

不对称再入弹头滚动共振特性的研究

程 国 采

提 要 本文研究不对称再入弹头滚动共振特性。将运动方程建立在不随弹头慢旋的坐标系上, 利用线性化方法进行近似研究。研究了不对称弹头由于慢旋对滚动共振的影响, 给出避免发生滚动共振的慢旋角速度公式, 并研究了当慢旋角速度较小时, 慢旋引起的可能发生持续滚动共振区域的变化。

一、引 言

在“旋转弹头动态特性的研究”一文中^[6], 叙述了慢旋再入弹头的运动特性, 而对慢旋不对称弹头的滚动共振特性, 则未作深入研究, 本文研究再入时不对称弹头慢旋对滚动共振的影响。

我们知道, 由于制造和装配误差, 特别是由于在再入过程中弹头的烧蚀, 弹头不对称是不可避免的, 由于不对称因素的影响, 会引起滚动共振现象, 并使弹的落点散布增大。

为了减小落点散布和减小攻角, 往往使远程导弹的弹头绕其纵轴旋转, 旋转弹头所要解决的两个主要问题是起旋高度和旋转速度的确定。本文研究旋转弹头在再入过程中, 由于各种不对称因素的影响所引起的动态过程及选择旋转角速度的意见。

关于再入弹头动态特性的文章很多, 特别是 L. S. Glover 和 J. C. Hagen 写的“*The motion of ballistic missiles*”详细研究了再入弹头的动态特性。

但是由于没有考虑慢旋的影响(严格的说是没有将慢旋的影响从总影响中分离出来, 而仅把它作为运动方程起始条件来考虑)。对于旋转在动态过程中的作用, 没有明确地、准确地加以研究。

下面我们着重研究在各种不对称因素影响下, 旋转所起的作用, 将其结果与不旋转弹头进行比较, 以了解慢旋角速度的影响。

二、弹头质量和气动力不对称时, 旋转弹头再入运动方程的推导

弹头旋转角速度都是在自由飞行段加上去的, 通常为常数, 以 $\dot{\gamma}_0$ 表示之。如果我们把 $\dot{\gamma}_0$ 看成是弹体绕纵轴转动角速度 $\omega_{x_1}^*$ 的初值的一部分, 我们完全可以用同样形式

的运动方程来描述旋转弹头或不旋转弹头再入的运动特性和动态特性, 这样做的缺点是:

(1) 由于坐标系随弹头旋转, 使所定义的迎角 α^* 和侧滑角 β^* 随 $\dot{\gamma}_0$ 作周期变化, 不便于研究和数值计算, 并给线性化带来困难。

(2) 不能把旋转角速度 $\dot{\gamma}_0$ 的影响分离出来, 很难看出 $\dot{\gamma}_0$ 的作用。

为此我们选择不随 $\dot{\gamma}_0$ 旋转的弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 来建立绕质心转动方程。它和随弹头一起旋转的弹体坐标系 $ox_1^*y_1^*z_1^*$ 之间的关系如图 1 所示。

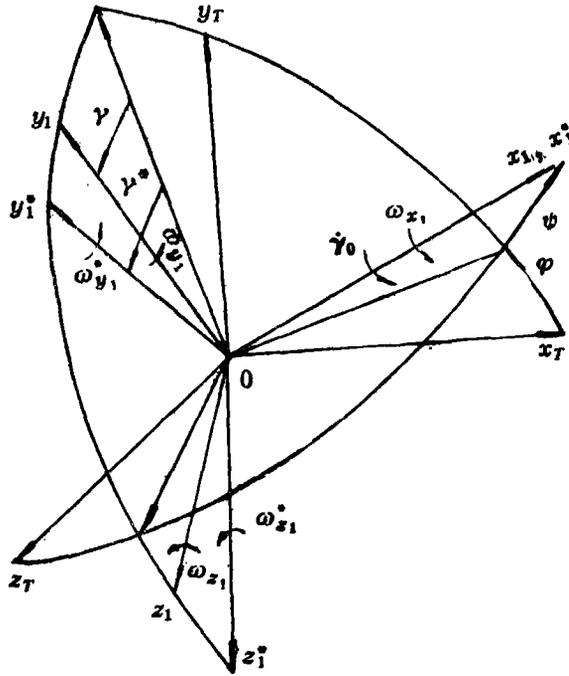


图 1

$ox_1y_1z_1$ 对再入瞬间惯性坐标系 $ox_Ty_Tz_T$ 的关系由三个姿态角 φ, ψ, γ 来确定。

$$\begin{cases} \omega_{x_1} = \dot{\gamma} - \dot{\varphi} \sin \psi \\ \omega_{y_1} = \dot{\varphi} \cos \psi \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \gamma \\ \omega_{z_1} = \dot{\varphi} \cos \psi \cos \gamma - \dot{\psi} \sin \gamma \end{cases} \quad (1)$$

而 $ox_1^*y_1^*z_1^*$ 对 $ox_Ty_Tz_T$ 的关系由三个姿态角 φ, ψ, γ^* 来确定。

$$\begin{cases} \omega_{x_1}^* = \dot{\gamma}_0^* - \dot{\varphi} \sin \psi \\ \omega_{y_1}^* = \dot{\varphi} \cos \psi \sin \gamma^* + \dot{\psi} \cos \gamma^* \\ \omega_{z_1}^* = \dot{\varphi} \cos \psi \cos \gamma^* - \dot{\psi} \sin \gamma^* \end{cases} \quad (2)$$

可以看出两者之差, 只在于滚动角不同, 且知

$$\omega_{x_1}^* = \omega_{x_1} + \dot{\gamma}_0 \quad (3)$$

为了建立运动方程, 首先研究各不对称因素。弹头质量和气动力不对称是由于设计、制造公差或者由于在再入过程中弹头燃蚀、变形引起的, 综合起来, 有以下不对称因素:

(1) 质量不对称, 包含两个方面:

- i) 转动惯量 $I_y \neq I_z, I_{xy} \neq 0, I_{xz} \neq 0, I_{yz} \neq 0$.
- ii) 重心偏移 δx_g .

(2) 气动力不对称, 包含三个方面:

- i) 产生零升力系数 C_{y_0} , 零侧力系数 C_{z_0} .
- ii) 产生零俯仰力矩 M_{z_0} , 零偏航力矩 M_{y_0} , 零滚动力矩 M_{x_0} .
- iii) 压心偏移 δx_T .

其压心偏移和重心偏移所产生的影响相同, 可将两者合起来, 以等效偏移量 C 表示之。如图 2 所示。图中 $ox_1y_1z_1$ 为不随弹头慢旋的体坐标系, $ox_vy_vz_v$ 为速度坐标系, O 为

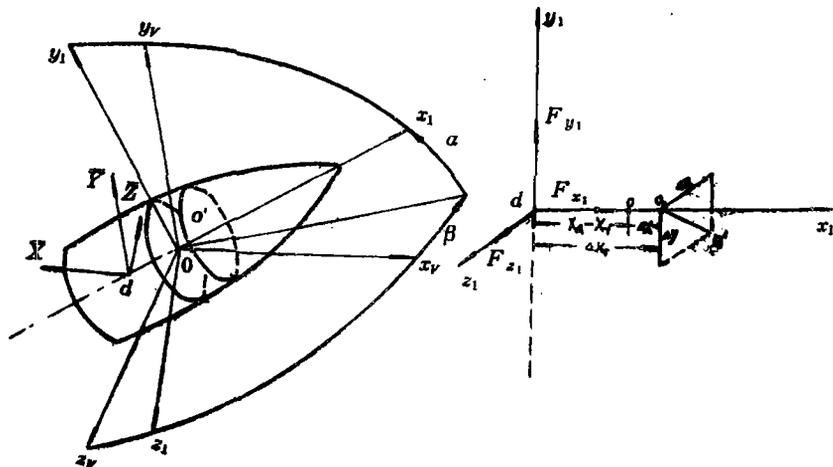


图 2

对称弹头的重心。 O' 为不对称弹头等效重心 (包含压心偏移量), $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 为阻力、升力和侧力, $F_{x_1}, F_{y_1}, F_{z_1}$ 为气动力在 $ox_1y_1z_1$ 上的投影, 则

$$\begin{cases} F_{x_1} = -X \cos \alpha \cos \beta + Y \sin \alpha + Z \cos \alpha \sin \beta \\ F_{y_1} = X \sin \alpha \cos \beta + Y \cos \alpha - Z \sin \alpha \sin \beta \\ F_{z_1} = -X \sin \beta - Z \cos \beta \end{cases} \quad (4)$$

如果对 O' 点取矩, 则由于等效重心偏移引起的附加力矩在 $ox_1y_1z_1$ 各轴上的分量为

$$\begin{cases} \Delta M_{x_1} = -F_{z_1} \Delta y + F_{y_1} \Delta z \\ \Delta M_{y_1} = -F_{x_1} \Delta z + F_{z_1} \Delta x \\ \Delta M_{z_1} = F_{x_1} \Delta y - F_{y_1} \Delta x \end{cases} \quad (5)$$

因为质心 O' 随弹头旋转, 故 $\Delta y, \Delta z$ 是随时间变化的。

$$\begin{cases} \Delta y = -c_z \sin \dot{\gamma}_0 t \\ \Delta z = c_z \cos \dot{\gamma}_0 t \end{cases} \quad (\text{设初相位对 } oz^* \text{ 轴为零}) \quad (6)$$

现在对 $ox_1y_1z_1$ 来建立绕质心 O' 的转动方程, 此时动量矩

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x_1} + \dot{\gamma}_0 \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

则得绕质心转动方程如下:

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_{x_1}^* = M_{x_1} - (I_z - I_y) \omega_{y_1} \omega_{z_1} + I_{xy} (\dot{\omega}_{y_1} - \omega_{z_1} \omega_{x_1}^*) + I_{xz} (\dot{\omega}_{z_1} + \omega_{y_1} \omega_{x_1}^*) + I_{yz} (\omega_{y_1}^2 - \omega_{z_1}^2) \\ I_y \dot{\omega}_{y_1} = M_{y_1} - (I_z - I_x) \omega_{x_1} \omega_{z_1} + I_{xy} (\dot{\omega}_{x_1}^* + \omega_{y_1} \omega_{z_1}) + I_{xz} (\omega_{z_1}^2 - \omega_{x_1}^2) \\ \quad + I_{yz} (\dot{\omega}_{z_1} - \omega_{x_1}^* \omega_{y_1}) + (I_{xz} \dot{\omega}_{x_1}^* + I_{yz} \omega_{y_1} - I_z \omega_{z_1}) \dot{\gamma}_0 \\ I_z \dot{\omega}_{z_1} = M_{z_1} - (I_y - I_x) \omega_{x_1} \omega_{y_1} + I_{xy} (\omega_{x_1}^{*2} - \omega_{y_1}^2) + I_{xz} (\dot{\omega}_{x_1}^* - \omega_{y_1} \omega_{z_1}) \\ \quad + I_{yz} (\dot{\omega}_{y_1} + \omega_{x_1}^* \omega_{z_1}) - (I_{xy} \dot{\omega}_{x_1}^* - I_y \omega_{y_1} + I_{yz} \omega_{z_1}) \dot{\gamma}_0 \end{cases} \quad (8)$$

式中

$$\begin{cases} M_{x_1} = M_{x_0} + M_{x_1}^{\omega_{x_1}} \omega_{x_1}^* - F_{z_1} \Delta y + F_{y_1} \Delta z \\ M_{y_1} = M_{y_0} + M_{y_1}^{\omega_{y_1}} \omega_{y_1} - F_{x_1} \Delta z + F_{z_1} \Delta x_T \\ M_{z_1} = M_{z_0} + M_{z_1}^{\omega_{z_1}} \omega_{z_1} + F_{x_1} \Delta y - F_{y_1} \Delta x_T \end{cases} \quad (9)$$

如果设速度坐标系 $ox_T y_T z_T$ 对再入瞬间惯性坐标系 $ox_1 y_1 z_1$ 的三个角为 $\theta_T, \sigma_T, \gamma_T$, 则角速度之间的关系如下:

$$\begin{pmatrix} \omega_{x_1}^* \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha, -\cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta, \cos \alpha, \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta, 0, \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_T - \dot{\theta}_T \sin \sigma_T \\ \dot{\theta}_T \cos \sigma_T \sin \gamma_T + \dot{\sigma}_T \cos \gamma_T \\ \dot{\theta}_T \cos \sigma_T \cos \gamma_T - \dot{\sigma}_T \sin \gamma_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\beta} \sin \alpha + \dot{\gamma}_0 \\ \dot{\beta} \cos \alpha \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \quad (10)$$

质心运动方程可参看文献[2], 以上就是建立在不随弹头慢旋坐标系 $ox_1 y_1 z_1$ 上的转动方程, 其中 α, β 都是相对于 $ox_1 y_1 z_1$ 定义的, 如果给出起始条件, 数值积分全组方程, 当然可以求出各运动参数, 但这样做是很复杂的, 而且不易看出慢旋对动态特性的关系, 为此应用线性化方法, 对运动进行近似研究。

三、运动方程线性化及其解法

利用坐标系 $ox_1 y_1 z_1$ 来建立运动方程的最大优点是便于线性化, 此时可认为

(1) $\omega_{y_1}, \omega_{z_1}, \dot{\theta}_T, \dot{\sigma}_T, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \sigma_T, \alpha, \beta, \nu_T$ 都是一阶微量。

(2) 空气动力系数是线性的。

则由(10)式得

$$\begin{cases} \omega_{x_1}^* = \omega_{x_1} + \dot{\gamma}_0 \approx \dot{\gamma}_T + \dot{\gamma}_0 \\ \omega_{y_1} = \dot{\sigma}_T + \dot{\beta} - \dot{\gamma}_T \alpha \approx \dot{\sigma}_T + \dot{\beta} - \omega_{x_1} \alpha \\ \omega_{z_1} = \dot{\theta}_T + \dot{\alpha} + \dot{\gamma}_T \beta \approx \dot{\theta}_T + \dot{\alpha} + \omega_{x_1} \beta \\ \dot{\omega}_{y_1} = \ddot{\sigma}_T + \ddot{\beta} \\ \dot{\omega}_{z_1} = \ddot{\theta}_T + \ddot{\alpha} \end{cases} \quad (11)$$

且认为

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = C_y^a \frac{\rho v^2}{2} s \alpha \\ Z = C_z^b \frac{\rho v^2}{2} s \beta \\ M_{x_1} = M_{x_0} + M_x^{\omega_{x_1}} \omega_{x_1}^* + (C_x + C_z^b) \frac{\rho v^2}{2} s \beta \Delta y + (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2} s \alpha \Delta z \\ M_{y_1} = M_{y_0} + M_y^{\omega_{y_1}} \omega_{y_1} + C_x \frac{\rho v^2}{2} s \Delta z - (C_x + C_z^b) \frac{\rho v^2}{2} s \beta \Delta x_T \\ M_{z_1} = M_{z_0} + M_z^{\omega_{z_1}} \omega_{z_1} + C_x \frac{\rho v^2}{2} s \Delta y - (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2} s \alpha \Delta x_T \end{array} \right. \quad (12)$$

线性化(8)式, 将(11)式代入整理之得:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\omega}_{x_1} - \frac{M_x^{\omega_{x_1}}}{I_x} (\omega_{x_1} + \dot{\gamma}_0) = \left(\frac{I_{xz}}{I_x} \ddot{\alpha} + \frac{I_{xy}}{I_x} \ddot{\beta} \right) + \left(\frac{I_{xz}}{I_x} \ddot{\theta}_T - \frac{I_{xy}}{I_x} \dot{\theta}_T \right) \\ + \frac{I_{xy}}{I_x} \ddot{\sigma}_T - \frac{I_{xz}}{I_x} \dot{\sigma}_T + (C_x + C_z^b) \frac{\rho v^2}{2 I_x} s \Delta y \beta + (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2 I_x} s \Delta z \alpha \\ \ddot{\beta} + \left(-\frac{M_y^{\omega_{y_1}}}{I_y} - \frac{I_{yz}}{I_y} \omega_{x_1} \right) \dot{\beta} + \left[-\frac{M_y^{\beta}}{I_y} + (C_x + C_z^b) \frac{\rho v^2}{2 I_y} s \Delta x + \frac{I_x - I_z}{I_y} \omega_{x_1}^2 \right. \\ \left. + \frac{I_x}{I_y} \omega_{x_1} \dot{\gamma}_0 \right] \beta - \frac{I_{yz}}{I_y} \ddot{\alpha} + \left[\frac{I_x - I_z}{I_y} \omega_{x_1} + \frac{I_x}{I_y} \dot{\gamma}_0 \right] \dot{\alpha} + \left(\frac{M_y^{\omega_{y_1}}}{I_y} \omega_{x_1} + \frac{I_{yz}}{I_y} \omega_{x_1} \dot{\gamma}_0 \right) \alpha \\ = \frac{I_{yz}}{I_y} \dot{\theta}_T - \left[\frac{I_x - I_z}{I_y} \omega_{x_1} + \frac{I_x}{I_y} \dot{\gamma}_0 \right] \dot{\theta}_T - \dot{\sigma}_T + \left(\frac{M_y^{\omega_{y_1}}}{I_y} - \frac{I_{yz}}{I_y} \omega_{x_1} \right) \dot{\sigma}_T \\ - \frac{I_{xy}}{I_y} \omega_{x_1}^* \omega_{x_1} + C_x \frac{\rho v^2}{2 I_y} s \Delta z + \frac{M_{y_0}}{I_y} \\ \ddot{\alpha} + \left(-\frac{M_z^{\omega_{z_1}}}{I_z} - \frac{I_{yz}}{I_z} \omega_{x_1} \right) \dot{\alpha} + \left[-\frac{M_z^{\alpha}}{I_z} + (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2 I_z} s \Delta x + \frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_{x_1}^2 + \frac{I_x}{I_z} \omega_{x_1} \dot{\gamma}_0 \right] \alpha \\ - \frac{I_{yz}}{I_z} \dot{\beta} - \left[\frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_{x_1} + \frac{I_x}{I_z} \dot{\gamma}_0 \right] \dot{\beta} - \left(\frac{M_z^{\omega_{z_1}}}{I_z} + \frac{I_{yz}}{I_z} \omega_{x_1} \dot{\gamma}_0 \right) \beta \\ = \frac{I_{yz}}{I_z} \ddot{\sigma}_T + \left[\frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_{x_1} + \frac{I_x}{I_z} \dot{\gamma}_0 \right] \dot{\sigma}_T - \dot{\theta}_T + \left(\frac{M_z^{\omega_{z_1}}}{I_z} + \frac{I_{yz}}{I_z} \omega_{x_1} \right) \dot{\theta}_T \\ + \frac{I_{xy}}{I_z} \omega_{x_1}^* \omega_{x_1} - C_x \frac{\rho v^2}{2 I_z} s \Delta y + \frac{M_{z_0}}{I_z} \end{array} \right. \quad (13)$$

其中 $\dot{\theta}_T$, $\dot{\theta}_T$, $\dot{\sigma}_T$, $\ddot{\sigma}_T$ 可由线性化质心运动方程得到

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_T = C_y^a \frac{\rho v s}{2m} \alpha - \frac{g \cos \theta_T}{v} \\ \ddot{\theta}_T = C_y^a \frac{\rho v s}{2m} \dot{\alpha} + C_y^a \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{v}}{v} \right) \frac{\rho v s}{2m} \alpha + \frac{\dot{v}}{v^2} g \cos \theta_T \\ \dot{\sigma}_T = C_z^\beta \frac{\rho v s}{2m} \beta \left(\text{注意: } v \dot{\sigma}_T = -z = -\tilde{C}_z^\beta \frac{\rho v^2}{2m} s, \text{ 为了与升力项取得一致,} \right. \\ \left. \text{这里 } C_z^\beta = -\tilde{C}_z^\beta \right) \\ \ddot{\sigma}_T = C_z^\beta \frac{\rho v s}{2m} \dot{\beta} + C_z^\beta \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{v}}{v} \right) \frac{\rho v s}{2m} \beta \end{array} \right. \quad (14)$$

将(14)式代入(13)式, 消去 θ_T, σ_T 的导数, 即可得出关于 α, β 的变系数线性微分方程组, 可以利用分段“固化系数法”用常微分方程理论来求解。为了使问题简化, 拟将干扰因素分成两组来考虑。

i) 略去转动惯量不对称, 即认为

$$I = I_y = I_z, \quad I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

ii) 略去气动力不对称, 即认为

$$C_{y_0} = C_{z_0} = M_{z_0} = M_{y_0} = M_{x_0} = 0$$

本文只研究第一种情况, 即重心偏移和气动力不对称的影响, 且设

$$C_y^a = C_z^\beta, \quad m_z^a = m_y^\beta, \quad m_z^{\omega z_1} = m_y^{\omega y_1}$$

$$\text{令} \quad \delta = \beta + i\alpha, \quad \dot{\delta} = \dot{\beta} + i\dot{\alpha}, \quad \ddot{\delta} = \ddot{\beta} + i\ddot{\alpha} \quad (15)$$

则由(13)式后两式可得

$$\ddot{\delta} + M \dot{\delta} + N\delta = Q \quad (16)$$

式中

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \left(-\frac{M_z^{\omega z_1}}{I} + C_y^a \frac{\rho v s}{2m} \right) + \left(\frac{I - I_x \omega_{x_1}}{I} - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I} \right) i = A_m + B_m i \\ N = \left[C_y^a \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{v}}{v} \right) \frac{\rho v s}{2m} - \frac{M_z^a}{I} + (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2I} s \Delta x - \frac{M_z^{\omega z_1}}{I} C_y^a \frac{\rho v s}{2m} \right. \\ \left. + \left(\frac{I_x - I}{I} \omega_{x_1}^2 + \frac{I_x \omega_{x_1} \dot{\gamma}_0}{I} \right) + \left[-\frac{M_z^{\omega z_1}}{I} \omega_{x_1} + \left(\frac{I - I_x \omega_{x_1}}{I} - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I} \right) C_y^a \frac{\rho v s}{2m} \right] \right] i = A_n + B_n i \\ Q = \left[\frac{M_{y_0}}{I} + C_x \frac{\rho v^2}{2I} s \Delta z - \left(\frac{I - I_x \omega_{x_1}}{I} - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I} \right) \frac{g \cos \theta_T}{v} \right] \\ \left. + \left[\frac{M_{z_0}}{I} - C_x \frac{\rho v^2}{2I} s \Delta y + \left(-\frac{M_z^{\omega z_1}}{I} \right) \frac{g \cos \theta_T}{v} - \frac{\dot{v}}{v^2} g \cos \theta_T \right] \right] i = A_Q + B_Q i \quad (17) \end{array} \right.$$

可以看出方程(16)的系数 M, N, Q 在再入过程中都是变化的, 故方程(16)是非齐次变系数线性微分方程。为了近似地了解不对称慢旋弹头再入动态特性, 利用分段“固化

系数法”。将每段中的 ρ , v , ω_x 都看成是常数, 且令 $\dot{\rho} = \dot{v} = 0$, 略去 $\frac{g \cos \theta_T}{v}$ 项, 则

A_m, B_m, A_n, B_n 都是常数, 而

$$\begin{cases} A_Q = \frac{M y_0}{I} + C_x \frac{\rho v^2}{2I} s c_2 \cos \dot{\gamma}_0 t = A_{1Q} + A_{2Q} \cos \dot{\gamma}_0 t \\ B_Q = \frac{M z_0}{I} - C_x \frac{\rho v^2}{2I} s c_2 \sin \dot{\gamma}_0 t = B_{1Q} - A_{2Q} \sin \dot{\gamma}_0 t \end{cases} \quad (18)$$

则(16)式变为

$$\ddot{\delta} + M\dot{\delta} + N\delta = (A_{1Q} + B_{1Q}i) + A_{2Q} \cos \dot{\gamma}_0 t - A_{2Q}i \sin \dot{\gamma}_0 t \quad (19)$$

解之得

$$\delta = e^{-\frac{M}{2}t} \left[C_1 e^{\frac{\sqrt{M^2 - 4N}}{2}t} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{M^2 - 4N}}{2}t} \right] + \frac{A_{1Q} + B_{2Q}i}{N} + A^* \cos \dot{\gamma}_0 t + B^* \sin \dot{\gamma}_0 t \quad (20)$$

式中

$$\begin{cases} A^* = \frac{A_{2Q}[(N - \dot{\gamma}_0^2) + M\dot{\gamma}_0 i]}{(N - \dot{\gamma}_0^2)^2 + (M\dot{\gamma}_0)^2} \\ B^* = \frac{-A_{2Q}[(N - \dot{\gamma}_0^2)i - M\dot{\gamma}_0]}{(N - \dot{\gamma}_0^2)^2 + (M\dot{\gamma}_0)^2} \end{cases} \quad (21)$$

且知

$$A_m^2 - B_m^2 - 4A_N < 0$$

$$(A_m^2 - B_m^2 - 4A_N)^2 > 4(A_m B_m - 2B_m)^2$$

则由(20)式可分别得出 α 和 β 的表达式如下:

$$\begin{aligned} \beta &= R_1 e^{(\lambda + \Delta\lambda)t} \cos[(\omega - \Delta\omega)t + \xi_1] + R_2 e^{(\lambda - \Delta\lambda)t} \cos[(\omega + \Delta\omega)t + \xi_2] \\ &\quad + C_{1Q} + B_1^* \sin \dot{\gamma}_0 t - B_2^* \cos \dot{\gamma}_0 t \\ \alpha &= R_1 e^{(\lambda + \Delta\lambda)t} \sin[(\omega - \Delta\omega)t + \xi_1] + R_2 e^{(\lambda - \Delta\lambda)t} \sin[(\omega + \Delta\omega)t + \xi_2] \\ &\quad + C_{2Q} + B_2^* \sin \dot{\gamma}_0 t + B_1^* \cos \dot{\gamma}_0 t \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $R_1, R_2; \xi_1, \xi_2$ 为与起始条件有关的量,

$$\begin{cases} \omega = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}} \right) \omega_{x_1} \\ \Delta\omega = \frac{1}{2} \left[4\omega_{x_1}^2 - \left(1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}} \right) \left(3 + \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}} \right) \omega_{x_1}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \lambda = \frac{M^{\omega_{z_1}}}{2I} - C_y \frac{\rho v s}{4m} \\ \Delta\lambda = -\frac{M^{\omega_{z_1}}}{I} \left(1 + \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}} \right) \frac{\omega_{x_1}}{2\Delta\omega} \end{cases} \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_{1Q} &= \frac{A_{1Q}A_N + B_{1Q}B_N}{A_N^2 + B_N^2} \\ C_{2Q} &= \frac{B_{1Q}A_N - A_{1Q}B_N}{A_N^2 + B_N^2} \\ \omega_A &= \left[-\frac{M_z^a}{I} - \frac{1}{4} \left(\frac{M_z^{\bar{\omega}_{z1}}}{I} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right.$$

四、等效重心偏移和 M_{y_0} , M_{z_0} 引起的动态过程

只研究等效重心偏移和 M_{y_0} , M_{z_0} 的影响, 且略去滚动阻尼力矩 $M_{x_1}^{\bar{\omega}_{x_1}} \omega_{x_1}^*$, 此时 $I = I_y = I_z$, $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$, 则(8)式变为

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\omega}_{x_1} &= (C_x + C_z^a) \frac{\rho v^2}{2I_x} s \beta \Delta y + (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2I_x} s \alpha \Delta z \\ \dot{\omega}_{y_1} &= \frac{M_{y_1}^{\bar{\omega}_{y_1}}}{I} \omega_{y_1} + C_x \frac{\rho v^2}{2I} s \Delta z - (C_x + C_z^a) \frac{\rho v^2}{2I} s \Delta x_T \beta + \left(\frac{I - I_x}{I} \omega_{x_1}^* - \dot{\gamma}_0 \right) \omega_{z_1} + \frac{M_{y_0}}{I} \\ \dot{\omega}_{z_1} &= \frac{M_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}}}{I} \omega_{z_1} - C_x \frac{\rho v^2}{2I} s \Delta y - (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2I} s \Delta x_T \alpha - \left(\frac{I - I_x}{I} \omega_{x_1}^* - \dot{\gamma}_0 \right) \omega_{y_1} + \frac{M_{z_0}}{I} \end{aligned} \right. \quad (24)$$

将上一段关于 α , β 的表达式(22)和 Δy , Δz 的表达式(6)代入(24)式第一式, 则得:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{x_1} &= H_1^* e^{(\lambda+\lambda)t} \{ \sin \xi_1 \cos[\omega - \Delta\omega - \dot{\gamma}_0]t + \cos \xi_1 \sin[\omega - \Delta\omega - \dot{\gamma}_0]t \} \\ &\quad + H_2^* e^{(\lambda-\lambda)t} \{ \sin \xi_2 \cos[\omega + \Delta\omega - \dot{\gamma}_0]t + \cos \xi_1 \sin[\omega + \Delta\omega - \dot{\gamma}_0]t \} \\ &\quad - H_3^* \sin \dot{\gamma}_0 t + H_4^* \cos \dot{\gamma}_0 t + H_5^* \cos 2\dot{\gamma}_0 t \end{aligned} \quad (25)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} H_1^* &= R_1 (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2I_x} s C_2 \\ H_2^* &= R_2 (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2I_x} s C_2 \\ H_3^* &= C_{1Q} (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2I_x} s C_2 \\ H_4^* &= C_{2Q} (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2I_x} s C_2 \\ H_5^* &= B_1^* (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2I_x} s C_2 \end{aligned} \right. \quad (26)$$

积分之则得

$$\begin{aligned}
 \omega_{x_1} - \omega_{x_{10}} = & \frac{H_1^* e^{(\lambda+\Delta\lambda)t} \sin \xi_1}{(\lambda+\Delta\lambda)^2 + (\omega - \Delta\omega - \dot{\gamma}_0)^2} [(\lambda+\Delta\lambda) \cos(\omega - \Delta\omega - \dot{\gamma}_0)t \\
 & + (\omega - \Delta\omega - \dot{\gamma}_0) \sin(\omega - \Delta\omega - \dot{\gamma}_0)t] + \frac{H_1^* e^{(\lambda+\Delta\lambda)t} \cos \xi_1}{(\lambda+\Delta\lambda)^2 + (\omega - \Delta\omega - \dot{\gamma}_0)^2} \\
 & \cdot [(\lambda+\Delta\lambda) \sin(\omega - \Delta\omega - \dot{\gamma}_0)t - (\omega - \Delta\omega - \dot{\gamma}_0) \cos(\omega - \Delta\omega - \dot{\gamma}_0)t] \\
 & + \frac{H_2^* e^{(\lambda-\Delta\lambda)t} \sin \xi_2}{(\lambda-\Delta\lambda)^2 + (\omega + \Delta\omega - \dot{\gamma}_0)^2} [(\lambda - \Delta\lambda) \cos(\omega + \Delta\omega - \dot{\gamma}_0)t \\
 & + (\omega + \Delta\omega - \dot{\gamma}_0) \sin(\omega + \Delta\omega - \dot{\gamma}_0)t] + \frac{H_2^* e^{(\lambda-\Delta\lambda)t} \cos \xi_2}{(\lambda-\Delta\lambda)^2 + (\omega + \Delta\omega - \dot{\gamma}_0)^2} \\
 & \cdot [(\lambda - \Delta\lambda) \sin(\omega + \Delta\omega - \dot{\gamma}_0)t - (\omega + \Delta\omega - \dot{\gamma}_0) \cos(\omega + \Delta\omega - \dot{\gamma}_0)t] \\
 & + \frac{H_2^*}{\dot{\gamma}_0} \cos \dot{\gamma}_0 t + \frac{H_4^*}{\dot{\gamma}_0} \sin \dot{\gamma}_0 t + \frac{H_5^*}{2\dot{\gamma}_0} \sin 2\dot{\gamma}_0 t + C_0^* \quad (27)
 \end{aligned}$$

这里必须说明的是：在用分段固化系数法解 α 、 β 时，假设 ω_{x_1} 为常数，即 $\dot{\omega}_{x_1} = 0$ (当然实际上 $\dot{\omega}_{x_1} \neq 0$)，在这里为了了解在各分段中 ω_{x_1} 的变化，又近似将 α 、 β 表达式代入(13)式第一式，而在表达式中的 ω_{x_1} 仍用原来的固化值，看成是常数。

J. J. Pettus 在“再入飞行器的持续滚动共振”^[31]一文中，略去阻尼因子的影响，令

$$\begin{cases} H_1 = R_1 e^{(\lambda+\Delta\lambda)t} (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2I} s \\ H_2 = R_2 e^{(\lambda-\Delta\lambda)t} (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2I} s \end{cases} \quad (28)$$

且不考虑慢旋即认为 $\dot{\gamma}_0 = 0$ ， $\Delta y = 0$ ， $\Delta z = C_2$ 且令

$$H_3 = (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2I} s (C_2 Q + B_1^*) \quad (29)$$

则

$$\omega_x - \omega_{x_{10}} = -\frac{H_1 C_2}{\omega - \Delta\omega} \cos[(\omega - \Delta\omega)t + \xi_1] - \frac{H_2 C_2}{\omega + \Delta\omega} \cos[(\omega + \Delta\omega)t + \xi_2] + H_3(t - t_0) + C_0 \quad (30)$$

可以看出当 $\omega \rightarrow \Delta\omega$ 时， ω_{x_1} 的振幅无限增大，此时

$$\omega_{x_1} \sqrt{1 - \frac{I_x}{I}} = \sqrt{-\frac{M_z^a}{I} - \frac{1}{4} \left(\frac{M_z^{\omega_{z_1}}}{I} \right)^2} = \omega_A \quad (31)$$

式中 ω_A 为俯仰振荡频率，当(31)式成立时，称之为滚动共振，因为 $\frac{I_x}{I} \ll 1$ ，故有时说当滚动角速度与俯仰振荡角频率相接近时，出现滚动共振。

由于 ω_A 在高空数值很小，在再入过程中逐渐递增至最大速度头处达最大值，然后再逐渐递减。而 ω_{x_1} 的值则与起始扰动和不对称因素的影响有关，在高空不可避免地往往会出现滚动共振，但由于 ω_A 迅速递增，如果 ω_{x_1} 跟不上 ω_A 的变化速度，则只在

瞬间发生共振,称为“暂态滚动共振”。如果由于不对称因素的影响,在某一高度上,在一段时间内 ω_{x_1} 的值锁定在 ω_A 值的附近,则称为“持续滚动共振”。

根据文献[1]的分析,单一的重心偏移相当于一个滚动阻尼效应,不会出现“持续的滚动共振”,但当不对称力矩 M_{y_0} 、 M_{z_0} 和重心偏移组合的情况下,有可能出现以下三种情况:

- (1) 滚动角速度过大,造成结构性或载荷性破坏。
- (2) 滚动共振期间加长,造成很大的侧向过载和很高的阻力。
- (3) 越过零滚转角速度,致使弹着点散布增大。

本文研究慢旋弹头再入时的情况,此时 $\dot{\gamma}_0 \approx 0$ 。这里必须指出的是:即使把慢旋角速度 $\dot{\gamma}_0$ 看成是起始条件,在用文献[1]和[3]中所介绍的线性化结果来研究 $\dot{\gamma}_0 \approx 0$ 情况下的动态特性时,也会带来误差,这是因为由于 $\dot{\gamma}_0$ 的影响, α 、 β 和 $\omega_{y_1}^*$ 、 $\omega_{z_1}^*$ 都是交变的,不能进行线性化,因而在 $\dot{\gamma}_0 = 0$ 情况下的线性化结果与在 $\dot{\gamma}_0 \approx 0$ 时的动态特性相差很大,必须采取本文所引用的方法来进行研究。

由(26)式,如果把滚动角速度 ω_{x_1} 的振幅趋于无穷大看成是滚动共振条件,则对于慢旋再入的弹头,其滚动共振条件应该是(26)式中的四个振幅中,至少有一个其分母为零,这就可能有两种情况:

- (1) $\lambda + \Delta\lambda = 0$, $\omega - \Delta\omega - \dot{\gamma}_0 = 0$
- (2) $\lambda - \Delta\lambda = 0$, $\omega + \Delta\omega - \dot{\gamma}_0 = 0$

只要有一组成立,即出现滚动共振,因为

$$\lambda \pm \Delta\lambda = \frac{M_z^{\omega_{x_1}}}{2I} \left\{ 1 \mp \left[\left(1 + \frac{I_x}{I} \right) \omega_{x_1} + \frac{I_x}{I} \dot{\gamma}_0 \right] \frac{1}{\Delta\omega} \right\} \quad (32)$$

如果 ω_{x_1} 、 $\dot{\gamma}_0$ 都取正号,则

$$\lambda - \Delta\lambda < 0$$

故第二种情况不会出现,且知在一般情况下

$$\left(1 + \frac{I_x}{I} \right) \omega_{x_1} + \frac{I_x}{I} \dot{\gamma}_0 < \Delta\omega \quad (33)$$

则 $\lambda + \Delta\lambda < 0$

故两种情况均不会出现,这就是说在考虑阻尼项的影响下, ω_{x_1} 的振幅不会趋于无穷大,但因 $\lambda + \Delta\lambda$ 的绝对值是很小的,如果 $\omega \pm \Delta\omega - \dot{\gamma}_0 = 0$ 则有可能出现较大的振幅值,只研究

$$\omega - \Delta\omega - \dot{\gamma}_0 = 0 \quad (34)$$

我们定义满足(34)的条件时为滚动共振。则

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}} \right) \omega_{x_1} - \dot{\gamma}_0 = \frac{1}{2} \left[4\omega_A^2 - \left(1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}} \right) \left(3 + \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I_x \omega_{x_1}} \right) \omega_{x_1}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

两边平方、整理之得

$$\left(1 - \frac{I_x}{I} \right) \omega_{x_1}^2 + \left(1 - \frac{2I_x}{I} \right) \dot{\gamma}_0 \omega_{x_1} + \left(1 - \frac{I_x}{I} \right) \dot{\gamma}_0^2 = \omega_A^2 \quad (36)$$

$$\omega_{x_{1c\rho}} = -\left(\frac{I-2I_x}{I-I_x}\right)\dot{\gamma}_0 \pm \sqrt{\frac{I\omega_A^2}{I-I_x} - \frac{(3I-4I_x)I}{4(I-I_x)^2}\dot{\gamma}_0^2} \quad (37)$$

由(37)式所确定的 ω_{x_1} 即是发生滚动共振的角速度, 称为临界角速度, 以 $\omega_{x_{1c\rho}}$ 表之。

在再入过程中, 俯仰角频率 ω_A 是随高度变化的, 如果设 $\rho = \rho_0 e^{-\beta_d h}$, $v = v_0 e^{-\frac{K_0}{2} e^{-\beta_d h}}$, 则由文献[2]

$$\omega_A = \left(\frac{-\beta_d k v_0 \sin \theta_T}{2\pi}\right) e^{-\left(\frac{K_0}{2} e^{-\beta_d h} + \frac{\beta_d}{2} h\right)} \quad (38)$$

式中

$$K_0 = -\frac{C_x s \rho_0}{\beta_d m \sin \theta_T}$$

$$k = \sqrt{K_1 + K_2}$$

$$K_1 = \frac{s \rho_0}{4\beta_d m \sin \theta_T} \left[-C_x + C_y^a - \frac{m_z \omega_{z_1}}{r_z^2} \right]$$

$$K_2 = \frac{s \rho_0}{2\beta_d^2 m \sin^2 \theta_T} \left[-\frac{m_z^a}{I_{r_z^2}} - C_y^a \beta_d \sin \theta_T \right]$$

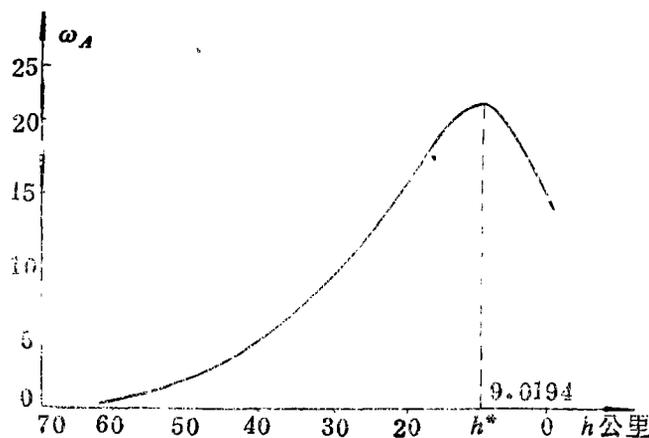


图 8

以某导弹为例, 算得的 $\omega_A(h)$ 曲线如图 3 所示, 其最大值所在高度为

$$h^* = \frac{1}{\beta_d} \ln K_0 \approx 9 \text{ 公里} \quad (39)$$

可以看出在高空 ω_A 很小, 随着高度降低, ω_A 的值逐渐增加, 至 h^* 达最大值, 由参考文献[2]

$$\omega_{A_{\max}} = \frac{k}{\sqrt{K_0}} \left(\frac{-\beta_d v_0 e^{-\frac{1}{2}} \sin \theta_T}{2\pi} \right) \quad (40)$$

在所举例子情况下, $\omega_{A_{\max}} \approx 21.75439211$ 弧度/秒 $= 3.46 \times 2\pi$ 弧度/秒, 由(37)式, 为了避免发生滚动共振, 应使

$$|\dot{\gamma}_0| > \sqrt{\frac{4(I - I_x)}{3I - 4I_x}} |\omega_A| \quad (41)$$

如果以所举例子的 $\omega_{A_{\max}}$ 代入, 则要求

$$\dot{\gamma}_0 > 1.224744871 \omega_{A_{\max}} = 26.64358016 \text{ 弧度/秒}$$

即要求弹头每秒绕纵轴 4.24 转, 即可避免发生滚动共振, (37) 式是慢旋再入弹头滚动共振的判别式, 由 (37) 式知

$$\frac{\omega_{x_{1CP}}}{\dot{\gamma}_0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{I - 2I_x}{I - I_x} \right) \pm \sqrt{\frac{I}{I - I_x} \frac{\omega_A^2}{\dot{\gamma}_0^2} - \frac{(3I - 4I_x)I}{4(I - I_x)^2}} \quad (42)$$

可以看出在选定 $\dot{\gamma}_0$ 之后, 临界频率是高度的函数, 它随着高度下降而逐渐递增,

至 $h^* = \frac{1}{\beta_d} \ln K_0$ 时达最大值, 然后随高度下降, 如图 4 所示。由以上叙述可以看出, 如

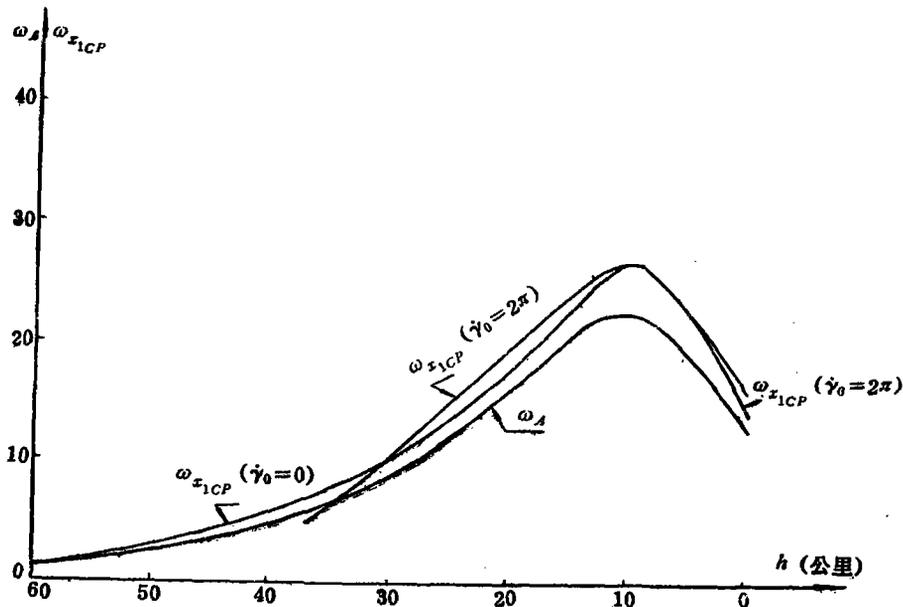


图 4

果按 (41) 式来选择慢旋角速度 $\dot{\gamma}_0$, 则可以避免发生滚动共振。但此时慢旋角速度值比较大, 通常要选在 4~5 周/秒, 过大的慢旋角速度, 会产生以下两个问题:

(1) 起旋发动机的推力和重量都要增加。

(2) 慢旋使弹绕纵轴的角速度 $\omega_{x_1}^*$ 增大, 这就使可能发生滚动共振的高度降低, 在 h^* 之上, 横向过载也会随之增加, 是不利的。

因此所选择的 $\dot{\gamma}_0$ 往往小于由 (41) 式所确定的值。这样在再入过程中, 由于不对称因素的影响, 就有可能发生滚动共振, 我们感兴趣的是在发生滚动共振时:

(1) 出现持续滚动共振时, 攻角振幅与 $\omega_{x_1}^* = 0$ 时攻角配平角振幅的关系如何?

(2) 滚动频率在什么条件下才会出现锁定现象, 引起持续滚动共振。

以下分别来研究这两个问题。

1) 发生“持续滚动共振”时, 攻角配平角 $\delta_{\text{平}}^*$ 的振幅与 $\omega_{x_1}^* = 0$ 时攻角配平角 $\delta_{\text{平}}$ 的振幅比的研究。如果令 R^* 为放大因子, 则

$$R^* = \left| \frac{\delta_{\text{平}}^*}{\delta_{\text{平}}} \right|$$

$$|\delta_{\text{平}}^*| = \left| C_x \frac{\rho v^2}{2I} s \Delta z \left\{ \left[-\frac{M_z^a}{I} + (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2I} s \Delta \alpha - \frac{M_z^{\omega_{x_1}}}{I} C_y^a \frac{\rho v s}{2m} - \left(1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}} \right) \omega_{x_1}^2 \right] \right. \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{M_z^{\omega_{x_1}}}{I} \omega_{x_1} + \left(1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}} \right) \omega_{x_1} C_y^a \frac{\rho v s}{2m} \right] i \right\}^{-1} \right|$$

$$|\delta_{\text{平}}| = \left| \frac{C_x \frac{\rho v^2}{2I} s \Delta z}{\left[-\frac{M_z^a}{I} + (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2I} s \Delta x - \frac{M_z^{\omega_{x_1}}}{I} C_y^a \frac{\rho v s}{2m} \right]} \right|$$

近似认为

$$-\frac{M_z^a}{I} + (C_x + C_y^a) \frac{\rho v^2}{2I} s \Delta x - \frac{M_z^{\omega_{x_1}}}{I} C_y^a \frac{\rho v s}{2m} = \omega_A^2$$

则

$$R^* = \left| \frac{\delta_{\text{平}}^*}{\delta_{\text{平}}} \right| = \frac{\omega_A^2}{\sqrt{\left[\omega_A^2 - \left(1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}} \right) \omega_{x_1}^2 \right]^2 + \left[-\frac{M_z^{\omega_{x_1}}}{I} + \left(1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}} \right) C_y^a \frac{\rho v s}{2m} \right]^2 \omega_{x_1}^2}}$$

(43)

这里所定义的 ω_A 实际上是 $\omega_{x_1}^* = 0$ 时的俯仰振盪频率, 与(23)式所定义的 ω_A 略有不同, 由于 $-\frac{M_z^a}{I}$ 是主要项, 故两者数值是十分接近的。

(43)式表示由于旋转(包含慢旋 $\dot{\gamma}_0$ 和由不对称因素而引起的 ω_{x_1})而引起的配平角的放大系数, 共振是否会引起较大的横向过载不仅仅取决于发生共振的高度, 主要是取决于放大因子 R^* , 因为由不对称因素而引起的配平角 $\delta_{\text{平}}$ 都是很小的量, 即使在最大速度头处发生滚动共振, 如果放大因子接近于1, 则产生的横向过载是非常有限的。有一种意见把慢旋角速度和横向过载对立起来, 认为慢旋角速度大, 则可能发生滚动共振的高度就低, 而发生的横向过载就大, 这只是一种非常直观的表面现象, 通过后面的研究, 将可以看到这一点。

(43)式中 $1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}} = \left(1 - \frac{I_x}{I} \right) - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I \omega_{x_1}}$ 与慢旋角速度有关,

当
时
令

$$\dot{\gamma}_0 \leq \frac{I - I_x \omega_{x_1}}{I_x}$$

$$1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}} \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T^* = \frac{\omega_{x_1}}{\omega_A} \sqrt{1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}}} \\ \zeta^* = -\frac{M_z^{\omega_{x_1}}}{I} + \left(1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}}\right) C_y \frac{\rho v s}{2m} \\ \omega_A \sqrt{1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}}} \end{array} \right. \quad (44)$$

则

$$R^* = [(1 - T^{*2})^2 + \zeta^{*2} T^{*2}]^{-\frac{1}{2}} \quad (45)$$

故 R^* 可以看成是 T^* 和 ζ^* 的函数, 研究 T^* 变化对放大因子 R^* 的影响。

i) $T^* = 0$ 时, $R^* = 1$, 这有两种可能:

(a) 在高空 $\omega_{x_1} \approx 0$ 时, $T^* \approx 0$.

(b) $\omega_{x_1} = \frac{I_x}{I - I_x} \dot{\gamma}_0$ 时, $T^* = 0$, 因为 ω_x 是随时间变化的, 故不可能在一段时间内

保持 $T^* = 0$.

ii) $T^* = \sqrt{1 - \frac{\zeta^{*2}}{2}}$ 时, $R^* = \left[\zeta^{*2} \left(1 - \frac{\zeta^{*2}}{4}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$ 达最大值。

iii) $T^* > \sqrt{1 - \frac{\zeta^{*2}}{2}}$ 时, $R^* \downarrow$. $T \rightarrow \infty$ 时, $R^* \rightarrow 0$.

可以看出放大因子 R^* 的最大值近似与 ζ^* 的倒数成比例, 由 (44) 式可以看出 ζ^* 是高度和慢旋角速度的函数。如果 $\dot{\gamma}_0 = 0$, 则

$$\zeta^* = -\frac{M_z^{\omega_{x_1}}}{I \omega_A \sqrt{\left(1 - \frac{I_x}{I}\right)}} = \zeta$$

在整个再入过程中很小, 故 R 往往比较大。但如果考虑到 $\dot{\gamma}_0$ 的作用, 由于 $1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}}$ 的

影响, $\dot{\gamma}_0$ 愈大, $\left(1 - \frac{I_x \omega_{x_1}^*}{I \omega_{x_1}}\right)$ 愈小, 而 ζ^* 增大, 故适当选择 $\dot{\gamma}_0$ 可使 R^* 保持在 1 附近,

为此需作出在不同 $\dot{\gamma}_0$ 作用下的 R^* , ζ^* 曲线。

我们知道 R^* , ζ^* 表达式中 ω_{x_1} 是随着弹道变化的, 而由不对称因素而引起的滚动共振, 原则上说可以发生在任意高度上, 为此我们用临界频率 $\omega_{x_{cp}}$ 来代替 ω_{x_1} , 这也就是说只研究在发生滚动共振情况下放大因子 R^* 与 $\dot{\gamma}_0$ 的关系。

王本合同志对在不同的 $\dot{\gamma}_0$ 作用下, 对 R^* , ζ^* 进行了计算, 如图 5 和图 6 所示, 其横向过载如图 7 所示, 可以看出, 随着慢旋角速度 $\dot{\gamma}_0$ 的增大, 放大因子 R^* 和过载 n_y 都减小, 若选择较大的起始慢旋角速度 (例如 $\dot{\gamma}_0 = 7\pi$ /秒), 则即使发生滚动共振,

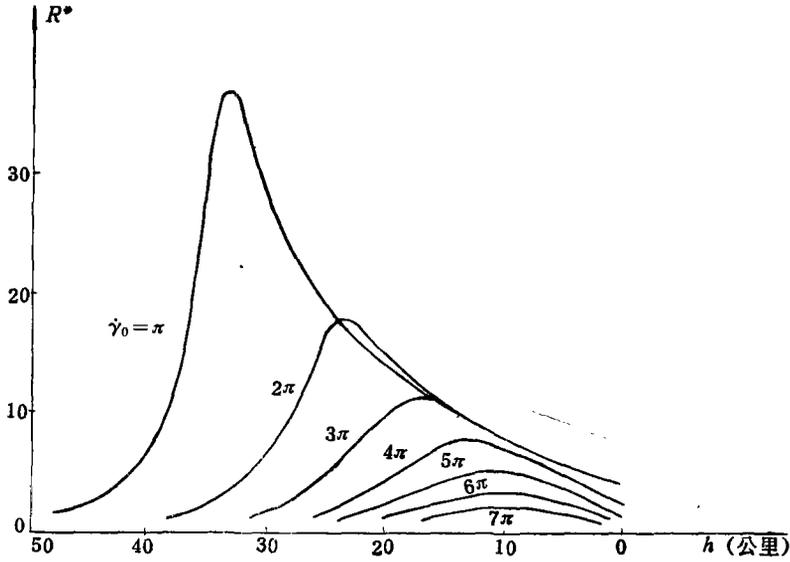


图 5

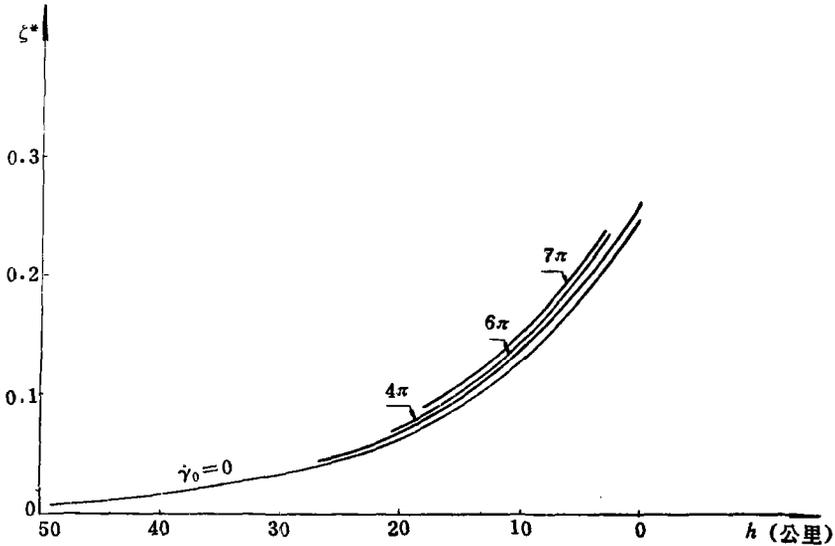


图 6

R^* 和 n_y 也不大, 不会产生很坏的影响, 但如果 $\dot{\gamma}_0$ 较小 (例如 $\dot{\gamma}_0 = \pi$ /秒), 则当发生滚动共振时, R^* 会达到 36, 过载 n_y 会达到 25.7, 且在整个飞行高度上都保持较大值, 显然选择 $\dot{\gamma}_0 \leq \pi$ /秒是不利的。

当 $\dot{\gamma}_0 > \frac{I - I_x \omega_{x1}}{I_*}$ 时, $1 - \frac{I_x \omega_{x1}^*}{I \omega_{x1}} < 0$. 如果令 $\omega_{x1} = \omega_{x1cp}$, 则由 (37) 式

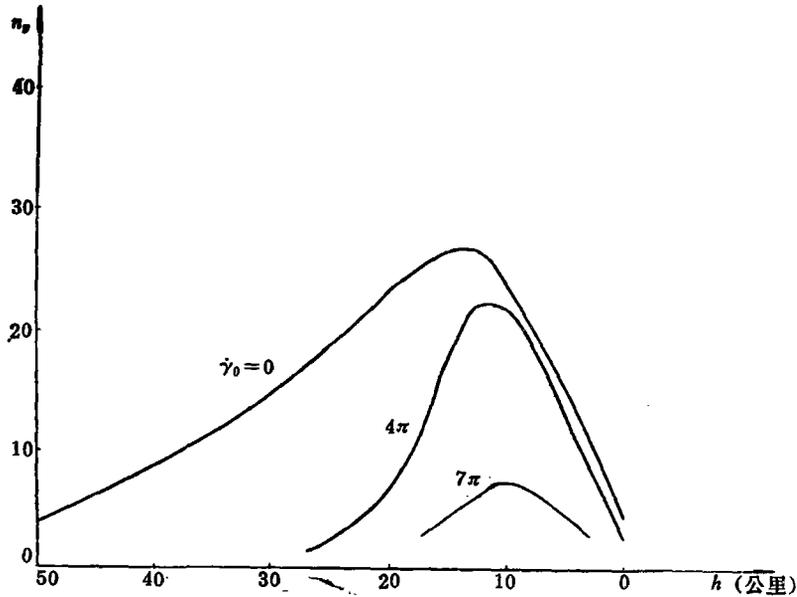


图 7

$$\dot{\gamma}_0 > \frac{I - I_x}{I_x} \left[- \left(\frac{I - 2I_x}{I - I_x} \right) \dot{\gamma}_0 + \sqrt{\frac{I\omega_A^2}{I - I_x} - \frac{(3I - 4I_x)I}{4(I - I_x)^2} \dot{\gamma}_0^2} \right] \quad (46)$$

即是
此时

$$\dot{\gamma}_0 > \omega_A \quad (47)$$

$$R^* = \frac{\omega_A^2}{\sqrt{\left[\omega_A^2 + \left(\frac{I_x \omega_{x1}^*}{I \omega_{x1}} \right) \omega_{x1}^2 \right]^2 + \left[-\frac{M_z^{\omega_{z1}}}{I} - \left(\frac{I_x \omega_{x1}^*}{I \omega_{x1}} - 1 \right) C_y^a \frac{\rho v s}{2m} \right]^2 \omega_{x1}^2}} \quad (48)$$

如果令

$$\left\{ \begin{aligned} T^* &= \frac{\omega_{x1}}{\omega_A} \sqrt{\frac{I_x \omega_{x1}^*}{I \omega_{x1}} - 1} \\ \xi^* &= \frac{-\frac{M_z^{\omega_{z1}}}{I} + \left(1 - \frac{I_x \omega_{x1}^*}{I \omega_{x1}} \right) C_y^a \frac{\rho v s}{2m}}{\omega_A \sqrt{\left(\frac{I_x \omega_{x1}^*}{I \omega_{x1}} - 1 \right)}} \end{aligned} \right. \quad (49)$$

则

$$R^* = \left[(1 + T^{*2})^2 + \xi^{*2} T^{*2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (50)$$

当 $T^* = 0$ 时, $R^* = 1$, 与 $\dot{\gamma}_0 \leq \frac{I - I_x}{I_x} \omega_{x1}$ 时所讨论的情况相同,

$T^* \neq 0$ 时, R^* 随着 $\xi^* \downarrow$ 而增大, 随着 $T^* \uparrow$ 而减小, 当 $T \rightarrow \infty$ 时, $R^* \rightarrow 0$.

此种情况与按(41)式选择 $\dot{\gamma}_0$ 的情况相同, 慢旋角速度值比较大。不详细研究。

由于攻角传递特性为二阶系统, 两配平相位滞后角之差 $\Delta\psi$ 在稳态情况下表示 $\delta_{\text{平}}^*$ 所

在平面与 $\delta_{\text{平}}$ 所在平面之夹角。

$$\operatorname{tg} \Delta \psi = \frac{-\xi^* T^*}{1 - T^{*2}} = \frac{\frac{M_z^{\omega z}}{I} - \left[\left(1 - \frac{I_x}{I} \right) - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I \omega_{x_1}} \right] C_y^a \frac{\rho v s}{2m}}{1 - \frac{\omega_{x_1}^2}{\omega_A^2} \left[\left(1 - \frac{I_x}{I} \right) - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I \omega_{x_1}} \right]} \frac{\omega_{x_1}}{\omega_A^2} \quad (51)$$

如果令

$$\begin{cases} f_1(\dot{\gamma}_0, h) = \frac{M_z^{\omega z}}{I} - \left[\left(1 - \frac{I_x}{I} \right) - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I \omega_{x_1}} \right] C_y^a \frac{\rho v s}{2m} \\ f_2(\dot{\gamma}_0, h) = 1 - \frac{\omega_{x_1}^2}{\omega_A^2} \left[\left(1 - \frac{I_x}{I} \right) - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I \omega_{x_1}} \right] \end{cases} \quad (52)$$

则

$$\operatorname{tg} \Delta \psi = \frac{f_1(\dot{\gamma}_0, h)}{f_2(\dot{\gamma}_0, h)} \frac{\omega_{x_1}}{\omega_A^2} \quad (53)$$

可以看出 $\Delta \psi$ 的符号不仅与 ω_{x_1} 有关, 而且与 $\dot{\gamma}_0$ 及气动参数有关。先研究 (51) 式分子或分母为零时 ω_{x_1} 的表达式。

1) $f_1(\dot{\gamma}_0, h) = 0$

$$\omega_{x_1} = \frac{\dot{\gamma}_0}{\frac{I - I_x}{I_x} - \frac{m_z^{\omega z_1} l m}{C_y^a I}} = \omega_1 \quad (\text{与 } \dot{\gamma}_0 \text{ 同号}) \quad (54)$$

2) $f_2(\dot{\gamma}_0, h) = 0$, 只研究 $\left(1 - \frac{I_x}{I} \right) - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I \omega_{x_1}} > 0$ 的情况。

$$\omega_{x_1} = \omega_2 = \begin{cases} \frac{I \dot{\gamma}_0}{2(I - I_x)} + \sqrt{\frac{I_x^2 \dot{\gamma}_0^2}{4(I - I_x)^2} + \frac{I \omega_A^2}{I - I_x}} = \omega_{21} \\ \frac{I \dot{\gamma}_0}{2(I - I_x)} - \sqrt{\frac{I_x^2 \dot{\gamma}_0^2}{4(I - I_x)^2} + \frac{I \omega_A^2}{I - I_x}} = \omega_{22} \end{cases} \quad (55)$$

其次研究 $\Delta \psi$ 的符号与 ω_{x_1} 之关系。只研究 $\left(1 - \frac{I_x}{I} \right) - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I \omega_{x_1}} > 0$ 的情况。

当 $\omega_{x_1} > 0$ 时, 可能出现四种情况:

i) $f_1(\dot{\gamma}_0, h) > 0$, 即 $\omega_1 > \omega_{x_1} > 0$

$f_2(\dot{\gamma}_0, h) > 0$, 即 $\omega_{21} > \omega_{x_1} > 0$

通常 $\omega_{21} > \omega_1$ 故此种情况相当于

$$\omega_1 > \omega_{x_1} > 0 \quad (56)$$

而

$$\operatorname{tg} \Delta \psi > 0$$

ii) $f_1(\dot{\gamma}_0, h) > 0$ 即 $\omega_1 > \omega_{x_1} > 0$

$f_2(\dot{\gamma}_0, h) < 0$ 即 $\omega_{x_1} > \omega_{21}$

此时只有当 $\omega_1 > \omega_{21}$ 时才有意义, 而 $\operatorname{tg} \Delta \psi < 0$

$$(57)$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } f_1(\dot{\gamma}_0, h) < 0 & \text{ 即 } \omega_1 < \omega_{x_1} \\ f_2(\dot{\gamma}_0, h) > 0 & \text{ 即 } \omega_{21} > \omega_{x_1} > 0 \end{aligned}$$

通常 $\omega_{21} > \omega_1$ 故有

$$\omega_{21} > \omega_{x_1} > \omega_1 \tag{58}$$

而 $\text{tg} \Delta\psi < 0$

$$\begin{aligned} \text{iv) } f_1(\dot{\gamma}_0, h) < 0 & \text{ 即 } \omega_1 < \omega_{x_1} \\ f_2(\dot{\gamma}_0, h) < 0 & \text{ 即 } \omega_{x_1} > \omega_{21} \end{aligned} \tag{59}$$

此时 $\text{tg} \Delta\psi > 0$

当 $\omega_{x_1} < 0$ 时, 恒有

$$f_1(\dot{\gamma}_0, h) = \frac{M_z^{\omega_{x_1}}}{I} - \left[\left(1 - \frac{I_x}{I} \right) - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I \omega_{x_1}} \right] C_y^a \frac{\rho v s}{2m} < 0, \text{ 即 } \omega_1 > \omega_{x_1} \tag{60}$$

只有两种情况:

$$\text{i) } f_2(\dot{\gamma}_0, h) > 0 \quad \omega_{x_1} > \omega_{22} \text{ 故 } \omega_1 > \omega_{x_1} > \omega_{22} \tag{61}$$

而 $\text{tg} \Delta\psi > 0$,

$$\text{ii) } f_2(\dot{\gamma}_0, h) < 0 \quad \omega_{x_1} < \omega_{22} \text{ 而 } \text{tg} \Delta\psi < 0. \tag{62}$$

以上广泛地讨论了 $R^*(\dot{\gamma}_0, h)$, $T^*(\dot{\gamma}_0, h)$, $\zeta^*(\dot{\gamma}, h)$, $\Delta\psi(\dot{\gamma}_0, h)$ 的变化特性, 下面分两步来研究不对称因素的影响。

第一步: 定性的研究不对称因素引起的动态过程。

首先研究只有等效重心偏移时的情况。如图 8 所示。坐标系 $oy_1z_1^*$ 对坐标系 oy_1z_1 的旋转角速度为 $\dot{\gamma}_0$, 其重心偏移量为 Δy^* , Δz^* , 其配平角

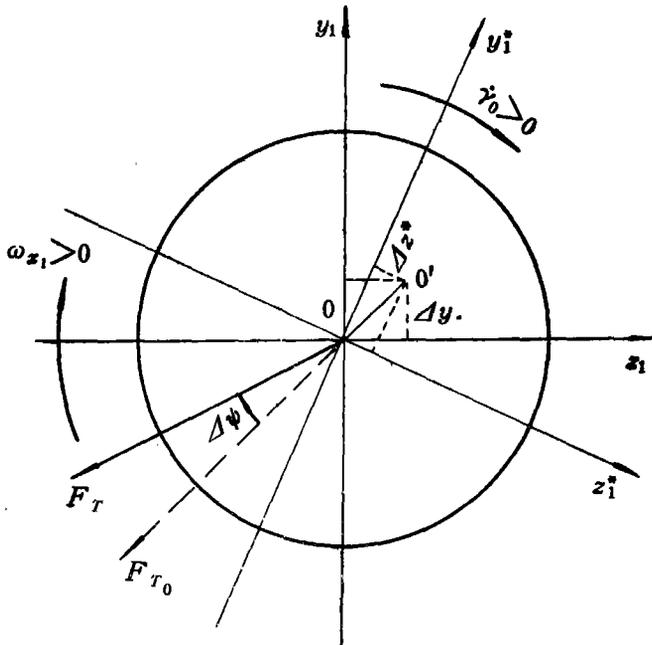


图 8

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_T^* &= -\frac{C_x \Delta y^*}{(C_x + C_y^a) \Delta x_T} = -\frac{C_x C_2 \sin \xi_0}{(C_x + C_y^a) \Delta x_T} \\ \beta_T^* &= \frac{C_x \Delta z^*}{(C_x + C_y^a) \Delta x_T} = \frac{C_x C_2 \cos \xi_0}{(C_x + C_y^a) \Delta x_T} \end{aligned} \right.$$

总配平攻角 $\eta_T^* = \sqrt{\alpha_T^{*2} + \beta_T^{*2}}$ 在 FT_0 平面内。

对坐标系 oy_1z_1 的配平角为

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_T &= -\frac{C_x \Delta y}{(C_x + C_y^a) \Delta x_T} = -\frac{C_x C_2 \sin(\dot{\gamma}_0 t + \xi_0)}{(C_x + C_y^a) \Delta x_T} \\ \beta_T &= \frac{C_x \Delta z}{(C_x + C_y^a) \Delta x_T} = \frac{C_x C_2 \cos(\dot{\gamma}_0 t + \xi_0)}{(C_x + C_y^a) \Delta x_T} \end{aligned} \right.$$

总配平攻角

$$\eta_T = \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2} = \eta_T^*$$

η_T 在 FT_0 平面内，此平面以角速度 $\dot{\gamma}_0$ 对 oy_1z_1 旋转。

当 $\omega_{x_1} > 0$ 时，设 $\dot{\gamma}_0 > 0$ ，如果起始瞬间 ω_{x_1} 比较小，则 $f_1(\dot{\gamma}_0, h) > 0$, $f_2(\dot{\gamma}_0, h) > 0$ 而 $\text{tg} \Delta\psi > 0$ 。由图 8 可以看出此时产生正的滚动力矩，使 $\omega_{x_1} \uparrow$ ，因为

$$\omega_1 = \frac{\dot{\gamma}_0}{\frac{I - I_x}{I_x} - \frac{m_z^{\omega_{z_1}} l m}{I C_y^a}} > \frac{I_x}{I - I_x} \dot{\gamma}_0$$

当 ω_{x_1} 增至等于 ω_1 时， $f_1 = 0$, $\text{tg} \Delta\psi = 0$, ω_{x_1} 停止增加，如果由于某种原因 x_1 仍然递增，则 $f_1 < 0$ ，满足(57)式， $\text{tg} \Delta\psi < 0$, $\omega_{x_1} \downarrow$ ，故 ω_{x_1} 的值将稳定在 ω_1 ，此值小于 $\omega_{x_{1CP}}$ ，故不会发生滚动共振。

如果 $\omega_{x_1} < 0$ ，仍设 $\dot{\gamma}_0 > 0$ ，起始时 $|\omega_{x_1}|$ 很小， $f_2 > 0$ ，则满足(61)式， $\Delta\psi > 0$ ，产生正的滚动力矩，使 $\omega_{x_1} \uparrow$ ，即是使 $|\omega_{x_1}| \downarrow$ ，至 $\omega_{x_1} = 0$ 时，

$$\text{tg} \Delta\psi = \frac{I_x}{I} \dot{\gamma}_0 C_y^a \frac{\rho v s}{2m} > 0$$

故 ω_{x_1} 由 0 变为正值，最后仍然稳定在 ω_1 ，故只有等效重心偏移时，不会产生滚动共振， ω_{x_1} 稳定在 ω_1 ，则

$$\omega_{x_1}^* = \left(1 + \frac{1}{\frac{I - I_x}{I_x} - \frac{m_z^{\omega_{z_1}} l m}{C_y^a}} \right) \dot{\gamma}_0 \quad (63)$$

与重心偏移量的大小无关。

其次研究 M_{y_0} 、 M_{z_0} 、 Δy 、 Δz 的综合影响，如图 9 所示。两者综合影响对 $oy_1^*z_1^*$ 的配平角为

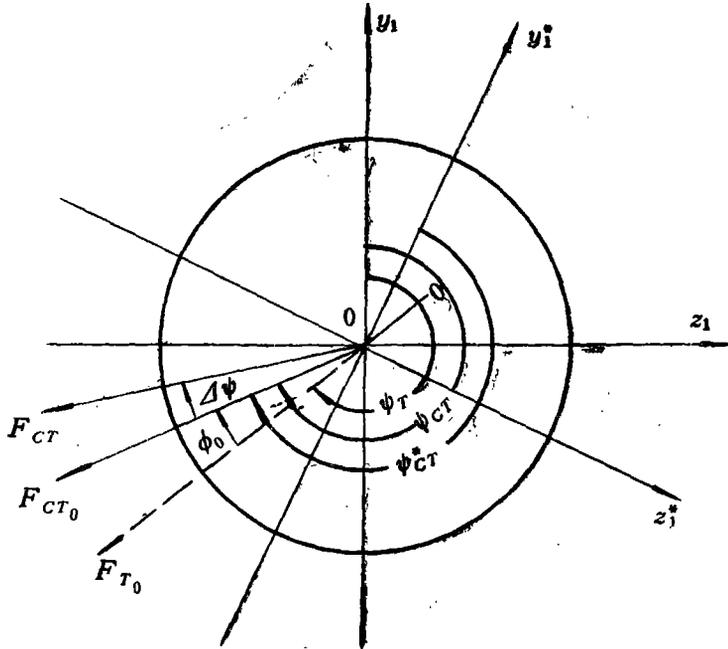


图 9

$$\begin{cases} a_{CT}^* = \frac{m_{z_0}^* - \frac{C_x}{l} \Delta y^*}{(C_x + C_y^a) \frac{\Delta x_T}{l}} \\ \beta_{CT}^* = \frac{m_{y_0}^* + \frac{C_x}{l} \Delta z^*}{(C_x + C_z^\beta) \frac{\Delta x_T}{l}} \end{cases}$$

总配平攻角 $\eta_{CT}^* = \sqrt{a_{CT}^{*2} + \beta_{CT}^{*2}}$ 在 F_{CT_0} 平面内, 而只有重心偏移的配平角 η_T^* 在 F_{T_0} 平面内。

对 oy_1z_1 的配平角为

$$\begin{cases} a_{CT} = \frac{m_{z_0} - \frac{C_x}{l} \Delta y}{(C_x + C_y^a) \frac{\Delta x_T}{l}} \\ \beta_{CT} = \frac{m_{y_0} - \frac{C_x}{l} \Delta z}{(C_x + C_z^\beta) \frac{\Delta x_T}{l}} \end{cases}$$

总攻角 $\eta_{CT} = \sqrt{a_{CT}^2 + \beta_{CT}^2} = \eta_{CT}^*$ 亦在 F_{CT_0} 平面内, 此平面以角速度 $\dot{\gamma}_0$ 对 oy_1z_1 旋转, 如果设 F_{CT_0} 和 F_{T_0} 两平面之间的夹角为 ϕ_0 , 则

$$\phi_0 = \psi_{CT_0} - \psi_{T_0} = \psi_{CT_0}^* - \psi_{T_0}^*$$

$$\phi = \phi_0 + \Delta\psi$$

关于不慢旋弹头，在文献[1]中，已作过详细的讨论，这里研究慢旋弹头的情况。将气动力不对称影响分成在 FT_0 平面内和不在 FT_0 平面内两种情况来讨论。

(i) 气动力不对称引起的总配平攻角在 FT_0 平面内 (即 $\phi_0 = 0^\circ$ 或 $\phi_0 = 180^\circ$)。

a) $\phi_0 = 0^\circ$ ，此种情况与只有等效重心偏移时的情况相同，最后 ω_{x_1} 稳定在 ω_1 ，不会发生滚动共振。

b) $\phi_0 = 180^\circ$ ，如图 10 所示，仍设当 $\omega_{x_1} = 0$ 时， $\text{tg} \Delta\psi = \frac{I_x \dot{\gamma}_0 C_y^a}{I} \frac{\rho v S}{2m} > 0$ ，产生负的滚动力矩，使 $\omega_{x_1} \downarrow$ ，此时 $\omega_{x_1} < 0$ ，满足(61)式，直至 $f_2 = 0$ ， $\omega_{x_1} = \omega_{22}$ 时， $\Delta\psi = \frac{\pi}{2}$ ，力臂最大， ω_{x_1} 继续下降， $f_2 < 0$ ，满足(62)式， $\text{tg} \Delta\psi < 0$ ， $\Delta\psi > \frac{\pi}{2}$ 在第二象限，仍产生负的滚动力矩，使 $\omega_{x_1} \downarrow$ 直至 $\omega_{x_1} \rightarrow -\infty$ 。

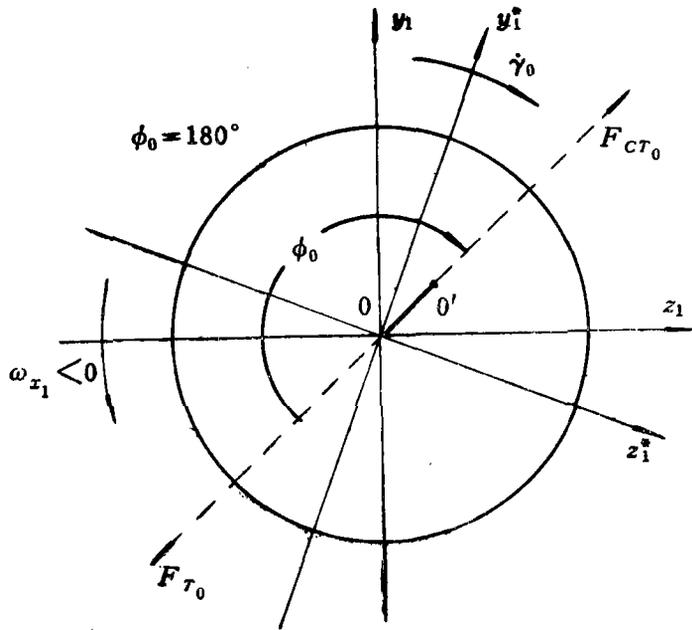


图 10

(ii) 气动力不对称引起的总配平攻角在 FT_0 平面外 (只研究 $\phi_0 = 90^\circ$ 和 $\phi_0 = 270^\circ$ 两种特殊情况)。

a) $\phi_0 = 90^\circ$ ，如图 11 所示，仍设 $\dot{\gamma}_0 > 0$ 。当 $\omega_{x_1} = 0$ 时， $\Delta\psi > 0$ ，产生正滚动力矩，使 $\omega_{x_1} \uparrow$ ，由于 ω_{x_1} 很小， $f_1 > 0$ ， $f_2 > 0$ ；则 $\Delta\psi > 0$ ， ω_{x_1} 继续递增至 $\omega_{x_1} = \omega_1$ 时， $\Delta\psi = 0$ 。此时力臂最大，产生正的滚动力矩， $\omega_{x_1} > \omega_1$ ， $f_1 < 0$ 则 $\Delta\psi < 0$ ，仍产生正的滚动力矩。

使 ω_{x_1} 继续递增。至 $f_2 = 0$ 时， $\omega_{x_1} = \omega_{21}$ ， $\Delta\psi = -\frac{\pi}{2}$ ，在 FT_0 方向上，产生的力矩为

零, ω_{x_1} 停止递增。如果由于某种原因 ω_{x_1} 继续上升, 则 $f_1 < 0, f_2 < 0, \Delta\psi < -\frac{\pi}{2}$, 产生

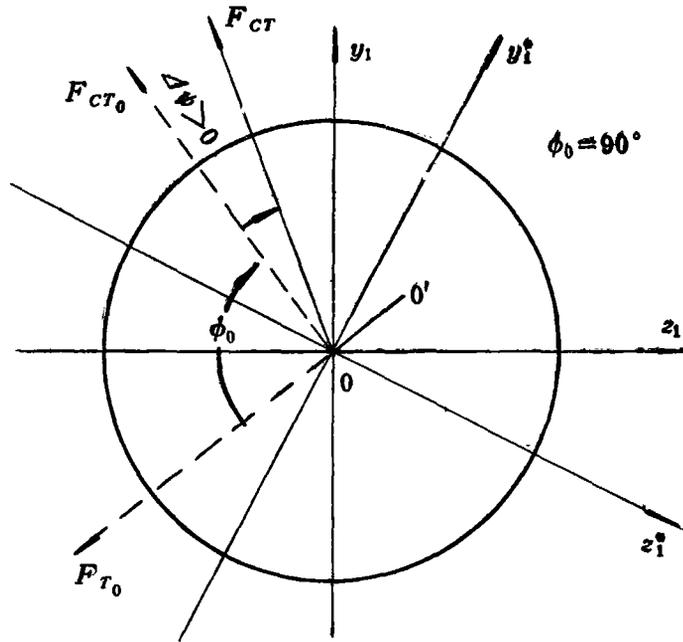


图 11

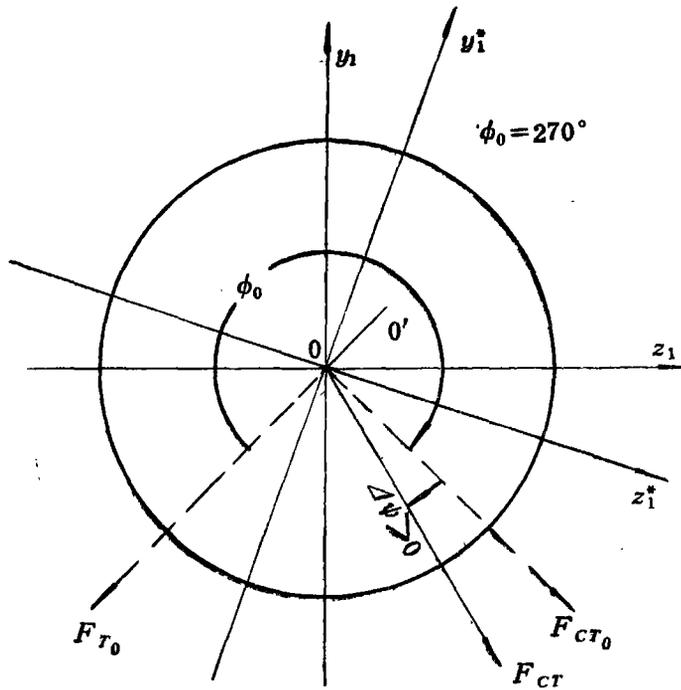


图 12

负的滚动力矩, 使 $\omega_{x_1} \downarrow$, 故 ω_{x_1} 稳定在 ω_{21} , 发生滚动共振。

b) $\phi_0 = 270^\circ$, 如图 12 所示, 仍设 $\dot{\gamma}_0 > 0$. 当 $\omega_{x_1} = 0$ 时, $\Delta\psi > 0$, 产生负滚动力

矩,使 $\omega_{x_1} \downarrow$, 此时 $\omega_{x_1} < 0$, 由于 $|\omega_{x_1}|$ 很小, $f_2 > 0$, $\Delta\psi > 0$, ω_{x_1} 继续下降, 至 $\omega_{x_1} = \omega_{22}$ 时, $\Delta\psi = \frac{\pi}{2}$, 在 F_{T_0} 方向上, 产生力矩为零。如果由于某种原因使 ω_{x_1} 继续下降, $f_2 < 0$, 满足(62)式, $\Delta\psi > \frac{\pi}{2}$, 产生正的滚动力矩, 使 $\omega_{x_1} \uparrow$, 使 ω_{x_1} 稳定在 ω_{22} 上, 发生滚动共振。

以上定性地讨论了组合不对称的影响, 可以看出由于弹头旋转, 其稳态值与 $\dot{\gamma}_0$ 有关, 但其动态特性与不慢旋弹头相似, 为了进一步了解组合不对称的影响, 进一步进行定量的研究。

第二步: 定量的研究不对称因素引起的动态过程。

在略去滚动阻尼力矩的情况下, 由(24)式第一式知;

$$\dot{\omega}_{x_1} = (C_x + C_x^\beta) \frac{\rho v^2}{2I_x} s \beta \Delta y + (C_x + C_y^\alpha) \frac{\rho v^2}{2I_x} s \alpha \Delta z = \frac{F_{z_1} \Delta y + F_{y_1} \Delta z}{I_x} \quad (64)$$

由图9可知

$$F_{z_1} \Delta y + F_{y_1} \Delta z = F_{CT} C_2 \sin \phi \quad (65)$$

则(64)式可写成

$$\dot{\omega}_{x_1} = \frac{F_{CT} \sin \phi}{I_x} = \left[(C_x + C_y^\alpha) \frac{\rho v^2}{2I_x} s \eta_{OCT} \right] \frac{\eta_{CT} C_2 \sin \phi}{\eta_{OCT}} \quad (66)$$

定义

$$\left\{ \begin{array}{l} G = \left| \frac{\eta_{CT}}{\eta_{OCT}} \right| \sin \phi = R^* \sin \phi \\ \dot{\omega}_{x_m} = (C_x + C_y^\alpha) \frac{\rho v^2}{2I_x} s \eta_{OCT} C_2 \end{array} \right. \quad (67)$$

式中: η_{OCT} 表示弹头不旋转时的总攻角; η_{CT} 表示慢旋弹头的总攻角; G 表示滚动角速度和 ϕ 综合影响; $\dot{\omega}_{x_m}$ 表示当 $\omega_{x_1} = 0$ 时 η_{OCT} 所在平面垂直于重心偏移所在平面条件下的滚动角加速度。则

$$\dot{\omega}_{x_1} = G \dot{\omega}_{x_m} \quad (68)$$

由于

$$\Phi = \phi_0 + \Delta\psi \quad (69)$$

则

$$G = \frac{(1 - T^{*2}) \sin \phi_0 - \xi^* T^* \cos \phi_0}{(1 - T^{*2})^2 + \xi^{*2} T^{*2}} \quad (70)$$

如果把 $\dot{\omega}_{x_1} = 0$ 定义为滚动平衡条件, 由于 $\dot{\omega}_{x_m} \neq 0$, 则 $G = 0$ 。这也就是说在再入过程中, 滚动角速度一直变化至 $G = 0$ 时的 $T^* = T_0^*$, 则由(70)式有两种可能:

(i) $T_0^* \rightarrow \pm \infty$

(ii) $\text{tg } \phi_0 = \frac{\xi^* T^*}{1 - T^{*2}}$ 即 $T_0 = \frac{-\xi^* \text{ctg } \phi_0 \pm \sqrt{(\xi^* \text{ctg } \phi_0)^2 + 4}}{2}$ (71)

如果是接近平面内不对称 ($\phi_0 \approx 0$ 或 180°), 则 $|\xi \text{ctg } \phi_0|$ 很大, $T_0^* \rightarrow 0$, 由(44)式知此时

或者 $\omega_{x_1} = 0$, 或者 $\omega_{x_1} = \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I - I_x}$, 如果是平面外不对称 (如果只研究 $\phi_0 \approx 90^\circ$ 或 270°),

则 $|\xi^* \operatorname{ctg} \phi_0|$ 很小,

$$T_0^* = 1 - \frac{\xi^*}{2} \operatorname{ctg} \phi_0 \text{ 或 } T_0^* = - \left(1 + \frac{\xi^*}{2} \operatorname{ctg} \phi_0 \right) \quad (72)$$

将 T_0^* 代入(44)式, 即可求出滚动角速度的稳态值,

$$\omega_{x_1} = \frac{I_x}{2(I - I_x)} \dot{\gamma}_0 \pm \sqrt{\frac{I_x^2}{4(I - I_x)^2} \dot{\gamma}_0^2 + \frac{I}{I - I_x} T_0^{*2} \omega_A^2} \quad (73)$$

故 ω_{x_1} 的稳态值, 不仅与 $\dot{\gamma}_0$, h 有关, 而且与 ϕ_0 有关。

为了判别当 $T^* = T_0^*$ 时稳态值是否稳定的条件是:

$$\frac{dG}{dT^*} = \frac{2T^* \sin \phi_0 [(1 - T^{*2})^2 - \xi^{*2}] - \xi^* \cos \phi_0 [1 + (2 - \xi^{*2})T^{*2} - 3T^{*4}]}{[(1 - T^{*2})^2 + \xi^{*2}T^{*2}]^2} < 0$$

如果是在平面内不对称 ($\phi_0 = 0^\circ$ 或 180°), 则稳定条件为

$$-\xi^* \cos \phi_0 [1 + (2 - \xi^{*2})T^{*2} - 3T^{*4}] < 0 \quad (74)$$

由于此时 $T^* \approx 0$, 故当 $\phi_0 = 0$ 时是稳定的, 而 $\phi_0 = 180^\circ$ 时是不稳定的。

如果是平面外不对称 (设 $\phi_0 = 90^\circ$ 或 270°), 则稳定条件变为

$$2T^* \sin \phi_0 [(1 - T^{*2})^2 - \xi^{*2}] < 0 \quad (75)$$

当 $T^* = 1$, $\phi_0 = 90^\circ$ 时是稳定的, 此时

$$\omega_{x_1} = \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{2(I - I_x)} + \sqrt{\frac{I_x^2}{4(I - I_x)^2} \dot{\gamma}_0^2 + \frac{I}{I - I_x} \omega_A^2} = \omega_{21} \quad (76)$$

和 $T^* = -1$, $\phi_0 = 270^\circ$ 时是稳定的, 此时

$$\omega_{x_1} = \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{2(I - I_x)} - \sqrt{\frac{I_x^2}{4(I - I_x)^2} \dot{\gamma}_0^2 + \frac{I}{I - I_x} \omega_A^2} = \omega_{22} \quad (77)$$

而当 $T^* = -1$, $\phi_0 = 90^\circ$, $\omega_{x_1} = \omega_{22}$; 和 $T^* = 1$, $\phi_0 = 270^\circ$, $\omega_{x_1} = \omega_{21}$ 都是不稳定的。

由 $\frac{dG}{dT^*} = 0$, 可求出 G 的极值 G_m , 由

$$\frac{dG}{dT^*} = \frac{2T^* \sin \phi_0 [(1 - T^{*2})^2 - \xi^{*2}] - \xi^* \cos \phi_0 [1 + (2 - \xi^{*2})T^{*2} - 3T^{*4}]}{[(1 - T^{*2})^2 + \xi^{*2}T^{*2}]^2} = 0$$

此时

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{\xi^* [1 + (2 - \xi^{*2})T^{*2} - 3T^{*4}]}{2T^* [(1 - T^{*2})^2 - \xi^{*2}]}$$

对于在平面内不对称 ($\phi_0 = 0^\circ$ 或 180°) 情况

$$3T^{*4} - (2 - \xi^{*2})T^{*2} - 1 = 0$$

$$T^* = \pm \sqrt{\frac{(2 - \xi^{*2}) + \sqrt{16 - 4\xi^{*2} + \xi^{*4}}}{6}}$$

由于 $\xi^* \ll 1$, 略去 ξ^{*4} 则

$$T^* = \pm \left(1 - \frac{\xi^{*2}}{8} \right)$$

$$G_m = \mp \frac{\left(1 - \frac{\xi^{*2}}{8}\right) \cos \phi_0}{\xi^*} \approx \mp \frac{\cos \phi_0}{\xi^*} = \begin{cases} \frac{1}{\xi^*} \text{ 当 } \phi_0 = 0, T^* = -1 \text{ 时} \\ -\frac{1}{\xi^*} \text{ 当 } \phi_0 = 0, T^* = +1 \text{ 时} \\ -\frac{1}{\xi^*} \text{ 当 } \phi_0 = 180^\circ, T^* = -1 \text{ 时} \\ \frac{1}{\xi^*} \text{ 当 } \phi_0 = 180^\circ, T^* = +1 \text{ 时} \end{cases} \quad (78)$$

对于在平面外不对称 (设 $\phi_0 = 90^\circ$ 或 270°) 则

$$(1 - T^{*2})^2 - \xi^{*2} = 0$$

$$T^* = \pm \sqrt{1 \pm \xi^*}$$

$$G_m = \mp \frac{\sin \phi_0}{\xi^*(2 \pm \xi^*)} = \mp \frac{\sin \phi_0}{2\xi^*} = \begin{cases} \frac{1}{2\xi^*} \text{ 当 } \phi_0 = 90^\circ, T^* = \pm \sqrt{1 - \xi^*} \text{ 时} \\ -\frac{1}{2\xi^*} \text{ 当 } \phi_0 = 90^\circ, T^* = \pm \sqrt{1 + \xi^*} \text{ 时} \\ -\frac{1}{2\xi^*} \text{ 当 } \phi_0 = 270^\circ, T^* = \pm \sqrt{1 - \xi^*} \text{ 时} \\ \frac{1}{2\xi^*} \text{ 当 } \phi_0 = 270^\circ, T^* = \pm \sqrt{1 + \xi^*} \text{ 时} \end{cases} \quad (79)$$

由以上叙述可以看出, 当使弹慢旋时, 弹的临界频率 $\omega_{x_{1cp}}$ 与稳定频率不一致。当 $\phi_0 = 90^\circ$ 时, ω_{x_1} 的稳态值为 ω_{21} , 而 $\phi_0 = 270^\circ$ 时, ω_{x_1} 的稳态值为 ω_{22} 。

实际上, 在飞行过程中, 由于不对称因素的影响, ω_{x_1} 只会锁定在稳态值, 而不会锁定在临界频率值。王本合同同志用稳态值当 $\dot{\gamma}_0 = 2\pi/\text{秒}$ 时, 对不同的 ϕ_0 情况计算了 R^* 曲线, 如图 13, 可以看出, 在高空 R^* 值两者区别较大, 而在低空两者比较接近, 但由于在高空空气密度小, 故由此而引起的过载, 两者区别不大。

2) 慢旋再入弹头不对称引起持续滚动共振的条件。

现在研究第二个问题, 即在什么条件下才会出现持续滚动共振。由于临界频率 $\omega_{x_{1cp}}$ 是随着 ω_A 的变化而变化的, 如图 4 所示, 可以看出, 在 h^* 以前 $\omega_{x_{1cp}}$ 是递增的, $\dot{\omega}_{x_{1cp}} > 0$, 在 h^* 以后 $\omega_{x_{1cp}}$ 是递减的, $\dot{\omega}_{x_{1cp}} < 0$, 当 $\omega_{x_1} = \omega_{x_{1cp}}$ 时出现暂态滚动共振后, 如果 ω_{x_1} 的变化能跟得上 $\omega_{x_{1cp}}$ 的变化, 则会出现频率锁定现象, 故发生持续滚动共振的必要条件是:

$$\text{当 } h > h^* \text{ 时, } \dot{\omega}_{x_1} > \dot{\omega}_{x_{1cp}}$$

$$\text{当 } h < h^* \text{ 时, } \dot{\omega}_{x_1} < \dot{\omega}_{x_{1cp}}$$

也即是要求

$$|\dot{\omega}_{x_1}| \geq |\dot{\omega}_{x_{1cp}}| = \frac{|\dot{\omega}_A|}{\sqrt{\left(1 - \frac{I_x}{I}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{I_x^2}{I^2}\right) \dot{\gamma}_0^2 \omega_A^2}}$$

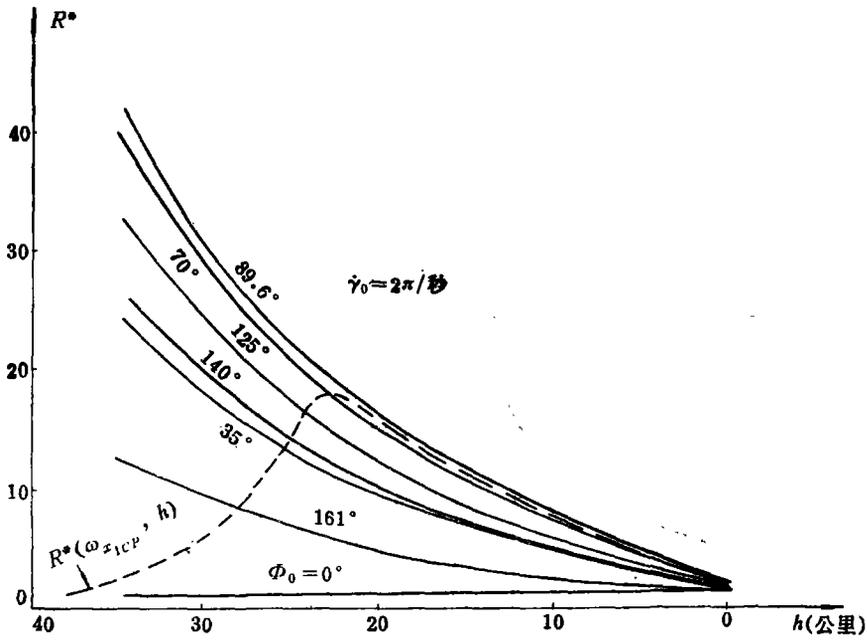


图 13

即是当

$$\left| \frac{\dot{\omega}_{x_1}}{\dot{\omega}_A} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{I_x}{I}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{I_x^2}{I^2}\right) \frac{\dot{\gamma}_0^2}{\omega_A^2}}} \quad (80)$$

由参考文献[2]知

$$\begin{cases} \omega_A = \left(\frac{-\beta_d k v_e \sin \theta_T}{2\pi} \right) e^{-\left(K_0 e^{-\beta_d h} + \frac{\beta_d h}{2}\right)} \\ \dot{\omega}_A = \frac{\pi}{k} (1 - K_0 e^{-\beta_d h}) e^{\frac{\beta_d h}{2}} \omega_A^2 \end{cases} \quad (81)$$

代入(68)式

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{x_1} &= G \dot{\omega}_{x_m} = G (C_x + C_y) \frac{\rho_0 v_e^2}{2I_x} s C_2 \eta_0 e^{-\left(K_0 e^{-\beta_d h} + \beta_d h\right)} \\ &= \left(\frac{2(C_x + C_y) \rho_0 s C_2 \eta_0 \pi^2}{I_x \beta_d^2 k^2 \sin^2 \theta_T} \right) \omega_A^2 G \end{aligned} \quad (82)$$

将(81)、(82)式代入(80)式, 且令 $G = G_m \approx \frac{K}{\xi^*}$ (当 $\phi_0 = 0, 180^\circ$ 时, $K = \pm 1$; $\phi_0 = 90^\circ$,

270° 时 $K = \pm \frac{1}{2}$), 并将 ξ^* 表达式代入, 则

$$|C_2\eta_0K| \geq \left(\frac{-I_x\beta_d \sin\theta_T}{C_x + C_y} \right) \frac{-\frac{m_z \omega_{x1} l}{2I} + \left[\left(1 - \frac{I_x}{I}\right) - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I\omega_{x1}} \right] \frac{C_y^a}{2m}}{\sqrt{\left[\left(1 - \frac{I_x}{I}\right) - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I\omega_{x1}} \right] \left[\left(1 - \frac{I_x}{I}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{I_x^2}{I^2}\right) \frac{\dot{\gamma}_0^2}{\omega_A^2} \right]}} |1 - K_0 e^{-\beta_d h}| \quad (83)$$

式中 ω_{x1} 为产生滚动共振的旋转角速度, 由(42)式

$$\begin{cases} \frac{\dot{\gamma}_0^2}{\omega_A^2} = \left(\frac{2\pi}{-\beta_d k v_e \sin\theta_T} \right)^2 e^{(K_0 e^{-\beta_d h} + \beta_d h)} \dot{\gamma}_0^2 \\ \frac{\omega_{x1}}{\dot{\gamma}_0} = -\frac{(I - 2I_x)}{2(I - I_x)} \pm \sqrt{\frac{I}{I - I_x} \frac{\omega_A^2}{\dot{\gamma}_0^2} - \frac{(3I - 4I_x)I}{4(I - I_x)^2}} \end{cases} \quad (84)$$

如果令

$$\Phi(\dot{\gamma}_0, h) = \left(\frac{-I_x\beta_d \sin\theta_T}{C_x + C_y} \right) \frac{-\frac{m_z \omega_{x1} l}{2I} + \left[\left(1 - \frac{I_x}{I}\right) - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I\omega_{x1}} \right] \frac{C_y^a}{2m}}{\sqrt{\left[\left(1 - \frac{I_x}{I}\right) - \frac{I_x \dot{\gamma}_0}{I\omega_{x1}} \right] \left[\left(1 - \frac{I_x}{I}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{I_x^2}{I^2}\right) \frac{\dot{\gamma}_0^2}{\omega_A^2} \right]}} \quad (85)$$

则

$$|C_2\eta_0K| \geq \Phi(\dot{\gamma}_0, h) |1 - K_0 e^{-\beta_d h}| \quad (86)$$

可以看出, 如果 $\dot{\gamma}_0 = 0$, 则

$$\Phi(0, h) = \frac{-\frac{m_z \omega_{x1} l}{2I} - \left(1 - \frac{I_x}{I}\right) \frac{C_y^a}{2m}}{\left(1 - \frac{I_x}{I}\right)} \quad (87)$$

为与高度无关的常数。故如以 $K_0 e^{-\beta_d h}$ 为自变量, 则其界线为直线, 关于(87)式, 文献[1]有详细的研究。

如果 $\dot{\gamma}_0 \neq 0$, 则 $\Phi(\dot{\gamma}_0, h)$ 是 $\dot{\gamma}_0$ 和 h 的函数。如果令

$$\Omega = \frac{\dot{\gamma}_0}{\omega_{x1cp}} \quad (88)$$

$$\text{则} \quad \frac{\dot{\gamma}_0^2}{\omega_A^2} = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \left(1 - 2\frac{I_x}{I}\right)\Omega + \left(1 - \frac{I_x}{I}\right)} \quad (89)$$

$$\Phi(\dot{\gamma}_0, h) = \Phi(\Omega) \quad (90)$$

故 Φ 只是 $\Omega = \frac{\dot{\gamma}_0}{\omega_{x1cp}}$ 的函数, 当选择不同的 $\dot{\gamma}_0$, 在不同高度上, 根据(42)式, 求出对应于此高度的滚动共振频率 ω_{x1cp} , 即可求出 $\Phi(\dot{\gamma}_0, h)$, 利用(86)式, 可以研究旋转角速度 $\dot{\gamma}_0$ 对可能发生的持续滚动共振区的影响, 如图 14 所示。

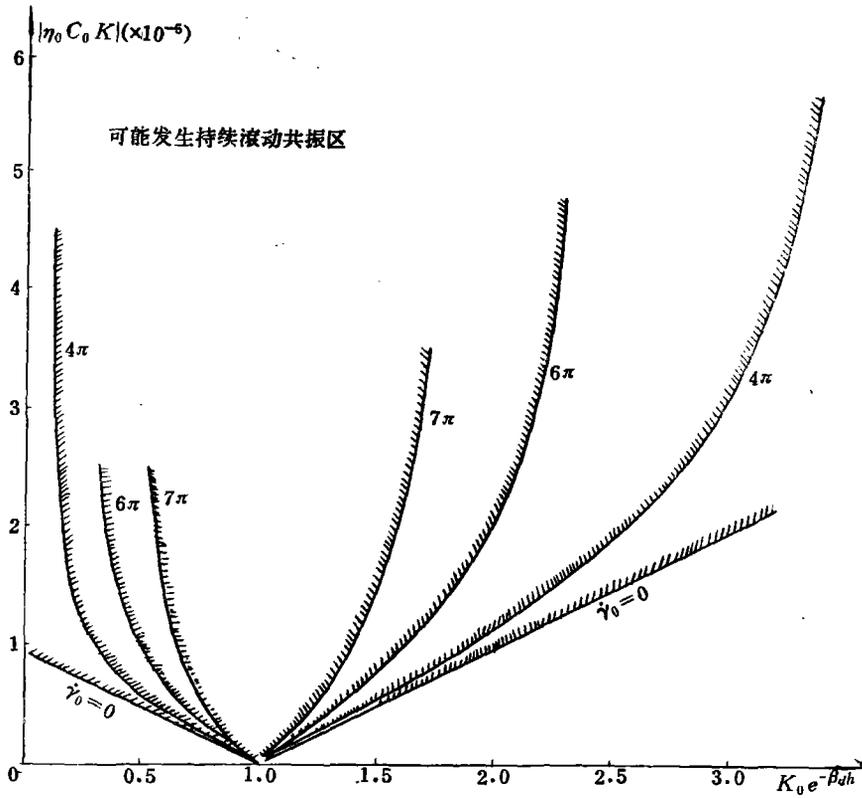


图 14

五、几点结论

由以上叙述可以看出,使弹头旋转,会产生以下影响:

1) 改变了滚动共振的临界频率

$$\omega_{x_{1cp}} = -\frac{I - 2I_x}{2(I - I_x)} \dot{\gamma}_0 \pm \sqrt{\frac{I}{I - I_x} \omega_A^2 - \frac{(3I - 4I_x)I}{4(I - I_x)^2} \dot{\gamma}_0^2}$$

且由于 $\dot{\gamma}_0$ 的影响, ω_{x_1} 的稳态值不发生在 $\omega_{x_{1cp}}$, 且 $\dot{\gamma}_0$ 愈大, 稳态值与临界值相差愈大, 而其振幅则愈小。

2) 改变了相对阻尼系数 ζ^* 和放大因子 R^* , 如果选择较大的 $\dot{\gamma}_0$ 可使 R^* 较小。我们知道滚动共振之所以危险而必须设法避免者, 是因为在发生共振时, 会引起较大的横向过载, 如果 R^* 较小, (例如等于 1), 则发生共振后的过载与直接由不对称因素而引起的过载值相接近。这是强度所能允许的。所以适当增大慢旋角速度 $\dot{\gamma}_0$ 是有利的, 有一种意见认为 $\dot{\gamma}_0$ 愈大, 则可能发生的滚动共振的高度愈低, 其所对应的速度头也愈大, 因此断言增大 $\dot{\gamma}_0$ 是不利的, 实际上, 过载主要取决于放大因子 R^* 。如果 R^* 比较小, 则引起的过载不会很大。

3) 如果选择

$$|\dot{\gamma}_0| > \frac{k}{\sqrt{K_0}} \left| \frac{-\beta_d v_0 e^{-\frac{1}{2}\beta_d t} \sin \theta_T}{2\pi} \right| \sqrt{\frac{4(I - I_x)}{(3I - 4I_x)}}$$

则在再入过程中,不会发生滚动共振。这会发生两个问题:

i) 所要求的 $|\dot{\gamma}_0|$ 较大(通常可达到4周/秒)。存在需要增加起旋发动机重量,和离心加速度过大的缺点。

ii) 有人担心在选择这样大的 $\dot{\gamma}_0$ 情况下,如果在飞行过程中由于烧蚀或其他因素影响,引起滚动共振必然发生在最大速度头附近,这是很危险的,其实前已说明,此时 R^* 较小,由此而引起的过载不会很大,不会出现危险,反之如果 $\dot{\gamma}_0$ 较小甚至 $\dot{\gamma}_0=0$,则由图5和图7可以看出 R^* 可达36,过载可达到25.5(g),是非常危险的。

4) 缩小了“可能发生持续滚动共振区”。 $\dot{\gamma}_0$ 愈大,区域愈小。这里我们没有考虑滚动阻尼力矩和转动惯量不对称的影响。如果将二者考虑进去,“可能发生持续滚动共振区”还会有相应的变化。本文不进行研究。

参 考 文 献

- [1] L. S. Glover, J. C. Hagen, "The motion of ballistic missiles", AD 731662.
- [2] 导弹飞行力学,国防科技大学303教研室。
- [3] J. J. Pettus, "Persistent Re-entry vehicle roll resonance", AIAA pp 66—69, 1966.
- [4] Migotsky. E. "On a criterion for persistent re-entry vehicle roll resonance", AIAA pp 67—137, 1967.
- [5] L. S. Glover, "Effects on roll rate of mass and aerodynamic asymmetries for ballistic re-entry bodies", Journal of Aerospace and Rockets, Vol. 2 No. 2, 1965.
- [6] 程国采,旋转弹头动态特性的研究,国防科技大学《工学学报》,1978年2期。

A Study of the Characteristics of the Roll Resonance of an Asymmetrical Re-entry Vehicle

Cheng Guo-cai

Abstract

This paper is a report on study of the characteristics of the roll resonance of an asymmetrical re-entry vehicle. The equations of motion are described in a coordinate system which does not spin with the vehicle.

The effects of the spinning of the asymmetrical vehicle on the persistent roll resonance has been studied with the linearization method. Also a formula of spinning speed is derived to avoid the persistent roll resonance.

It is show that the region in which the persistent roll resonance may occur will vary with the spinning speed when it is more slow.