真空中粒子射束的扩展

谭　深

提　要　本文估算了带电或不带电粒子射束在真空中传播时的扩展，讨论了影响扩展的诸效应。指出可供选择的束类型。

一、概　述

一束速度接近于光速的高能粒子束射到物体上引起一定的破坏作用，故能用作武器，称射束武器。与破坏作用紧密联系的因素是射束粒子的质量、电荷、能量、流密度；射束出口和打到靶上的半径和长度等等。在真空中射束的总能量（粒子和电磁場的总能量）是不变的，问题在于射束在传播过程中的扩展，可能大大减少了在单位面积上射束的能流，从而影响其破坏能力。对带电的粒子束由于静电力的排斥作用其束半径的扩展是很大的，此因素就常常作为带电粒子束武器是否可行的爭论的问题之一。

本文试对带电或不带电粒子射束，用简化了的方案探讨粒子质量、电荷、粒子流密度、射束出口半径等对束半径扩展的影响，并指出作为武器时可能的选择。

二、简化了的计算方案

一束带电粒子由加速器射出，在其前进中由于束本身的电磁力将四向扩展。设射束出口时的情况是：N_0个质量为m、电量为q的粒子均匀分布在长为L，半径为a的圆柱体中。由库仑定律经过简单计算，得在圆柱中部，圆柱表面处的电場强度为：（当$L\gg a$）

$$E_1=\frac{2N_0q}{La} \tag{1}$$

而在圆柱体的端面轴线上的电場强度为：

$$E_2=\frac{2N_0q}{a^2L}\cdot\left(L+a-\sqrt{L^2+a^2}\right)$$

当$L\gg a$时可近似得

$$E_2=\frac{2N_0q}{La} \tag{2}$$

E_1，E_2刚好相等。由于粒子束开始时$L\gg a$，所以当径向和轴向扩展同样大小时，相对

本文 1982 年 2 月 18 日收到

来说轴向长度的变化可以忽略，因此，以下认为L为常数。

严格说来，射束的扩展在不同部位是不同的。我们只计算束中央，外表面处的一个粒子为代表，作为束的扩展，得结果如下：

$$\frac{ct\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{a}=\int_0^{\ln\frac{\rho}{a}}\frac{e^w dw}{\sqrt{1-(Bw+1)^{-2}}} \tag{3}$$

式中c为光速，t为发射后的时间，v为射束出口时初速(认为不变)，a为射束出口半径，ρ为发射t秒后的束半径。常数B有：

$$B=\frac{2Nq^2}{mc^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{4}$$

式中N为单位长度的粒子数，q和m为粒子电荷和质量。

现设射束为电子束，出口时电流为100安培，半径$a=10$厘米，射到300公里处束半径ρ因初速v(与加速电压U有关)不同而有不同。由(3)式作很粗略的估算得：

加速电压(兆伏)	100	1000	10000
ρ(厘米)$\approx$	4000	40	$\geqslant$10

三、分 析

(1) 真空中带电粒子束的扩展，并非把带电粒子束作为武器的不可克服的困难。只要加速电压足够大，在一定射程内束的扩展并不太大。

(2) 在某些范围内，束出口半径对到靶的束半径影响不大。

(3) 电流增加会使束半径迅速增加，故作为武器，从束扩展的角度看来，应取高电压、小电流的方案。而在同样的加速器功率下，如用低电压、大电流则束扩展太大，到靶时破坏作用不大。

(4) 对质子束，如加速电压为10000兆伏，其余参数和上述电子束相同，束半径扩展为$\approx$4000厘米，故从束扩展的角度看来宜用电子束而不用质子束。

四、“聚焦”粒子束

为了克服扩展，设想了“聚焦”的粒子束。即使射束出口时，不在轴线上的粒子，视其离轴距离不同具有适当的向轴的径向分速u_0，此时(3)式改为下式：

$$\frac{ct\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{a}=\int_0^{\ln\frac{\rho}{a}}\frac{e^w dw}{\pm\sqrt{1-(Bw+D)^{-2}}} \tag{5}$$

式中v为粒子的轴向分速。

$$D=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_0'^2}{c^2}}}$$

$$u_0'=u_0\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

我们认为，对于射束武器，“聚焦”概念的提出有一定的意义。首先，因为聚焦与非聚焦能量流密度相差非常大，直接影响到粒子束武器的破坏机理。从而影响到整个武器系统的参数的选定。其次，按现有的设想，粒子束武器是用于打击几百公里以外的目标。不过射程虽长但时间很短。很难设想射束出口后还有甚么方法能修正其弹道。所以，瞄准跟踪和核对击中与否就成为粒子束武器的又一大难题。如果能控制射束的聚焦，用扩展以利于搜索目标，用聚焦以摧毁目标，则不失为解决之法。

五、一 个 注 记

关于粒子束武器的文章，在国外公开发表的甚少。偶而有一两篇评述性文章，大多是争论粒子束武器是否可行，而学术性强、严肃认真的更为稀少。

资料[1]是一篇射束武器的技术性评论文章，总的倾向是属于否定粒子束武器的一派的。在论及带电粒子束在传播中扩展时给出如下公式：

$$aF(\sqrt{\ln(a/a_0)})\simeq(Z/\beta\gamma)\left(\frac{I}{I_A}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

其中 a_0 是出口时的束半径，F 是 Dawson 积分 (M. Abramowitz and I. A. Stegun: “Handbook of Mathematical Functions”Dover Publications, 1970, P.319)。

其中 $\beta=\frac{v}{c}$，v 为粒子速度，c 为光速，

$$\gamma=\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

I 是束电流强度，I_A 是 Alfven 电流，定义是：

$$I_A=4\pi\varepsilon_0 m_0 c^3\beta\gamma/e$$

$$I_A=\begin{cases}1.70\times10^4\beta\gamma(A) & \text{对电子}\\ 3.12\times10^7\beta\gamma(A) & \text{对质子}\end{cases}$$

Z 是射束的射程。(A)表以安培为单位。

资料[1]对公式(6)全无推导，加之我们未找到该数学函数手册，所以也不知道式中函数 F 所指的 Dawson 积分的表达式为何。不过，(6) 式与我们所推导的 (3) 式有所不同是显然的。为搞清谁是谁非，我们用推导(3)式稍有不同的处理推得另一公式如下：

$$a_0\int_0^{\sqrt{\ln\frac{a}{a_0}}} e^{u^2}\,du=\left(\frac{Z}{\beta\gamma}\right)\left(\frac{I}{I_A}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

对比(6)式可见，如果我们的推导是资料[1]的原意的话，可得出如下结论：

1. 资料[1]的公式有印刷上的错误，等式左方的 a 为 a_0 之误。

2. 所谓 Dawson 积分是：

$$F\left(\sqrt{\ln\frac{a}{a_0}}\right)=\int_0^{\sqrt{\ln\frac{a}{a_0}}} e^{u^2}\,du$$

3. 推导公式(3)和(6)的处理上的差别在于：我们推导公式(3)时是全部用相对论力学处理；而推导(6)式时既用了相对论力学的变换，而当计及粒子受电場力作用时却只用牛顿力学来处理。二者的差别是束扩展按(3)式所得较小而按(6)式所得较大。如对电子束，1000 兆伏，1000 安培出口半径 1cm，传输到 1000 公里处，由(3)式得出束半径扩展约为 13 米，按(6)式为 15 米。但可以看到当能量更高时，二者的差别会很显著。

六、不带电粒子束的扩展

由于带电粒子束有扩展问题，所以也有人提出用不带电粒子束作为武器。但是，不带电粒子不受电磁場加速作用。至今尚无直接加速不带电粒子的方案，而一般的设想是先加速带电粒子，然后当其出口时使之中性化。

不过，即使粒子束不带电，仍有扩展问题，这是由于微观粒子的波动性。对其扩展的估算如下：

1. 按测不准关系：

$$\Delta p\cdot\Delta x=h$$

可推导得射束的发散角 θ，

$$\theta=\frac{\lambda}{a} \tag{7}$$

其中 λ 为粒子的德布洛衣波长；a 为出口半径。

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\cdot v} \tag{8}$$

2. 以(8)式作为波长，应用光学圆孔衍射公式，可得射束的发散角 θ 为：

$$\theta=0.61\frac{\lambda}{a} \tag{9}$$

3. 用量子力学方法处理：从 Schrödinger 方程出发：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi=E\psi \tag{10}$$

用柱坐标(r,φ,z)，可得方程(10)的特解：

$$\psi(r,\varphi,z)=AJ_n(Kr)e^{in\varphi}e^{i\frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar}\cdot z} \tag{11}$$

式中 A 为归一化常数 J_n 为 n 阶贝塞尔函数，n 为角量子数取 0 和正负整数。

$$K=\frac{\sqrt{2m(E-E_z)}}{\hbar}$$

E 为粒子定态总能量，E_z 为 z 方向的量子数，$E_z<E$，取 $0\to E$ 的任意值。

对一定能态 E，一定角量子数 n，E_z 可取不大于 E 的值的波函数 ψ 的叠加为 ψ 的通解。此时 A 为叠加权重以 $A(E_z)$ 表示，又因 E_z 取連续值，叠加以积分表示：

$$\psi_{E,n}(r,\varphi,z)=\int_0^E A(E_z)J_n(K\gamma)\,e^{in\varphi}e^{i\frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar}z}\,dE_z \qquad (12)$$

如认为粒子束有轴对称则 $n=0$。记为 $\psi_E(r,z)$，显然与 $A(E_z)$ 的函数形式有关。例如：

$$A(E_z)=\delta(E_z-E)$$

δ 函数表示粒子动量完全沿 z 方向，

$$\psi_E(r,z)=\int_0^E\delta(E_z-E)\,J_0\left(\frac{\sqrt{2m(E-E_z)}}{\hbar}\cdot r\right)e^{i\frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar}z}\,dE_z$$

$$=e^{i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}z}$$

就是所预期的平面波解。

当 $\psi_E(r,z)$ 是用以表达射束的情况，设射束由左射向右方，$z=0$ 处为加速器的出口。出口处粒子有一定的动量(能量)和空间分布。例如，加速器的粒子束团的空间分布一般可用高斯分布表达。即 $\psi_E(r,0)$ 应有：

$$\psi_E(r,0)=\int_0^E A(E_z)J_0\left(\frac{\sqrt{2m(E-E_z)}}{\hbar}r\right)dE_z=Be^{-\frac{r^2}{a^2}} \qquad (13)$$

式中 B 为与束流密度有关的常数，a 表达束宽，可以理解为出口束半径。我们把(13)式作为一个积分方程，求函数 $A(E_z)$。为此我们换变数，由于

$$K=\frac{\sqrt{2m(E-E_z)}}{\hbar}$$

以 K 换 E_z 得：

$$Be^{-\frac{r^2}{a^2}}=\int_0^{\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}A(K)J_0(Kr)\frac{\hbar^2}{m}\cdot KdK \qquad (14)$$

利用积分公式：

$$\int_0^\infty J_0(ax)e^{-b^2x^2}\cdot x\cdot dx=\frac{1}{2b^2}e^{-\frac{a^2}{4b^2}}$$

可见如(14)式的积分限换为∞即可解得 $A(K)$。

$$A(K)=\frac{m}{\hbar^2}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot B\cdot e^{-\frac{a^2}{4}K^2} \qquad (15)$$

对电子束，$E=1Gev$，$K=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\doteq 1.6\times10^{12}\ \frac{1}{\text{厘米}}$ 所以 $\frac{a^2}{4}K^2$ 是很大的数。所以积分限换为∞是合理的，导致的误差是可忽略的。

把(15)式代回(12)式并令 $n=0$，变数换为K，得：

$$\psi_E(r,z)=\int_0^{\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}\frac{a^2}{2}B\cdot e^{-\frac{a^2}{4}K^2}J_0(Kr)\cdot KdK\cdot e^{i\sqrt{2mE-\hbar^2K^2}\cdot\frac{z}{\hbar}}$$

把上式右边最后一个因子，e 指数上的根号作近似：

$$\sqrt{2mE-\hbar^2K^2}=\sqrt{2mE}\cdot\sqrt{1-\frac{\hbar^2K^2}{2mE}}\approx\sqrt{2mE}\left(1-\frac{\hbar^2K^2}{4mE}\right)$$

并把积分上限改为∞。并令

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}=2\pi\frac{1}{\lambda}$$

式中 λ 为粒子的都布洛衣波长。得

$$\psi_E(r,z)=Be^{i2\pi\frac{z}{\lambda}}\frac{1-i2\frac{\lambda}{2\pi}\frac{z}{a^2}}{1+4\left(\frac{\lambda}{2\pi}\cdot\frac{z}{a^2}\right)^2}\cdot e^{-\frac{1-i2\frac{\lambda}{2\pi}\frac{z}{a^2}}{1+4\left(\frac{\lambda}{2\pi}\cdot\frac{z}{a^2}\right)^2}\cdot\frac{r^2}{a^2}} \tag{16}$$

而粒子密度分布 $\rho(r,z)=\psi_E^*\psi_E$，有

$$\rho(r,z)=B^2\frac{1}{1+4\left(\frac{\lambda}{2\pi}\frac{z}{a^2}\right)^2}e^{-\frac{2}{1+4\left(\frac{\lambda}{2\pi}\frac{z}{a^2}\right)^2}\cdot\frac{r^2}{a^2}} \tag{17}$$

z 值一定时 $\rho(r,z)$随 r 是一高斯型分布。以密度下降为峰值的$\frac{1}{e}$时定义束半径 $R(z)$ 即：

$$\frac{\rho(R,z)}{\rho(0,z)}=\frac{1}{e}$$

得 $R(z)$：

$$R(z)=\sqrt{\frac{1+4\left(\frac{\lambda}{2\pi}\frac{z}{a^2}\right)^2}{2}}\cdot a \tag{18}$$

由(18)式，可以定义出口时的束半径 $R(0)$：

$$R(0)=\frac{a}{\sqrt{2}} \tag{19}$$

$R(0)$与 a 不等，是因前者以"强度(密度)"定义而后者以"振幅"定义。

当 z 很大时由(18)式

$$R(z)\approx\sqrt{2}\frac{\lambda}{2\pi}\frac{z}{a} \tag{20}$$

于是得束的发散角 θ：

$$\theta=\frac{R(z)}{z}=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\frac{\lambda}{a}=0.225\frac{\lambda}{a} \tag{21}$$

也可按(19)式改为：

$$\theta=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\ \frac{\lambda}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}\,R(0)}=\frac{1}{2\pi}\ \frac{\lambda}{R(0)} \tag{22}$$

参考文献

[1] Particle Beam Weapons-A Technical Assessment. G.Bekefi et al. Massachusetts 02139.

Particle Beam Spread in Vacuum

Tan Shen

Abstract

In this paper, author estimated the spreading of charged or unchanged particle beam in vacuum; discussed the effects influencing the spread; and showed which the beam model can be selected.