒子进入核时在核表面上的位置与能量

选取反应前原子核的中心为座标原点，入射粒子在进入核以前的运动方向为 z 轴方向，入射粒子在进入核时，在核表面的位置用$\vec{r}_0$表示。由于入射粒子是平行束入射的，因此，若用 R_0 表示原子核半径，则$\vec{r}_0$的三个分量可写成

本文1981年12月1日收到

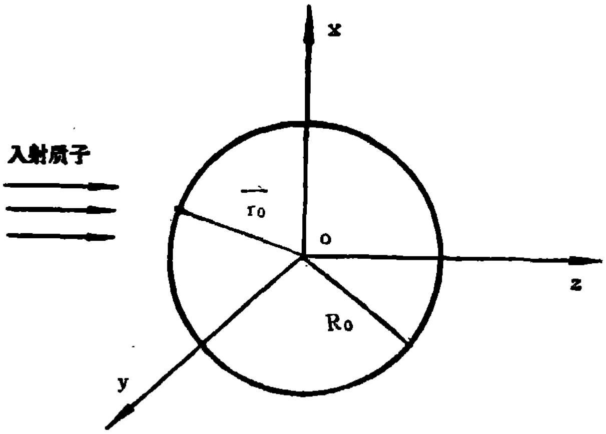

图　2

$$\begin{cases} x_0 = R_0\sqrt{\xi} \\ y_0 = 0 \\ z_0 = -\sqrt{R_0^2 - x_0^2} = -R_0(1-\xi)^{1/2} \end{cases}$$

其中：ξ 为随机数。

在核表面上，粒子进入核以前的能量E_-为：

$$E_- = T_0 + m_pC^2 = 1173.2796\text{MeV}$$

其中：T_0为进入核以前，粒子的动能。现假设入射的粒子为质子，能量取235MeV（能量太高，会有π介子产生）。

m_p为入射质子的静止质量，$m_p = 938.2796\text{MeV}\cdot\text{C}^{-2}$

C为光速，$\text{C} = 2.9979\times 10^{10}$厘米/秒.

粒子进入核以前的动量p_-为：

$$p_- = \sqrt{\frac{E_-^2}{C^2} - m_p^2C^2} \qquad (\text{即}\ E_-^2 = p_-^2C^2 + m_p^2c^4)$$

$$= 2.3497\times 10^{-8}\text{MeV}\cdot\text{秒/厘米}$$

粒子进入核以前的动量方向$\vec{p_-}/p_-$是已知的。为

$A_- = \cos 90° = 0$

$B_- = \cos 90° = 0$

$C_- = \cos 0° = 1$

（因为入射方向平行于z轴）

（A_-，B_-，C_-为粒子飞行方向的方向余弦）

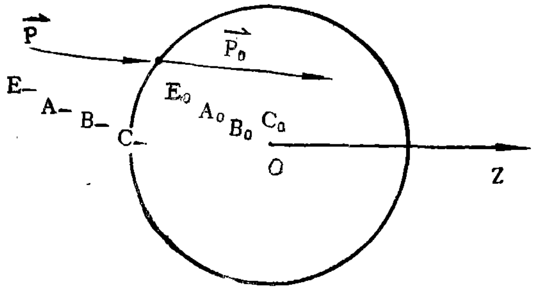

图　3

粒子进入核以后的能量E_0为：

$$E_0 = T_0 + Q + E_{fp} + m_pC^2$$

其中：Q为结合能，$Q = 7\text{MeV}$；E_{fp}为质子的费米能量，$E_{fp} = 45.2238\text{MeV}$.

E_{fp} 的计算如下：

原子核取U^{238}核

$$E_{fp}=\frac{\bar{h}^2}{2m_p}[3\pi^2\rho]^{2/3}$$

其中$\bar{h}$为普朗克常数，$\bar{h}=6.5821\times10^{-22}$MeV·秒

ρ为核内的核子数密度，$\rho=1.0866\times10^{38}$个/厘米^3

$$\rho=\frac{A}{V}=\frac{A}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}$$

其中：A为原子核的质量数，$A=238$，

原子核半径$R_0=1.3\times10^{-13}A^{1/3}$。对于$U^{238}$，

$R_0=8.0563\times10^{-13}$厘米。

把上述数据代入，得：

$$E_0=1225.5034\,\text{MeV}$$

粒子进入核以后的动量p_0为

$$p_0=\sqrt{\frac{E_0^2}{C^2}-m_p^2C^2}$$

粒子进入核以后的动量方向为：

粒子进入核以后的动量方向$\vec{p}_0/p_0$可根据角动量守恒$\vec{p}_-\times\vec{r}_0=\vec{p}_0\times\vec{r}_0$确定。

$\vec{p}_0$方向的三个方向余弦为

$$A_0=\frac{x_0}{R_0^2}\left[-z_0\frac{p_-}{p_0}-\sqrt{R_0^2-x_0^2\frac{p_-^2}{p_0^2}}\right]$$

$$B_0=0$$

$$C_0=\sqrt{1-A_0^2}$$

二、平均自由程

设核物质的密度是均匀的，则入射核子在核物质中的平均自由程λ为：

$$\lambda=\frac{1}{\langle\sigma\rangle\rho}(\text{厘米})\quad(\lambda=\frac{1}{\Sigma},\quad \Sigma\text{为宏观截面})$$

其中$\langle\sigma\rangle$是质心系中，核内核子对入射粒子的有效微分散射截面，ρ为核物质密度，现即为核内核子数密度。

$$\langle\sigma\rangle=\sigma_p\left[1-\frac{7}{5}\left(\frac{p_{fp}}{p_0}\right)^2\right]\ (\text{毫巴})$$

其中p_{fp}为质子的费米动量

$$p_{fp}=\bar{h}[3\pi^2\rho]^{1/3}=9.717\times10^{-9}\,\text{MeV·秒/厘米}$$

σ_p——质子的总散射截面，

$$\sigma_p=\frac{z\sigma_{pp}+(A-z)\sigma_{pn}}{A}$$

其中 σ_{pp}为自由质子对质子的有效散射截面；

σ_{pn}为自由质子对中子的有效散射截面；

A为U^{238}核的质量数，$A=238$；

z为U^{238}核的原子序数，$z=92$；

$$\sigma_{pp}=\frac{10.63}{\beta^2}-\frac{29.92}{\beta}+42.9\ (\text{毫巴})$$

$$\sigma_{pn}=\frac{34.4}{\beta^2}-\frac{82.2}{\beta}+82.2\ (\text{毫巴})$$

其中 $$\beta=C\frac{p_0}{E_0}$$

三、可能碰撞位置

利用平均自由程λ，可确定可能迁移长度d：

$$d=-\frac{1}{\Sigma}\ln\xi=-\lambda\ln\xi\ \ (\text{厘米})$$

那么，碰撞点座标为：

$$\begin{cases}x_1=A_0d+x_0\\ y_1=B_0d+y_0\\ z_1=C_0d+z_0\end{cases}$$

若此点在核外，则说明该粒子穿过了原子核逃掉了。

亦即按余弦定理：

$$\begin{aligned}r_1^2&=R_0^2+d^2-2R_0d\cos\theta_1\\&=R_0^2+d^2+2R_0\,d\cos\theta\end{aligned}$$

其中： $\cos\theta=A_0A'+B_0B'+C_0C'$；

A',B',C'是$\vec{r_0}$方向的方向余弦；

A_0,B_0,C_0是飞行方向的方向余弦；

$$A'=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$$

$$B'=\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$$

$$C'=\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$$

当$r_1>R_0$时，此粒子即从原子核逃掉了。

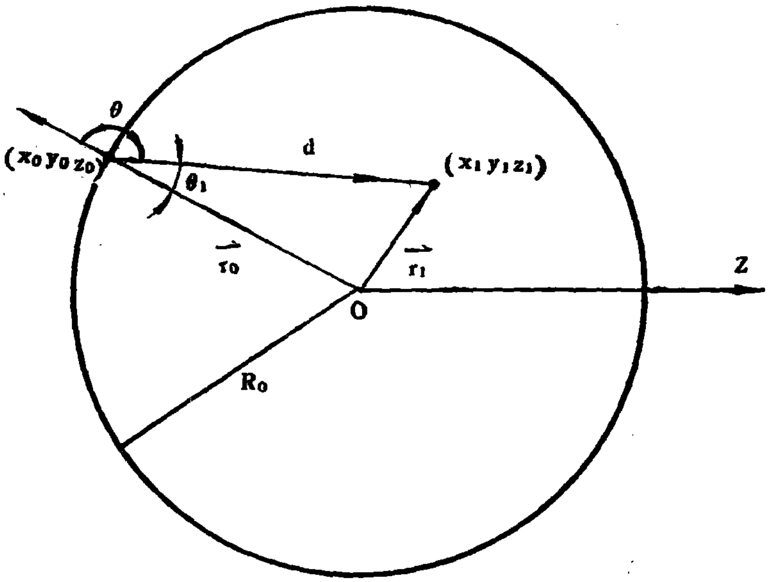

图 4

当迁移长度为d时，不一定发生真实的碰撞，还要考虑到：碰撞后的两个核子，在L系中的总能量不一定都大于费米能量，根据泡利不相容原理，此时的碰撞点是虚构的，即是虚碰。

四、允许碰撞位置

(1) 选择被碰对象

被碰核子是中子或质子的概率为：

若 $\xi \leqslant \frac{\sigma_{pp}}{\sigma_{pp}+\sigma_{pn}}$ 成立，则与质子相碰，否则与中子相碰。

(2) 被碰核子的能量

设被碰核子的动量为$\vec{p}$，则p遵从如下分布

$$f(p)=\begin{cases}\frac{3p^2}{p_{fp}^3} & \text{当 } 0\leqslant p\leqslant p_{fp}\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases}$$

直接抽样 $$\int_0^p f(p)\,dp=\xi,\int_0^p \frac{3p^2}{p_{fp}^3}dp=\xi$$

得： $$\frac{p^3}{p_{fp}^3}=\xi,\quad p=p_{fp}\cdot\sqrt[3]{\xi}$$

于是，被撞核子的能量 $E=(p^2c^2+m_p^2c^4)^{1/2}$

(3) 被碰核子的动量方向

被碰核子的动量方向 $\vec{p}/p$ 在L系中是各向同性的，故抽样得：

$$\begin{cases}\varphi = 2\pi\xi \\ \mu = 2\xi - 1\end{cases}$$

其中：$\mu=\cos\theta$，φ，θ 如图5所示。

动量 $\vec{p}$ 的方向为：

$$A=\sin\theta\cos\varphi$$
$$B=\sin\theta\sin\varphi$$
$$C=\cos\theta$$

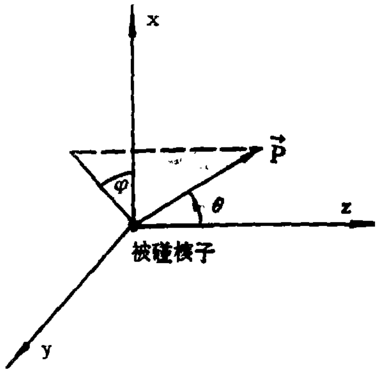

图 5

然后，求出碰撞后二粒子的总能量E_3和E_4。当E_3和E_4同时都大于其相应的费米能量时，

$$E_3 \geqslant E_{fp} + m_p C^2 = 983.5034\,\mathrm{MeV}$$
$$E_4 \geqslant E_{fp} + m_p C^2 = 983.5034\,\mathrm{MeV}$$

则位置$\vec{r_1}(x_1, y_1, z_1)$为允许碰撞位置，否则是不允许碰撞位置。

五、碰撞后粒子的动量和总能量

选实验室系（L系）和质心系（C系）

(1) L系到C系的动量和总能量

已知L系中下列各量：

E_1为入射粒子的总能量，即E_0；

$\vec{p_1}$为入射粒子的动量，即$\vec{p_0}$；

E_2为被碰核子的总能量，即上面求得的E；

$\vec{p_2}$为被碰核子的动量，即上面求得的$\vec{p}$。

根据洛伦兹变换，可得在C系中的上述各量如下：

$$\vec{p_1'} = \vec{p_1} + \frac{\vec{p_1}\cdot\vec{V}}{V^2}\vec{V}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(V/C)^2}} - 1\right] - \frac{\vec{V}E_1/C^2}{\sqrt{1-(V/C)^2}}$$

$$E_1' = \frac{E_1 - \vec{p_1}\cdot\vec{V}}{\sqrt{1-(V/C)^2}}$$

$$\vec{p_2'} = \vec{p_2} + \frac{\vec{p_2}\cdot\vec{V}}{V^2}\vec{V}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(V/C)^2}} - 1\right] - \frac{\vec{V}E_2/C^2}{\sqrt{1-(V/C)^2}}$$

$$E_2' = \frac{E_2 - \vec{p_2}\cdot\vec{V}}{\sqrt{1-(V/C)^2}}$$

其中$\vec{V}$表示质心相对于L系的速度

$$\vec{V}=\frac{C^2}{E}\vec{p}$$

其中 $\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2,\qquad E=E_1+E_2$

$$V^2=\left(\frac{C^2}{E}p\right)^2$$

(2) C系到C系，经散射后的动量和能量

在C系内，由于动量和能量是守恒的，因此可以得到散射后二粒子的能量E'_3和E'_4

$$E'_3=E'_4=\frac{E'}{2}$$

$$E'=E'_1+E'_2$$

散射后粒子的动量为

$$p'_3=\sqrt{\left(\frac{E'_3}{C}\right)^2-(m_pC)^2}$$

其方向由下式定

$$\frac{\vec{p}'_3}{p'_3}=\frac{1}{\alpha}\sin\theta\cos æ\vec{V}+\left(\cos\theta-\frac{\beta}{\alpha}\sin\theta\cos æ\right)\frac{\vec{p}'_1}{p'_1}$$

$$+\frac{1}{\alpha p'_1}\sin\theta\sin æ(\vec{p}'_1\times\vec{V})$$

其中：$\alpha=(V^2-\beta^2)^{1/2}$

$$\beta=\frac{\vec{p}'_1\cdot\vec{V}}{p'_1}$$

θ表示质心系内的散射角，遵从微分截面所确定的分布，现粗略的假设此分布为各向同性分布。æ表示质心系内的散射方位角，均匀分布在$[0,2\pi]$上。

(3) C系到L系的动量和总能量

经散射后，两个粒子在L系内的动量和总能量分别由下式给出

$$\vec{p}_3=\vec{p}'_3+\left(\frac{\vec{p}'_3\cdot\vec{V}}{V^2}\right)\vec{V}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(V/C)^2}}-1\right)+\frac{\vec{V}E'_3/C^2}{\sqrt{1-(V/C)^2}}$$

$$E_3=\frac{E_1+E_2}{E'}\left[E'_3+p'_3(\beta\cos\theta+\alpha\sin\theta\cos æ)\right]$$

$$\vec{p}_4=\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{p}_3$$

$$E_4=E_1+E_2-E_3$$

六、粒子历史的终止

出现以下情况之一时，粒子的历史被终止：

(1) 总能量E_3或E_4已经足够小，小于截断能量，粒子被终止。

截断能按 Metropolis 取法：

$$E_{cut}=E_f+Q+\frac{ze^2}{R_0}$$

其中 E_{cut} 为截断能，E_f 为中子和质子的平均费米能，Q为最松散核子的平均结合能，$\frac{ze^2}{R_0}$为核表面处质子的库仑能。

$E_f=45.2238\text{MeV}$

$Q=7\text{MeV}$

$\frac{ze^2}{R_0}=16.5\text{MeV}$

$\therefore E_{cut}=68.7238\text{MeV}$

当 $E_3\leqslant m_pC^2+E_{cut}=938.2796+68.7238$

$=1007.0034\text{MeV}$

或 $E_4\leqslant 1007.0034\text{MeV}$时，

粒子被终止。

(2) 粒子飞出核外，即当 $r_1\geqslant R_0$ 时，该粒子飞出核外，粒子被终止。

七、计 算 框 图

见 图 6

八、计 算 结 果

用FORTRAN 语言在 441B 一Ⅲ型机上编制了一个 CAS 程序，跟踪了90个入射粒子，结果如下：

	文献 [1] 的计算值	本文计算值
透明度	0.084	0.1444
非弹性截面（巴）	1.88（查图）	1.744
中子数/质子数	1.62	1.263
激发能E^*(MeV)	101.1	138.06

此外还计算了中子能谱，质子能谱及角分布。

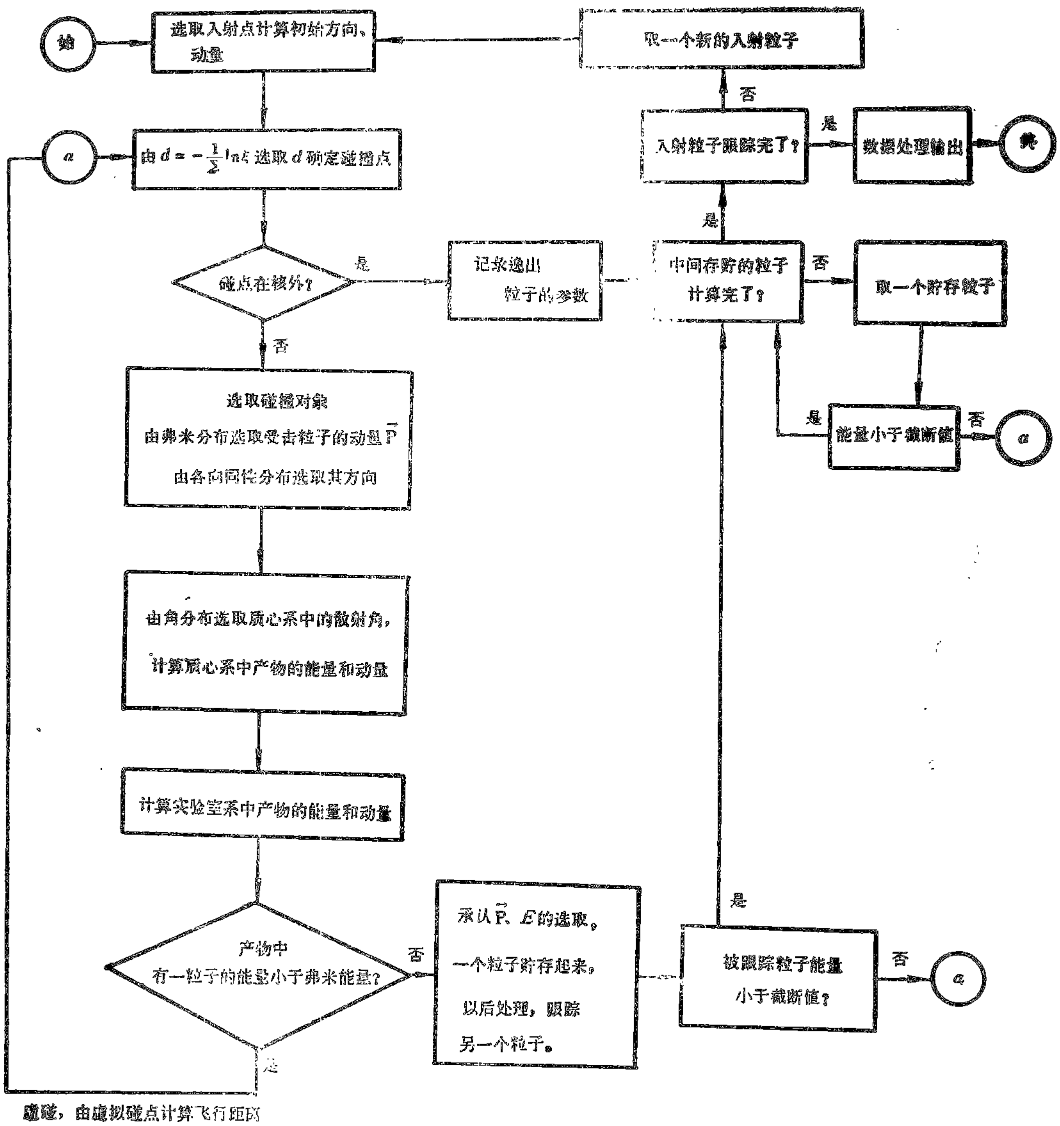
始
选取入射点计算初始方向、动量
取一个新的入射粒子
否
入射粒子跟踪完了？
是
数据处理输出
终
a
由$d=-\frac{1}{\Sigma}\ln\xi$选取$d$确定碰撞点
是
碰点在核外？
是
记录逸出粒子的参数
中间存贮的粒子计算完了？
否
取一个贮存粒子
否
选取碰撞对象
由弗米分布选取受击粒子的动量$\vec{P}$
由各向同性分布选取其方向
是
能量小于截断值
否
a
由角分布选取质心系中的散射角，
计算质心系中产物的能量和动量
计算实验室系中产物的能量和动量
是
产物中有一粒子的能量小于弗米能量？
否
承认$\vec{P}$、E的选取，
一个粒子贮存起来，
以后处理，跟踪另一个粒子。
被跟踪粒子能量小于截断值？
否
a
是
赝碰，由虚拟碰点计算飞行距离

图 6

参考文献

[1] N.Metropolis et al.,Phys.Rev.**110**, 185(1958); **110**, 204(1958).
[2] H.W.Bertini, ORNL—3383(1963).
[3] 裴鹿成、张孝泽，蒙特卡罗方法及其在粒子输运问题中的应用，科学出版社（1980）.
[4] A.C.达維多夫，原子核理论，上海科技出版社(1963).

The Intranuclear Cascade Process Induced by the High-Energy Protons

Chen Xiang

Abstract

In this paper, the Monte-Carlo method was used to calculate the intranuclear cascade process induced in the heavy nuclei (U^{238}) under the bombardment of the high-energy (235MeV) incident protons.