Tychonoff 定理的一个新证法

沙 基 昌

提要 从紧性的充要条件为任一网必有丛点出发，本文给出了经典的Tychonoff 定理的一个新证法。

Tychonoff 定理是一般拓扑学中最重要的经典定理之一。该定理的证法颇多，常见的有：基于紧性的充要条件为其子基中的每个复盖有有限子复盖的证明；基于紧性的充要条件为具有有限交性质的闭集族必有非空交的证明。还有利用紧性的充要条件为由开集组成的有限不足够的每个族是不足够的所作的证明。

基于紧性的充要条件为任一网必有丛点，本文给出一个新的证法。

记号 为方便起见，引进几个下面常用的记号。

设$\{(X_a,\mathfrak{T}_a):a\in A\}$是一族拓扑空间，对任意的 $B\subset A$，记相应的乘积空间

$$X\{X_a:a\in B\}=X_B,$$

相应的乘积拓扑记为 $\mathfrak{U}_B$。以后凡提及 X_B 中的拓扑均指乘积拓扑 $\mathfrak{U}_B$.

对于$B=A$，又记 $X_A=X$，$\mathfrak{U}_A=\mathfrak{U}$.

对任意的 $a\in B\subset A$，由X_B到它的 a-坐标X_a上的投影记作 P_a^B，即 $P_a^B:X_B\to X_a$，使对任意的 $t\in X_B$，$P_a^B(t)=t(a)$.

设 $S=\{S_n,n\in D\}$为X中任一网，则对任意的 $B\subset A$，记

$$\{S_n|B,\ n\in D\}=S^B.$$

对于 $B=\{a\}$，又记 $S^{\{a\}}=S(a)$.

本文中其它引用的符号均依 J.L.Kelley 著《一般拓扑学》（汪浩译，国防科学技术大学 1981 年 7 月版）一书。

引理 设$\{(X_a,\mathfrak{T}_a):a\in A\}$是一族拓扑空间，$S=\{S_n,n\in D\}$是$X$中的网，则集族

$$\mathbf{T}=\{t:t\in X_B,\ B\subset A,\ 且\ t\ 是网\ S^B\ 的丛点\}$$

具有有限特性。

证 对任意的$t\in X_B$，是B上的函数，因而是一种特殊的关系，从而是一个集。证明中用到点 s 是网S的丛点的充要条件是存在S的子网T收敛于点 s .

本文 1982 年 3 月 22 日收到

1）先证对任意的 $t\in\mathbf{T}$ 及 t 的有限子集 r，有 $r\in\mathbf{T}$.

因 $t\in\mathbf{T}$，故存在 $B\subset A$，使 $t\in X_B$，且存在 S 的子网 T，使 T^B 收敛于点 t .

因 $r\subset t$，故存在 $C\subset B\subset A$，使 $r=t|C\in X_C$. 因对任意 $a\in C\subset B$，网 $T(a)$ 均收敛于 $t(a)=r(a)$，从而网 T^C 必收敛于 $t|C=r$. 即 $r\in\mathbf{T}$.

2）再设 t 是一集，对于它的任意有限子集 r，有 $r\in\mathbf{T}$，要证 $t\in\mathbf{T}$.

不妨设 t 不是有限集。对任意 $d,e\in t$，且 $d\neq e$，有 $\{d\}\in\mathbf{T}$. 于是 d 必具形式 (a, y)，其中 $a\in A$ 且 $y\in X_a$. 同理 e 必具形式 (b, z)，其中 $b\in A$ 且 $z\in X_b$. 又因 $\{d,e\}\in\mathbf{T}$，知 $a\neq b$. 因此 t 必是定义于 A 的某子集 B 上的函数，且对任意 $a\in B$，$t(a)\in X_a$，即 $t\in X_B$.

考虑 X_B 中点 t 的任一定义局部基成员

$$U=\bigcap\{P_a^{B-1}[U_a], a\in C\},$$

其中 C 是 B 的有限子集，且对任一 $a\in C$，U_a 是 $t(a)$ 的 $\mathbf{I}_a$—邻域。因 $t|C\in\mathbf{T}$ 从而它是网 S^C 的丛点，于是网 S^C 必常返至 X_C 中点 $t|C$ 的邻域

$$V=\bigcap\{P_a^{C-1}[U_a], a\in C\}$$

但由 $S_n|C\in V$，可导出 $S_n|B\in U$，从而网 S^B 必常返至 t 的邻域 U，即 t 是网 S^B 的丛点，故 $t\in\mathbf{T}$.

由1)，2)所证，知 $\mathbf{T}$ 具有有限特性。▮

Tychonoff **定理**　设 $\{(X_a,\mathbf{I}_a); a\in A\}$ 为一族紧拓扑空间，则其乘积拓扑空间 $(X, \mathbf{U})$ 是紧的。

证　拓扑空间是紧的，其充要条件为该空间中任一网必有丛点，或即该空间中任一网必有收敛子网。因此只要证明 X 中的任一网 S 必有丛点。

作集族

$$\mathbf{T}=\{t; t\in X_B,\ B\subset A \text{ 且 } t \text{ 是 } S^B \text{ 的丛点}\}.$$

由引理，$\mathbf{T}$ 具有有限特性，故依 Tukey 引理，$\mathbf{T}$ 中必有极大成员 s . 今只要证 $s\in X$，即 s 的定义域是 A，便知 s 是网 $S^A=S$ 的丛点，Tychonoff 定理便可得证。

设若不然，则存在 $B\subset A$，$B\neq A$，使 $s\in X_B$ 且 s 是网 S^B 的丛点。于是存在 S 的子网 T，使 T^B 收敛于 s .

因 $B\subset A$，$B\neq A$，故存在 $a\in A\sim B$. 因 $(X_a,\mathbf{I}_a)$ 是紧空间，故必存在 T 的子网，从而也是 S 的子网 R，使 $R(a)$ 收敛于 X_a 中某点 y .

令 $t=s\cup\{(a,y)\}$，$C=B\cup\{a\}$，则 $t\in X_C$，$C\subset A$，且显然对任意 $b\in C$，网 $R(b)$ 收敛于 $t(b)$，从而网 R^C 收敛于 t ，即 $t\in\mathbf{T}$.

今 $t\supset s$，$t\neq s$，这与 s 为 $\mathbf{T}$ 中极大元矛盾，故有 $s\in X$. ▮

参 考 文 献

J.L.Kelley，一般拓扑学，汪浩译，1981，国防科学技术大学。

A New Proof of Tychonoff Theorem

Sha Ji—chang

Abstract

On the basis of the necessary and sufficient condition of compactness that any net has a cluster point, this article has given a naw proof of classical Tychonoff theorem.