

关于计算机作图中的两个问题

罗 伯 鹏

提 要 本文讨论了圆锥曲线参数表达式的一种普遍形式,并讨论了计算机根据它绘圆锥曲线的问题,还讨论了三维子图形数据的标准化方法和调用三维子图形时的坐标变换问题。

一、关于圆锥曲线的计算机作图

让计算机产生平面曲线图形时,为了减少积累误差节省计算时间,采用了坐标变换与参数表达式两种技术。坐标变换的要点是^[1]:(i)选定一个与图形要素相联系、具有对称性质(如:以对称中心为原点,以对称轴为坐标轴)的计算系,这也称为当地坐标系。(ii)对原来在绘图坐标系中给定的初始条件(如曲线上的始终点)施行 \mathcal{J} 变换:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -h\cos\alpha - k\sin\alpha & h\sin\alpha - k\cos\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

被变换的初始条件 (x_0, y_0) ,应写成齐次坐标 $(x_0, y_0, 1)$ 的形式。 \mathcal{J} 中, (h, k) 是计算系原点在绘图坐标系中的坐标, α 是绘图系的 x 轴按逆时针方向转到计算系的 x' 轴所转过的角度。 \mathcal{J} 变换相当于绘图坐标系的原点先移至 (h, k) 而后旋转 α 角。(iii)在计算系中产生数据点 $(x'_i, y'_i) i=1, 2, 3, \dots, n$,而后对齐次坐标 $(x'_i, y'_i, 1)$ 施行 \mathcal{J}^{-1} 变换:

$$\mathcal{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ h & k & 1 \end{pmatrix}$$

\mathcal{J}^{-1} 变换相当于计算系的 x' 轴先顺时针转 α 角,而后再移回至老原点。经 \mathcal{J}^{-1} 变换后所得到的 (x_i, y_i) 才是绘图所需数据。

对于圆锥曲线,在当地坐标系中有很简单的计算公式。但为了避免多值问题与垂直切线问题所造成的麻烦,在计算机作图产生数据点时常采用参数表达式。^[2]

就圆来说,熟知的参数表达式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= R\cos\theta \\ y &= R\sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

这是一个广泛使用的式子。圆的另一个不大常用的参数表达式是:^[1]

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{R} &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{y}{R} &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

1968年, Coons 利用对基抛物线 $(x \ y \ 1) = (t^2 \ t \ 1)$ 进行透视变换得到圆的另一个参数表达式^[3]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{R} &= \frac{1-2t}{1-2t+2t^2} \\ \frac{y}{R} &= \frac{2t-2t^2}{1-2t+2t^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

但是如在(3)式中, 令 $t = \frac{1}{2}(1-\tau)$, 则可将(3)式化成和(2)式相同的形式。

事实上(2)式是可以推广的, 如令 $k > 0$ 为任一实数, 则

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{R} &= \frac{1-kt^2}{1+kt^2} \\ \frac{y}{R} &= \frac{2\sqrt{k}t}{1+kt^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

将也是圆的一个参数方程, 因为(4)式满足 $x^2 + y^2 = R^2$, 上述结果还可以进一步推广到有心圆锥曲线的情形。如令:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{1-ckt^2}{1+ckt^2} \\ \frac{y}{b} &= \frac{2\sqrt{k}t}{1+ckt^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

则当取 $C = +1$ 时(5)式代表椭圆, 而当取 $C = -1$ 时(5)式便代表双曲线, 这是因为(5)式满足

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + C \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

显然, (5)式也包含了圆作为特殊情况。

当 t 由 0 增至 $\frac{1}{\sqrt{k}}$, 曲线便扫过了第一个象限, 但要扫过第二象限, t 值必须由

$\frac{1}{\sqrt{k}}$ 增至 ∞ 。在实际应用时只要产生曲线第一个 $\frac{1}{4}$ 枝上的数据点就够了, 其余枝上的点完全可以通过反射变换而得到。

显然, 取 $k > 1$ 是不恰当的。例如若取 $k = 100$, 则 t 由 0 变到 0.1 便扫完了第一个 $\frac{1}{4}$ 枝, 以 t 的这样小的值代入(5)式将造成很大的计算误差。

利用(5)式来产生有心圆锥曲线可以有如下的优越性:

(i) 可以排一个产生圆、椭圆、双曲线的统一的程序, 只是按 $C = +1$ 或 -1 及

$a=b$ 而采用不同的入口。

(ii) 曲线上需要产生的数据点的数目, 随着曲线尺寸的不同而应有所改变。采用(5)式时这一变化可以由自动改变“可调参数” k 的值而得到。例如, 画圆时, 给定半径为 R^* , 某一临界半径为 R_0 (例如, 在显示屏情形, 取 $R_0=50$ 光栅单位), 若 $R^* \leq R_0$, 则取 $k=1$; 若 $R^* > R_0$, 则取 $k = \left(\frac{R_0}{R^*}\right)^2$ 。画椭圆或双曲线时则可按 a 考虑。(t均按固定步长步进)。

(iii) 对于椭圆而言若采用下述参数式

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \theta \\ y &= b \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

则数据点在曲线上按等角距分布, 这就使得在曲率变化较大之处数据点显得相对稀少。而采用(5)式则会有所改善。但对于画圆而言则用(1)式得到等角距分布的点是有益的。

(iv) 使用(5)式较之用三角函数的近似式, 在运算速度和精度方面都有可能得到改善。例如(5)式是一个精确公式, 不存在截断误差。

最后顺便指出在齐次坐标形式下(5)式可写成

$$(Wx \ Wy \ W) = (t^2 \ t \ 1) \begin{pmatrix} -ck & 0 & ck \\ 0 & 2\sqrt{k} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因而也可看成是抛物线经由变换阵为

$$A' = \begin{pmatrix} -ck & 0 & ck \\ 0 & 2\sqrt{k} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{cases} +1 & \text{椭圆} \\ -1 & \text{双曲线} \end{cases}$$

的透视变换再经由比例变换 $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 得到的。Coons 原来是经过计算而得到透视变换

阵 A 的:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

二、关于三维子图形数据的标准化及子图形调用

在机械、化工等许多部门的计算机辅助设计中, 需要经常使用三维子图形。子图形构成后在调用时不能像二维子图形仅仅规定一个定位点就够了, 还必须规定其方向, 亦即需要规定一个定位平面。Besant 在[4]中指出了在构成三维子图形时应规定三个参考点, 而在调用时要规定三个定位点。这实际上是以三个参考点作为基准将子图形数据予以标准化, 亦即对三维坐标进行平移和旋转变换。在调用时刻是令参考点配合定位点, 也要进行类似的坐标变换。现在拟对这一问题进行较详细的讨论, 首先考虑将三个参考

点构成坐标系后引起的坐标变化。

将对象的三维数据送入计算机可以有很多方法。其中之一是利用光笔在显示屏上标定。(显示屏划分为 $x-y$ 和 $y-z$ 两个区域。光笔需同时在两个区域中标定以送入对象点在 $x-y$ 和 $y-z$ 平面上的投影值) 不论用什么方法送入的三维坐标均需是(或化为)三维内部坐标。令 (ξ_i, η_i, ζ_i) 表示第 i 点的内部坐标。令三个参考点 p_0, p_1, p_2 的坐标分别为 $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0); (\xi_1, \eta_1, \zeta_1); (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ 则由此三点所构成的参考平面, 其法线方向余弦为:

$$n_1 = \frac{a}{D}; \quad n_2 = \frac{b}{D}; \quad n_3 = \frac{c}{D} \quad (7)$$

式中,

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (8)$$

$$a = \begin{vmatrix} \eta_1 - \eta_0 & \zeta_1 - \zeta_0 \\ \eta_2 - \eta_0 & \zeta_2 - \zeta_0 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} \xi_1 - \xi_0 & \zeta_1 - \zeta_0 \\ \xi_2 - \xi_0 & \zeta_2 - \zeta_0 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} \xi_1 - \xi_0 & \eta_1 - \eta_0 \\ \xi_2 - \xi_0 & \eta_2 - \eta_0 \end{vmatrix} \quad (9)$$

令过 p_0 的 $\tilde{\zeta}$ 为沿此法线的轴, $\tilde{\xi}\tilde{\eta}$ 平面为 p_0, p_1, p_2 所在的平面。过 p_0 作 $p_0\xi\eta\zeta$ 平行于原来的内部坐标系(或: 将老坐标系平移到 p_0)、 $\tilde{\zeta}$ 轴在 $\eta\zeta$ 平面上的投影为 q , $\angle qp_0\tilde{\zeta} = \beta$, $\angle \zeta p_0 q = \alpha$ 令 $\tilde{\xi}$ 轴为 $\tilde{\xi}\tilde{\eta}$ 平面与 $p_0q\tilde{\zeta}$ 平面的交线, 由图易知 $\angle \xi p_0 \tilde{\xi} = \beta$ $\angle \eta p_0 \tilde{\eta} = \alpha$, 由图有:

$$\vec{n} = \sin\beta \vec{e}_\xi - \sin\alpha \cos\beta \vec{e}_\eta + \cos\alpha \cos\beta \vec{e}_\zeta$$

但又有

$$\vec{n} = n_1 \vec{e}_\xi + n_2 \vec{e}_\eta + n_3 \vec{e}_\zeta$$

故得

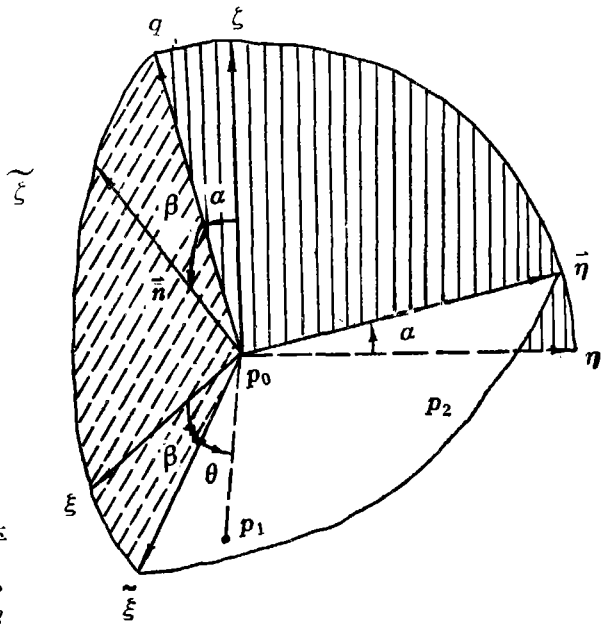
$$\left. \begin{aligned} \sin\beta &= n_1 \\ \cos\beta &= \sqrt{n_2^2 + n_3^2} = V \\ \sin\alpha &= -\frac{n_2}{V} \\ \cos\alpha &= \frac{n_3}{V} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

α, β 为确定参考平面 ($p_0 p_1 p_2$ 平面) 方位的欧拉角。如以(7)、(8)、(9)代入(10)式, 则得到了 α, β 正、余弦用三个参考点的原始坐标表出的公式。因此在规定了三个参考点时、立即可算出(10)式的四个值。

容易看出, 从原始的内部坐标系经过下述一些变动便可以到达与 $p_0 \tilde{\xi} \tilde{\eta} \tilde{\zeta}$ 完全重合。

原始内部坐标系 $\xrightarrow{\text{(原点平移到 } p_0)}$ $p_0 \xi \eta \zeta \xrightarrow{\text{(绕 } \xi \text{ 轴转 } \alpha \text{ 角)}}$ $p_0 \tilde{\xi} \eta \zeta \xrightarrow{\text{(绕 } \eta \text{ 转 } \beta \text{ 角)}}$ $p_0 \tilde{\xi} \tilde{\eta} \tilde{\zeta}$

现在, 如果以 $p_0 \tilde{\xi} \tilde{\eta} \tilde{\zeta}$ 作为新坐标系, 则原来三维对象上任一点 $p_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 在此



新坐标系中的坐标为 $(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, \tilde{\zeta}_i)$ 而:

$$(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, \tilde{\zeta}_i, 1) = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i, 1)TR' \quad (11)$$

式中

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\xi_0 & -\eta_0 & -\zeta_0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$R' = R_a R_\beta \quad R_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

如再进一步以 P_0P_1 作为 ξ' 轴, $\tilde{\zeta}$ 作为 ζ' 轴, 则 P_i 在 $\xi' \eta' \zeta'$ 中的坐标变为 $(\xi'_i, \eta'_i, \zeta'_i)$:

$$(\xi'_i, \eta'_i, \zeta'_i, 1) = (\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, \tilde{\zeta}_i, 1)R_\theta = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i, 1)TR'R_\theta \quad (14)$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

θ 为 P_0P_1 与 $\tilde{\xi}$ 轴的夹角

$$\cos\theta = \frac{\tilde{\xi}_1}{d}; \quad \sin\theta = \frac{\tilde{\eta}_1}{d}; \quad d = \sqrt{\tilde{\xi}_1^2 + \tilde{\eta}_1^2} \quad (16)$$

式中, $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \tilde{\zeta}_1, 1) = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1, 1)TR'$ 是 P_1 点经受 TR' 变换后得到的。显然应有 $\tilde{\zeta}_1 = 0$

标准化的三維子图形数据, 就是以三个参考点 $P_0 P_1 P_2$ 之一的 P_0 作为原点, 以 $P_0 P_1 P_2$ 所在平面作为 $\xi' \eta'$ 平面, 以 $P_0 P_1$ 连线作为 ξ' 轴时各三維数据点所取的新值。

(坐标系 $P_0 \xi' \eta' \zeta'$ 称为参考点坐标系。) 在实际处理时应约定; 用户指定的第一个参考点相当于 P_0 , 指定的第二参考点相当于 P_1 。根据以上讨论, 可将三維子图形数据进行标准化的步骤归纳如下:

(i) 求矩阵 TR' —— 这是根据参考点的内部坐标, 按(7)、(8)、(9)、(10)、(12)、(13)诸式求出的。

(ii) 求 R_θ —— 先用 $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \tilde{\zeta}_1, 1) = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1, 1)TR'$ 求出 P_1 点的新坐标 $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1)$ 。再用(16)、(15)式求 R_θ 。

(iii) 最后按(14)式算出图形上各点的标准化数据 $(\xi'_i, \eta'_i, \zeta'_i)$ 。

以上的讨论说明了：若子图形的原始数据是由基础坐标系（即内部坐标系） $0\xi\eta\xi$ 度量的，而子图形又是摆在任意位置，则需要经过上述一系列变换才能化成标准化数据；也就是化成在参考点坐标系 $P_0\xi'\eta'\xi'$ 度量的数据。显然若原始数据一开始就是在 $P_0\xi'\eta'\xi'$ 中度量，并且注意使两个坐标系具有相同比例尺，则以上的变换运算就全部是多余的了。由此便得到了取得三维子图形标准化数据的准则：

(i) 先在图形上取定三个参考点 P_0, P_1, P_2 。（应尽量取对称中心或取对称轴与对称面上的点。）

(ii) 建立与子图形固联的参考点坐标系 $P_0\xi'\eta'\xi'$ （注意使之具有与基础坐标系 $0\xi\eta\xi$ 相同的比例尺）。以此为基准所度量的子图形上各点的坐标，便是所需的标准化数据。（坐标系 $P_0\xi'\eta'\xi'$ 也可称为子图形定义空间。）

这样取得的数据不再需要进行变换。但在调用三维子图形时类似于前面所述的变换却是不可避免的，而且还要复杂些。现将有关步骤陈述如下：

(1) 设参考点 P_0, P_1, P_2 要嵌入的定位点分别为：

$$Q_0(\xi_0^0, \eta_0^0, \xi_0^0); Q_1(\xi_1^0, \eta_1^0, \xi_1^0); Q_2(\xi_2^0, \eta_2^0, \xi_2^0).$$

按(7)及(10)式可算出此定位平面的法线余弦 $(n_1^0 n_2^0 n_3^0)$ 及其欧拉角 α^0, β^0 ， $(Q_0\xi^0\eta^0\xi^0)$ 可称为定位点坐标系： ξ^0 含 Q_1 ， $\xi^0\eta^0$ 含 Q_2 。

(2) 计算 θ^0 ；这是 $0\xi\eta\xi$ 平移到 Q_0 后再旋转 α^0, β^0 到达 $Q_0\tilde{\xi}\tilde{\eta}\tilde{\xi}$ 时（参看前图） $\tilde{\xi}$ 轴与 Q_0Q_1 的夹角，即：

$$\cos\theta^0 = \frac{\tilde{\xi}_1^0}{\sqrt{\tilde{\xi}_1^0{}^2 + \tilde{\eta}_1^0{}^2}}, \quad \sin\theta^0 = \frac{\tilde{\eta}_1^0}{\sqrt{\tilde{\xi}_1^0{}^2 + \tilde{\eta}_1^0{}^2}}$$

而

$$(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\eta}_1^0, \tilde{\xi}_1^0, 1) = (\xi_1^0, \eta_1^0, \xi_1^0, 1) T^0 R^{10}$$

T^0 是以 $(\xi_0^0, \eta_0^0, \xi_0^0)$ 代入(12)式所得的方阵； R^{10} 是 α^0, β^0 代入(13)式所得的方阵。

(3) 在调用子图形时，对子图形的标准化数据必须当作是在 $0\xi\eta\xi$ 中度量的，故在调用前应把子图形看成处于标准位置，这相当于 $P_0\xi'\eta'\xi'$ 与 $0\xi\eta\xi$ 重合。将此子图形调到 Q_0, Q_1, Q_2 就是要移动和旋转 $P_0\xi'\eta'\xi'$ 使之与 $Q_0\xi^0\eta^0\xi^0$ 重合。于是，子图形在 $0\xi\eta\xi$ 中，任一点的坐标由调用前的标准值 $(\xi'_i, \eta'_i, \xi'_i)$ 变成 $(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, \tilde{\xi}_i)$ 。它们的关系为：

$$(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, \tilde{\xi}_i, 1) = (\xi'_i, \eta'_i, \xi'_i, 1) \bar{T}^0 R_{(-\alpha^0)} R_{(-\beta^0)} R_{(-\theta^0)} \quad (17)$$

式中， $\bar{T}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \xi_0^0 & \eta_0^0 & \xi_0^0 & 1 \end{pmatrix}$ 是平移变换矩阵。注意这里是图形本身平移引起点坐标变化

的变换矩阵，而(12)式中的 T 则是表明坐标系平移引起的变换阵，故有正负号差异。(17)式中的旋转矩阵 $R_{(-\alpha^0)}, R_{(-\beta^0)}, R_{(-\theta^0)}$ 是分别以 $-\alpha^0, -\beta^0, -\theta^0$ 代入(13)和(15)式中的 $R_\alpha, R_\beta, R_\theta$ 而得到的矩阵。由于这里的每次转动都是从一个“不动”的坐标系来观察图形上点坐标变化的，故需代入负角。例如（参看前图）第一次是从 $Q_0\xi\eta\xi$ （平行于 $0\xi\eta\xi$ ）观察到 $Q_0\xi'\eta'\xi'$ 绕 ξ 轴转 α^0 角，故坐标要经受 $R_{(-\alpha^0)}$ 的变换，第二次从 $Q_0\xi'\eta'\xi'$ 观察到固联于图形的 $Q_0\xi'\eta'\xi'$ 绕 η 转了 β^0 角，故其坐标相对于

$Q_0 \xi \eta q$ 又要再经受 $R(-\beta_0)$ 的变化, 等等。

(4) 经上述变换后, $P_0 \xi' \eta' \zeta'$ 已与 $Q_0 \xi^0 \eta^0 \zeta^0$ 重合, 但 P_1 与 Q_1 还不一定重合。为使 P_1 与 Q_1 重合还需作比例变换。即认为每一点 P_i 到 P_0 的距离都同等放大 λ 倍

$$\lambda = \frac{Q_0 Q_1}{P_0 P_1}$$

于是最后得:

$$(\bar{\xi}_i^0, \bar{\eta}_i^0, \bar{\zeta}_i^0) = \lambda (\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i) \quad (18)$$

(坐标值上加短横, 表示这些值都是从 $0 \xi \eta \zeta$ 中度量的, 以“0”作为上标的坐标值也是一样)

显然, 用户在规定定位点时, 必须注意使 $\angle Q_2 Q_0 Q_1 = \angle P_2 P_0 P_1$ 以及使 $\frac{Q_0 Q_2}{P_0 P_2} = \frac{Q_0 Q_1}{P_0 P_1}$ 。否则, (18) 式所得结果并不能使 P_2 与 Q_2 重合; 或为了使 P_2 与 Q_2 重合就还要引进新的变换从而使子图形变形。

从以上讨论看出, 调用三维子图形时的要点是先算出 θ^0 角, 而后让图形本身(不可能也不应当是坐标系)从标准位置先平移后旋转, 即是使 $P_0 \xi' \eta' \zeta'$ 从重合于 $0 \xi \eta \zeta$ 到重合于 $Q_0 \xi^0 \eta^0 \zeta^0$ 。但在实际计算机作图时, 子图形平移仅表现为定位点的选定, 故在矩阵的级联运算中, 可以不考虑平移矩阵。

(5) (18) 式的结果, 只不过是使此图形有正确定位、取向和比例而已。要使此子图形正确显示或绘出, 尚需经受透视变换, 消隐处理, 剪取并化为屏坐标, 但这已是三维显示的常规处理了。

[附记] 本文第二部份虽只是坐标变换的应用, 但由于笔者学识浅陋, 所得结果和结论尚未见之于文献, 且暂时亦无实践检验, 因而难免会有错漏之处。如蒙指正, 至深铭感。

参 考 文 献

- [1] S.H. Chasen, "Geometric principles and procedures for Computer Graphic Applications" 1978
- [2] I. D. Faux, et al, "Computational Geometry for Design and Manufacture" 1979
- [3] S.A. Coons, et al "Geometry for construction and display" 1968
- [4] C.B. Besant, "Computer Aided Design and Manufacture" 1980
- [5] W.M. Newman, "Principles of interactive computer Graphics" 1973

Two Problems in the Computer Graphics

Luo Bo-peng

Abstract

This paper discussed the general form of the parametric representations of the cone Curve, and also discussed problem to graph the Cone curve by computer in accordance with these parametric representations. Moreover, this paper still more discussed the normalized method of the three-dimensional sub-graphics data and problem of the coordinates transform during the calling of these sub-graphics.