

带电粒子束传输中发散范围的计算

张树发

提 要 本文讨论了带电粒子束在真空环境中的定常传输。对束的径向发散提出了一个计算方法。根据数值计算结果, 提出一个计算束半径的近似公式。

理 论

由于同类带电粒子间的电斥力, 传播中的束是发散的。下面仅就真空环境中带电粒子束的发散, 提出一种计算方法。

设有一能量为 T_0 , 流强为 I , 初始束半径为 a 的带电粒子束在真空中传播。在不考虑地磁场的影响时, 它是沿直线传播的。我们取圆柱形束的对称轴为 z 轴, 正方向就是束的传输方向。设刚出口的束中各带电粒子具有相同的能量, 且无横向速度分量, 则轴向初速度由相对论质能关系

$$T_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} - 1 \right) \quad (1)$$

求出为

$$\begin{aligned} V_0 = V_z(0) &= c \left[1 - \left(\frac{m_0 c^2}{T_0 + m_0 c^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= c \frac{[T_0(T_0 + 2m_0 c^2)]^{\frac{1}{2}}}{T_0 + m_0 c^2} \end{aligned} \quad (2)$$

式中 m_0 为带电粒子的静止质量。

相对论力学方程 (采用高斯单位制) 为

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{B} \right) \quad (3)$$

式中

$$\vec{P} = m_0 \gamma (\vec{r}\dot{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z) \quad (4)$$

是带电粒子的动量; q 是其电荷; $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ 是柱坐标系的三个基矢;

而 $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 是洛伦兹因子; $V^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2$ 。

因为

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \\ \vec{e}_z &= \vec{k}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_r &= \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\theta &= -\dot{\theta} \vec{e}_r \\ \dot{\vec{e}}_z &= 0\end{aligned}\quad (5)$$

将(4)式和(5)式代入(3)式,得柱坐标系下的运动方程为

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) - \gamma r \dot{\theta}^2 = \eta \left(E_r + \frac{1}{c} V_\theta B_z - \frac{1}{c} V_z B_\theta \right) \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma r^2 \dot{\theta}) = \eta r \left(E_\theta + \frac{1}{c} V_z B_r - \frac{1}{c} V_r B_z \right) \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{z}) = \eta \left(E_z + \frac{1}{c} V_r B_\theta - \frac{1}{c} V_\theta B_r \right) \quad (8)$$

式中 $\eta = q/m_0$ (荷质比)。这三个方程的意义是明显的,(6)式左边第二项是向心加速度项;(7)是动量矩方程。

根据我们的情况,可采用如下的近似:

$$E_z = E_\theta = 0 \quad (9)$$

$$B_z = B_r = 0 \quad (10)$$

所以运动方程简化为

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) - \gamma r \dot{\theta}^2 = \eta \left(E_r - \frac{1}{c} \dot{z} B_\theta \right) \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{z}) = \frac{\eta}{c} \dot{r} B_\theta \quad (13)$$

考虑稳定传输,真空中的麦克斯韦方程成为

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho_e \quad (14)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (15)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (16)$$

由(16),(10)和斯托克斯公式,有

$$\iint \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \iint \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

对于束外缘,有

$$B_\theta \cdot 2\pi R = \frac{4\pi}{c} I$$

即

$$B_\theta = \frac{2I}{cR} \quad (17)$$

式中 R 是束半径, B_θ 与 I 应符合右手螺旋的方向关系。又由

$$(\nabla \times \vec{B})_{\vec{e}_r} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_r^*$$

将(17)式代入, 得

$$\frac{2I}{cR^2} \frac{\dot{R}}{\dot{z}} = \frac{4\pi}{c} j_r$$

即

$$j_r = \frac{I}{2\pi R^2} \frac{\dot{R}}{\dot{z}} \quad (18)$$

由(14), (9)及奥高公式, 将(14)式对长度为 dl 的圆柱块积分,

$$\begin{aligned} \iiint \nabla \cdot \vec{E} d\vec{r} &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2\pi R dl E_r \\ &= 4\pi \rho_e \cdot \pi R^2 dl = 4\pi I dl / \dot{z} \end{aligned}$$

即

$$E_r = \frac{2I}{R\dot{z}} \quad (19)$$

所以若把相对论运动方程应用于束外缘处的粒子, 则成为

$$\frac{d}{dt} (\gamma \dot{R}) - \gamma R \dot{\theta}^2 = \frac{2I\eta}{c^2} \frac{c^2 - \dot{z}^2}{R\dot{z}} \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma R^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma \dot{z}) = \frac{2I\eta}{c^2} \frac{\dot{R}}{R} \quad (22)$$

由(20)可见, 静电力总是大于洛仑兹力, 所以带电粒子束始终是发散的。

由(21)及初始条件 $\dot{\theta}|_{t=0} = 0$ 得

$$\dot{\theta} = 0 \quad (23)$$

对(22)积分, 得

$$\gamma \dot{z} = b \ln R + A \quad (24)$$

式中

$$b = \frac{2I\eta}{c^2}$$

A 为积分常数, 由初始条件 $\dot{z}|_{t=0} = V_0$, $R|_{t=0} = a$ 得

$$A = \gamma_0 V_0 - b \ln a$$

所以(24)式成为

$$\gamma \dot{z} - \gamma_0 V_0 = b \ln \frac{R}{a} \quad (25)$$

由相对论能量方程(能量变化率等于电场力所做的功率)

$$\frac{d}{dt}(m_0 \gamma c^2) = q E_r \dot{R} \quad (26)$$

将(19)式代入,得

$$\dot{\gamma} = b \frac{\dot{R}}{R \dot{z}} \quad (27)$$

对比(22)式

$$\ddot{z} \gamma + \dot{z} \dot{\gamma} = b \frac{\dot{R}}{R}$$

得

$$\ddot{z} = 0$$

所以

$$\dot{z} = \text{const} \cdot = V_0 \quad (28)$$

这正是磁力不作功的表现。综合(25), (28), 有

$$\Delta \gamma = \gamma - \gamma_0 = \frac{b}{V_0} \ln \frac{R}{a} \quad (29)$$

将(23), (28)代入(20)式,得

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{R}) = \frac{bc^2}{V_0 \gamma_0^2} \frac{1}{R} \quad (30)$$

将方程(30)变换为积分方程:

令

$$\xi = \ln \frac{R}{a},$$

则由(29)式得

$$\gamma = \frac{b}{V_0} \xi + \gamma_0 = \gamma_0 (B \xi + 1)$$

式中

$$B = \frac{b}{V_0 \gamma_0}$$

由

$$\gamma^{-1} = \left[1 - \frac{V_0^2 + \dot{R}^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{\gamma_0^2} - \frac{\dot{R}^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

得

$$\dot{R} = c \frac{\sqrt{(B \xi + 1)^2 - 1}}{\gamma_0 (B \xi + 1)}$$

$$d(\dot{R}\gamma) = Bc \left[1 - \frac{1}{(B\xi+1)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} d\xi$$

将这些关系式代入(30)式, 且积分, 就得

$$\frac{ct}{\gamma_0 a} = \int_0^{\ln \frac{R}{a}} \frac{e^\xi d\xi}{\sqrt{1 - (B\xi+1)^{-2}}} \quad (31)$$

式中

$$B = \frac{2Iq}{m_0 c^2 V_0 \gamma_0} \quad (32)$$

若 $\xi \ll 1$, $B\xi \ll 1$, 则(31)成为

$$\frac{ct}{\gamma_0 a} \approx \int_0^{\ln \frac{R}{a}} \frac{d\xi}{\sqrt{2B\xi}} = \sqrt{\frac{2}{B}} \ln \frac{R}{a} \quad (33)$$

即

$$\begin{aligned} R &\approx a \cdot \exp \left\{ \frac{Iq}{m_0 V_0^3 \gamma_0^3 a^2} t^2 \right\} \\ &= a \cdot \exp \left\{ \frac{Iq}{m_0 V_0^3 \gamma_0^3} \left(\frac{L}{a} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (33)'$$

式中 $L = V_0 t$ 为传输距离。上式表明, 开头束半径随传输距离指数增长。

(33)式的误差小于 $\xi_0 + \frac{3}{4} B\xi_0$, 如果(33)式中的积分上限取为 $\xi_0 = 0.01$ ($B \leq 1$ 时)

或 $\xi_0 = 0.01/B$ (当 $B > 1$ 时), 那末(33)式的误差小于2%。

若粒子束传输 L_1 距离后有 $B\xi \gg 1$ 成立, 则用 t_1 和 R_1 记这个距离处的传输时间和束半径, 就得

$$\begin{aligned} \frac{ct}{\gamma_0 a} &\approx \int_0^{\ln \frac{R_1}{a}} \frac{e^\xi d\xi}{\sqrt{1 - (B\xi+1)^{-2}}} + \int_{\ln \frac{R_1}{a}}^{\ln \frac{R}{a}} e^\xi d\xi \\ &= \frac{ct_1}{\gamma_0 a} + \frac{R - R_1}{a} \end{aligned} \quad (34)$$

即

$$R \approx \frac{c}{\gamma_0 V_0} (L - L_1) + R_1 \quad (34)'$$

这时束半径与传输距离成线性关系。

(34)式的误差小于 $(B\xi_1)^{-2}$, 若取 $B\xi_1 = B \ln \frac{R_1}{a} = 10$, 则(34)式的误差小于1%。

综上所述, 可将(31)式表达为

$$L \approx \begin{cases} \frac{\gamma_0 V_0 a}{c} \sqrt{\frac{2}{B} \ln \frac{R}{a}}, & \text{若 } L \leq L_0 \\ L_0 + \frac{\gamma_0 V_0 a}{c} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{e^{\xi'} d\xi'}{\sqrt{1 - (B\xi' + 1)^{-2}}}, & \text{若 } L_0 < L \leq L_1 \\ L_1 + \frac{\gamma_0 V_0}{c} (R - R_1), & \text{若 } L > L_1 \end{cases} \quad (35)$$

式中

$$L_0 = \frac{\gamma_0 V_0 a}{c} \sqrt{\frac{2}{B} \xi_0} \quad \text{是束半径指数增长传输段 (称为第 1 段)}$$

结束时的传输距离;

$$\xi_0 = \begin{cases} 0.01, & \text{若 } B \leq 1, \\ 0.01/B, & \text{若 } B > 1; \end{cases}$$

$$L_1 = L_0 + \frac{\gamma_0 V_0 a}{c} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{e^{\xi'} d\xi'}{\sqrt{1 - (B\xi' + 1)^{-2}}} \quad (36)$$

是束半径线性增长传输段 (第 3 段) 开始时的传输距离;

$$\xi_1 = 10/B;$$

$R_1 = ae^{\xi_1}$ 是传输距离为 L_1 时的束半径。

(35), (36) 式中的积分可用切比雪夫多项式展开法近似求积^[1]:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{e^{\xi'} d\xi'}{\sqrt{1 - (B\xi' + 1)^{-2}}} \approx \frac{\xi_1 - \xi_0}{2} \left[\frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^N b_k T_k(\eta) \right] \quad (37)$$

式中

$$T_k(\eta) = \cos(k \cos^{-1} \eta), \quad -1 \leq \eta \leq 1 \quad (38)$$

是切比雪夫多项式;

$$\eta = \frac{2\xi - (\xi_1 + \xi_0)}{(\xi_1 - \xi_0)} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} b_k &= \frac{a_{k-1} - a_{k+1}}{2k}, \quad k=1, 2, \dots, N+1 \\ a_{N+1} &= a_{N+2} = 0; \\ b_0 &= 2(b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^N b_{N+1}) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\text{而} \quad a_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N f\left(\cos \frac{j\pi}{N}\right) \cdot \cos \frac{kj\pi}{N} \quad (41)$$

这里 f 是被积函数。 \sum^N 表示对 $j=0$ 和 N 的项取半 (即乘以 $\frac{1}{2}$)。

关于不定积分近似表达式 $I_N(\eta) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{N+1} b_k T_k(\eta)$ 值的计算, 可利用递推关系

式:

$$\left. \begin{aligned} C_k &= 2\eta C_{k+1} - C_{k+2} + b_k, \quad k = N+1, N, \dots, 1, 0; \\ C_{N+2} &= C_{N+3} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

依次算出数 C_{N+1}, C_N, \dots, C_0 , 然后便可得积分值为

$$I_N(\eta) = \frac{1}{2} (C_0 - C_2)$$

计 算

本计算中取五种束能量 (1MeV, 10MeV, 0.1GeV, 1GeV, 10GeV)、三种粒子束流强 (对初始束半径为10厘米的情况取10KA, 100KA, 1MA; 对初始束半径为1厘米的情况取1KA, 10KA, 100KA) 分别对电子束和质子束进行了计算。

为便于计算, 各种数据的数值应调整在计算机所能表达的范围内, 为此定义一套“新高斯制单位”: 以 10^{-6} 秒作为时间单位, 以米作为长度单位, 以 10^{-12} 克作为质量单位。

当 $\xi_1 > 16 \cdot 118 = \ln 10^7$, 即第二传输段中束半径扩展到初始半径的1千万倍时, 进一步的计算已无实际意义, 因此就取 $\xi_1 = 16 \cdot 118$, 并且不进行第三传输段的计算。

本计算是在 441B III 型电子数字计算机上完成的。

结 果 和 讨 论

由计算结果看出, 在同样的传输距离和流强下, 质子束发散的范围比相同初能量的电子束大得多。以 1GeV、1千安、初半径为 0.01 米的束为例 (见表 2), 1 公里处电子束几乎没有发散, 而质子束的外半径却增大到 11.0 米, 是电子束情况的九百多倍; 到了一千公里处, 电子束的外半径为 13.4 米, 而质子束的外半径却大到 16.9 公里。这一结果与 [2] 的估算数据是一致的。一般说来, 质子束的发散范围与能量低两个数量级的电子束 (在同样流强下) 的发散范围大致相当。

对同一种粒子束而言, 束能量越大 (传输速度越大), 传输中束的发散范围就越小; 而流强越大 (束外层粒子受到的静电斥力越强), 束的发散范围也就越大。具体情况可参看表 1 和表 2, 表中的数值是由计算结果通过双对数线性插值得到的。

由电子束和质子束的外半径 R 随传输距离 L 的变化曲线看出, 当束半径扩展到初半径的 5 倍以后, 束半径与传输距离的关系在双对数坐标中近似为一直线, 即

$$\lg R = K \lg L + \lg A$$

或

$$R = AL^K \quad (44)$$

式中 K 是这一近似直线的斜率, 它随束能量和流强的不同在 1 和 1.166 之间变化。但

$a=0.1$ 米, $I=10$ 千安的粒子束外半径(米)

表 1

束类型	距离(公里)	1	10	10^2	10^3
	能量(MeV)				
电子束	1	347	3.51×10^3	35.4×10^3	
	10^3	0.1	0.2	2.47	37.3
质子束	1	10.5×10^3	114×10^3		
	10^2	282	3.29×10^3	36.9×10^3	
	10^3	30.4	390	4.52×10^3	86.6×10^3

 $a=0.01$ 米, $I=1$ 千安的粒子束外半径(米)

表 2

束类型	L	1 公里	10	10^2	10^3
	T_0				
电子束	1 MeV	245	2.64×10^3		
	10	12.1	145	1.64×10^3	18.0×10^3
	10^3	0.0115	0.0600	1.02	13.4
质子束	1	3.84×10^3	42.5×10^3		
	10^3	11.0	133	1.53×10^3	16.9×10^3

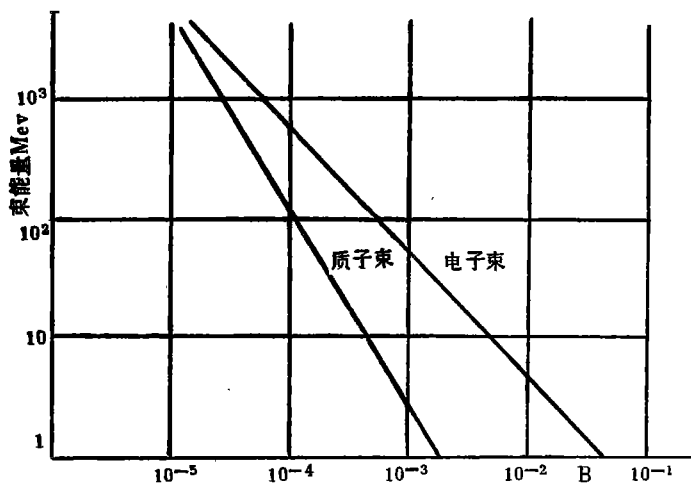


图 1. 无量纲因子B对能量的关系(束电流 1 千安)

是详细分析起来, K 与无量纲因子 B 的关系却比较单调。

$$B = \frac{2Iq}{m_0 c^2 V_0 \gamma_0}$$

与束的流强成正比, 它与束能量的关系画在图 1 上。

在超相对论情况下, $V_0 \approx c$, 而

$$\gamma_0^{-1} = \frac{m_0 c^2}{T_0 + m_0 c^2} \approx \frac{m_0 c^2}{T_0}$$

所以

$$B \approx \frac{2Iq}{c} \frac{1}{T_0} \quad (45)$$

或

$$\lg B = \lg \frac{2Iq}{c} - \lg T_0$$

即在超相对论情况下, B 与束能量 T_0 的关系在双对数坐标中是一斜率为 -1 的直线, 这正是图 1 中 T_0 在 100 MeV 以上的电子束的情况 ($T_0 = 100$ MeV 时电子的 $V_0 \approx 0.99997c$, $T_0/m_0 c^2 \approx 200$)。

在非相对论情况下, $\gamma_0 \approx 1$, $T_0 \approx \frac{1}{2} m_0 V_0^2$, 因而

$$B \approx \sqrt{\frac{2}{m_0}} \frac{Iq}{c^2} T_0^{-1/2} \quad (46)$$

即非相对论情况下, B 与束能量 T_0 的关系在双对数坐标中是一斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线。

这正是图 1 中 T_0 在 100 MeV 以下的质子束的情况 ($T_0 = 100$ MeV 时质子的 $V_0 = 0.427c$, $\gamma_0 = 1.106$)。

将由 $R \sim L$ 变化图线得到的 K 与 B 值对比, 可得到表 3 所示的近似结论。

lg $R \sim \lg L$ 图线的近似斜率 K 与无量纲因子 B 的关系

表 3

束类型	$B > 1$	$1 > B > 10^{-1}$	$10^{-1} > B > 10^{-2}$	$B < 10^{-2}$
电子束	1	1.01	1.12	1.166
质子束	1	1.02	1.13	1.166

由此, 可以得到计算带电粒子束传输中束半径的经验公式

$$R = r \left(\frac{L}{l} \right)^K \quad (47)$$

式中 l 和 r 可用数值计算得到的某一传输距离和束半径值。例如当取 $r = 5.057a$ 时, 则由计算机输出数据表得到的 l 值如表 4 所示 (以初半径 a 为单位)。

束半径 $r = 5.057a$ 时的传输距离 l (以 a 为单位)

表 4

束类型	流强 (KA)	1	10	10^2	10^3
	能量 (MeV)				
电子束	1	$0.4631E2$	$0.1570E2$	*	*
	10	$0.9332E3$	$0.2937E3$	$0.1033E3$	*
	10^2	$0.2768E5$	$0.8741E4$	$0.2751E4$	$0.9741E3$
	10^3	$0.8695E6$	$0.2749E6$	$0.8681E5$	$0.2732E5$
	10^4	$0.2746E8$	$0.8684E7$	$0.2745E7$	$0.8670E6$
质子束	1	4.267	1.345	0.4275	*
	10	$0.2409E2$	7.610	2.394	0.8148
	10^2	$0.1403E3$	$0.4435E2$	$0.1398E2$	4.441
	10^3	$0.1045E4$	$0.3305E3$	$0.1044E3$	$0.3287E2$
	10^4	$0.1703E5$	$0.5385E4$	$0.1702E4$	$0.5377E3$

* 在这些流强和能量的情况下, $B > 1$, 除了开始不大的一段传输距离 L_1 之外。束半径 R 与 L 的关系是线性的, 可按 (34)' 式来计算。并且一般可以略去 L_1 。因而

$$R \approx \frac{c}{\gamma_0 V_0} L + ae^{10/B} \quad (34)''$$

值得注意的是。 $B > 1$ 的情况束发散得非常厉害。所以这种粒子束并没有什么实际的意义。

用 (47) 式计算粒子束在传输中的束半径时, 首先按能量由图 1 查得 B 值, 再乘以用千安作单位的电流强度, 用这样得到的 B 值由表 3 查得斜率 K , 再结合表 4 中的 r 和 l 就可进行计算了。计算结果表明: 在 R 扩展到初半径的 5 倍到 1 万倍的范围內, 按经验公式 (47) 计算的值在小 L 时偏小而在大 L 时一般偏大。这是由于在第二传输段中 $\lg R$ 随 $\lg L$ 增长的斜率是缓慢减小的。当用近似直线代替这一变化规律时, 势必出现这种偏离情况; 同时也由于这一原因, 在上述数值范围之外, (47) 式算得的数值的误差明显增大。另外, 当 B 值接近表 3 中某列 B 的上限或下限时, 误差也要大一些 (如 1 MeV 和 100 MeV 的质子束。具体情况可比较表 5 和表 1、表 2)。

更精确的计算应利用 (35) 式和 (37) 式, 其中切比雪夫多项式的展式系数 b_n 由数值计算得到。

带电粒子束基本上不发散开的传输距离的计算也是有实际意义的。由 (35) 式, 当

$$l = l_0 = \frac{\gamma_0 a}{c} \sqrt{\frac{2}{B} \xi_0}$$

时, 有

$$R(t_0) = ae^{\xi_0} \approx a \quad (48)$$

$$L_0 = \frac{\gamma_0 V_0 a}{c} \sqrt{\frac{2}{B} \xi_0}$$

$$\approx 0.141 \frac{\gamma_0 V_0 a}{cV B} \quad (B < 1) \quad (49)$$

例如对 $a=0.01$ 米, $I=1$ 千安, $T_0=1$ GeV 的束, 算得电子束的 $L_0=357$ 米, 质子束的 $L_0=0.430$ 米; 而若 $T_0=10$ GeV, 则相应的数值分别为 11.3 公里和 7 米。

按 (47) 式计算的束半径 (米)

表 5

	束类型	距离 (公里)	1	10	10 ²	10 ³
		能量 (MeV)				
$I=10$ KA	电子束	1	344	3.52E3	36E3	
		10 ³	0.1	0.2	2.28	33.4
	质子束	1	12E3	162E3		
		10 ²	280	4.11E3	60.2E3	
$a=0.1$ 米	电子束	10 ³	27.0	395	5.79E3	84.8E3
	质子束	1	274	3.62E3		
		10	11.8	173	2.53E3	37.1E3
$I=1$ KA	电子束	10 ³	0.0115	0.0596	0.870	12.8
	质子束	1	6.30E3	92.3E3		
		10 ³	10.32	151	2.22E3	32.5E3
$a=0.01$ 米	电子束					
	质子束					

综上所述, 可将带电粒子束在真空环境中的传输情况作如下的描述: 开始, 由于强大的静电力的排斥, 边缘粒子的径向速度迅速增加。加速度由 (33) 式得到为

$$\ddot{R} = \frac{Bc^2}{\gamma_0^2 a} \left(1 + \frac{Bc^2}{\gamma_0^2 a^2} t^2 \right) e^{\frac{B}{2} \frac{c^2}{\gamma_0^2 a^2} t^2} \quad (50)$$

速度为

$$\dot{R} = \frac{Bc^2}{\gamma_0^2 a} t e^{\frac{B}{2} \frac{c^2}{\gamma_0^2 a^2} t^2} \quad (51)$$

束半径按 (33)' 式增长, 当束半径增大到 $R(t_0) = ae^{\xi_0}$ (约 $1.01a$) 时, 这种增长规律 (第一传输段) 就已基本结束。这时加速度达到

$$\ddot{R}(t_0) \approx \frac{Bc^2}{\gamma_0^2 a},$$

速度达到 $\dot{R}(t_0) \approx \frac{c}{\gamma_0} \sqrt{2B\xi_0}$ 。接着，加速度逐渐减小，速度的增长变慢，经过一个不长的过渡阶段后，加速度近似地按如下规律减小（由(47)式得到）

$$\ddot{R} \approx \frac{K(K-1)rV_0^2}{l^K} \left(\frac{1}{L}\right)^{2-K} \quad (52)$$

速度近似地按如下规律缓慢增长

$$\dot{R} \approx \frac{KrV_0}{l^K} L^{K-1} \quad (53)$$

最后，在近似等式(34)的误差范围内，粒子速度达到光速，加速度为零，径向速度为（由(34)式得）

$$\dot{R} = c/\gamma_0 \quad (54)$$

这就进入了 R 与 L 成线性关系的第三传输段。

本计算作了相当理想化的假设，因而只近似适用于远离地球的外层空间中带电粒子束的传输。

参 考 文 献

- [1] 冯康等编《数值计算方法》§2.6, 国防工业出版社 1978年第一版
 [2] Scientific American, 4, p.38 (1979)

The Calculation of Diffusive Region of Charged Partical Beam in Transmiting

Zhang Shu-fa

Abstract

In this paper the steady transmission of charged partical beam in vacuum was discussed. One calculating method was developed for radial spreading of the beam. According to the results of numerical calculation, the proximate formula of estimating radius of the beam was developed.