

导弹落点散布的序贯概率比 (SPR) 检验的随机模拟

常兆诚 梁 鸣* 郭振华*

提 要 本文简述了对导弹落点散布的 SPR 检验的随机模拟的步骤和计算公式。对于落点的标准偏差进行了序贯截尾和不截尾的随机模拟,并对所得结果进行了初步的分析。分析表明:通过随机模拟得到的 OC 函数 $L^*(\sigma)$ 优于由近似公式计算的 $L(\sigma)$, 而 $E_o^*(n)$ 比 $E_o(n)$ 要大, 所以在选择参数 α 、 β 和 λ 时利用 $L^*(\sigma)$ 和 $E_o^*(n)$, 同时参考 $L(\sigma)$ 和 $E_o(n)$ 比较好。本文对截尾方案进行了讨论, 对某些问题提出了一些看法。

引 言

我们知道导弹飞行试验的特点是: 试验的昂贵性、一次性、复杂性和科学性。根据这些特点飞行试验的次数不可能很多, 即我们得到的由导弹落点所构成的子样是一个小子样。在此基础上进行导弹落点散布分析时, 为了充分利用子样信息, 尽量减少试验次数, 一般采用序贯分析的方法。在参考文献 [2]、[5] 中, 对导弹纵向落点的 σ 运用 SPR 检验作了较详细的分析。本文考虑若能在试验前, 通过在数字计算机上进行随机模拟试验, 就能对导弹落点的 SPR 检验情况有一个概貌的了解。这对我们确定检验方案 (序贯截尾或不截尾方案, 采用何种截尾方案), 选择参数 (如 α 、 β 、 λ), 估计试验数 n 落在某区间 $[n_1, n_2]$ 的概率 $P\{n_1 < n < n_2\}$, 都提供了有益的参考。

本文以导弹纵向落点为例, 讨论其散布的 SPR 检验的随机模拟。一般来说国家给定指标 E_x , 通过导弹飞行试验在一定的犯两类错误的概率 α 、 β 之下, 检验能否接受该指标。由

$$\sigma_x = 1.4815 E_x \triangleq \sigma_0 \quad (1)$$

提出假设: $H'_0: \sigma \leq \sigma_0$; $H'_1: \sigma > \sigma_0$

这是一个复杂假设问题, 常常简化为下面互相竞择的简单假设:

$$\begin{aligned} H_0: \sigma &= \sigma_0 \\ H_1: \sigma &= \sigma_1 = \lambda \sigma_0 \quad (\lambda > 1) \end{aligned} \quad (2)$$

本文正是在这一假设之下, 讨论了对导弹落点散布的 SPR 检验 (以下简称 σ 的 SPR 检验) 和截尾的 SPR 检验的随机模拟。

§1 对 σ 的 SPR 检验进行随机模拟的步骤及计算公式

我们取正态 $N(\mu, \sigma^2)$ 分布的伪随机数 $x_i (i=1, 2, \dots)$ 模拟导弹的实际落点。在假设 (2) 之下, 给定 α 和 β 。若 $m-1$ 次试验 (即取 $m-1$ 个随机数) 后, σ 的 SPR 检验还没有作出判断, 再取 x_m 进行下列 SPR 检验,

$$\text{当} \quad \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \leq a_m \quad (1.1)$$

时, 采纳假设 H_0 , 试验终止。当

$$\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \geq r_m \quad (1.2)$$

时, 拒绝假设 H_0 , 试验终止。当

$$a_m < \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 < r_m \quad (1.3)$$

时, 试验继续进行, 即取下一个随机落点 x_{m+1} 。其中,

$$a_m = h_0 + m \cdot s \quad (1.4)$$

$$r_m = h_1 + m \cdot s \quad (1.5)$$

$$S = \frac{2\sigma_0^2 \log \lambda}{1 - \lambda^{-2}} \quad (1.6)$$

$$h_0 = \frac{2\sigma_0^2 \log B}{1 - \lambda^{-2}} - s \quad (1.7)$$

$$h_1 = \frac{2\sigma_0^2 \log A}{1 - \lambda^{-2}} - s \quad (1.8)$$

$$A = \frac{1 - \beta}{\alpha}, \quad B = \frac{\beta}{1 - \alpha} \quad (1.9)$$

S 为直线 $L_0: a_m = h_0 + m \cdot s$ 和直线 $L_1: r_m = h_1 + m \cdot s$ 的公共斜率。记

$$S_m = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2,$$

它可由递推公式

$$S_m = S_{m-1} + \frac{1}{m(m-1)} \left[(m-1)x_m + \sum_{i=1}^m x_i \right]^2 \quad (1.10)$$

计算。当试验终止时, 记下判断结果 (接受或拒绝 H_0) 和终止试验数 n_i , 这就算作一次 σ 的 SPR 检验的随机模拟。重复上法进行 $N (N \gg 1)$ 次随机模拟, 则得到 N 个终止试验数 n_1, \dots, n_N 。由大数定理知

$$E_{\sigma}^*(n) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i \quad (1.11)$$

$$D_{\sigma}^*(n) \cong \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (n_i - E_{\sigma}^*(n))^2 \quad (1.12)$$

计算 N 次随机模拟中采纳 H_0 的次数 ν , 则用二项分布参数的估计方法, 易知

$$L^*(\sigma) = P\{\text{采纳 } H_0 \mid \sigma \text{ 为真}\} \cong \frac{\nu}{N} \quad (1.13)$$

为了作出试验数 n 的经验分布函数 $F^*(n)$, 对于给定的正数 $n^{(0)}$, 计算 $n_i (i=1, \dots, N)$ 中小于 $n^{(0)}$ 的个数 $m^{(0)}$, 于是由 Bernoulli 定理知

$$F^*(n) = P\{n < n^{(0)}\} \cong \frac{m^{(0)}}{N} \quad (1.14)$$

§2 σ 的 SPR 检验的随机模拟及结果分析

我们取 $\alpha = \beta = 0.05$, $\lambda = 1.5$, $\sigma_0 = 2.23$, $N = 200$, 对 σ 的 SPR 检验进行随机模拟, 并将所得结果绘制成曲线。在图 1 中, 绘制了 $L(\sigma)$ 、 $L^*(\sigma)$ 和截尾情况下 (具体参数见下文) 的 $L^{**}(\sigma)$ 三种曲线。其中 $L(\sigma)$ 是由下列公式计算

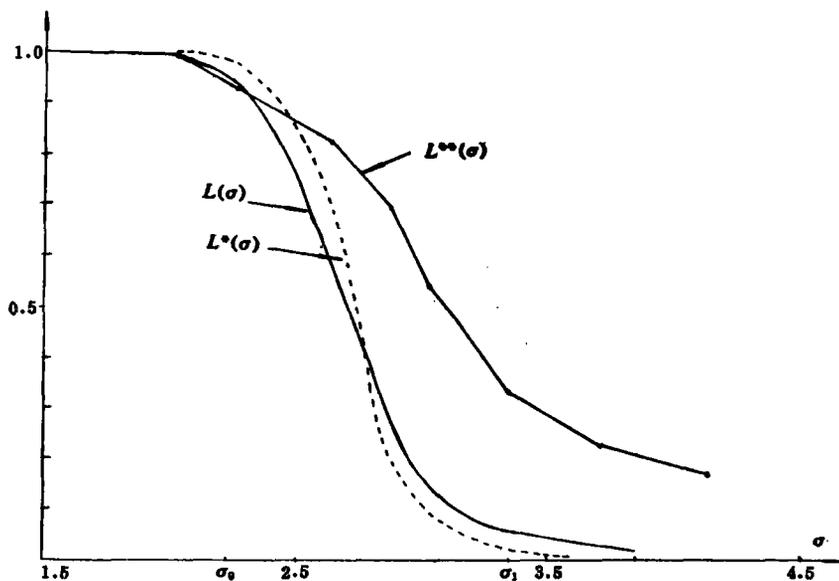


图 1

$$\begin{cases} L(\sigma) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h} \\ \sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{1 - \lambda^{-2h}}{h(1 - \lambda^{-2})}} \end{cases} \quad (E_0(z) \neq 0) \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} L(\sigma) = \frac{\log A}{\log A - \log B} \\ \sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{2 \log \lambda}{1 - \lambda^{-2}}} \end{cases} \quad (E_0(z) = 0) \quad (2.2)$$

在图2中, 我们绘制了 $E_o(n)$ 、 $E_o^*(n)$ 和 $E_o^{**}(n)$, 其中 $E_o(n)$ 是由下列公式计算

$$E_o(n) \cong \begin{cases} \frac{L(\sigma)(\log B - \log A) + \log A}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\sigma^2 - \log \lambda} + 1 & (E_o(z) \neq 0) \\ \frac{-\log A \cdot \log B}{2(\log \lambda)^2} + 1 & (E_o(z) = 0) \end{cases} \quad (2.3)$$

由这些计算, 我们可以看到:

1) $L^*(\sigma)$ 比 $L(\sigma)$ 要陡一些, 这正是我们所希望的。模拟检验得到的 $\alpha' = 1 - L^*(\sigma_0)$ 和 $\beta' = L^*(\sigma_1)$ 均比我们给定的 α 和 β 要小, 我们重复进行了4次模拟检验, 得到的数据如下表

次数 \ 参数	1	2	3	4
α'	0.03	0.015	0.02	0.025
β'	0.04	0.015	0.04	0.025

这些参数表明: $\alpha' + \beta' < \alpha + \beta$ 这一点是与参考文献 [1] 中第八章 §2 的结论相符合。分析其原因, 这是因为我们在取边界 A 和 B 时采用了较保守的作法, 实际上 A 、 B 满足不等式

$$A \leq \frac{1-\beta}{\alpha}; \quad B \geq \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (2.4)$$

由此无法给出确定的 A 、 B , 我们根据 Wald 的建议, 取

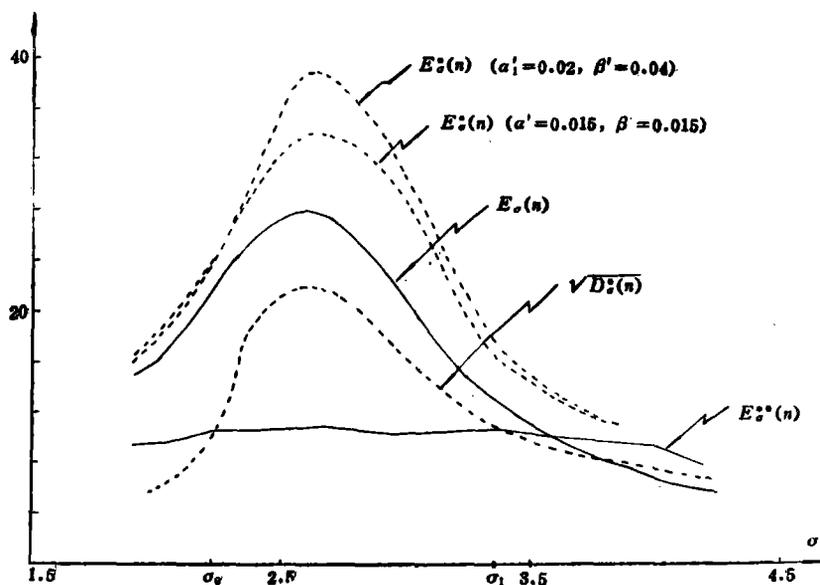


图 2

$$A = \frac{1 - \beta}{\alpha}; \quad B = \frac{\beta}{1 - \alpha} \quad (2.5)$$

这一取法使继续试验区扩大, 所得到的检验比正确的 A 、 B 为边界的检验更强。这种情况是有利于我们的, 比如, 我们希望试验次数再少些时, 可适当增大 α 、 β , 而 α' 、 β' 仍然符合要求。

2) 在图 2 中, 可以看到 $E_{\sigma}^*(n)$ 全都比由近似公式 (2.3) 计算的 $E_{\sigma}(n)$ 要大, 最大相差在 11 左右, 可见在试验前由 (2.3) 式计算的 $E_{\sigma}(n)$ 是实际的 $E_{\sigma}(n)$ 的下界。分析产生此种情况的原因有两方面: 一方面按 (2.5) 式选取的 A 和 B 使试验区扩大, 试验次数增加。A. Wald 在 [4] 中 (§3.9) 分析了当 $\sigma = \sigma_0$ 和 $\sigma = \sigma_1$ 时, 这种增加量的上界。另一方面, 在推导 $E_{\sigma}(n)$ 的近似公式时忽略了 Z_n 的超界部分, 即当 $Z_n \geq \log A$ (拒绝 H_0) 时, 忽略 $Z_n > \log A$ 的部分, 当 $Z_n \leq \log B$ (接受 H_0) 时忽略 $Z_n < \log B$ 的部分。其中

$$Z_n = \sum_{i=1}^n z_i; \quad z_i = \log \frac{f(x_i, \sigma_1)}{f(x_i, \sigma_0)} \quad (2.6)$$

这一情况反映到序贯检验图上 (见图 2.1) 就是, 当进行 m 次试验后接受 H_0 时, 取 $S_m \leq a_m$ 忽略了 $\Delta a_m = S_m - a_m \leq 0$, 当拒绝 H_0 时, 用 $S_m \geq r_m$ 忽略了 $\Delta r_m = S_m - r_m \geq 0$ 。实际模拟检验表明 (见表 1), 绝大多数 Δr_m 大于 $|\Delta a_m|$, 这一点我们从图 2.1 也可作进一步分析, 因为 S_m 是不减函数, 所以总有

$$\alpha = \beta = 0.05, \lambda = 1.5, \sigma_0 = 2.23, \sigma = 3.23, N = 200 \quad \text{表 1}$$

终止试验数 m	Δa_m	Δr_m	终止试验数 m	Δa_m	Δr_m
45		21.797	9		34.220
33	-0.120		12	-0.361	
25		31.625	24	-4.911	
9		30.269	23		4.543
28	-2.889		89		1.614
24		35.860	67		11.221
76		7.519	22	-6.668	
14	-5.612		3		18.222
81		32.060	17		17.739
20		44.162	74	-1.217	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$E_{\sigma}(n) = 14.335$			$E_{\sigma}^*(n) = 23.730$		

$$|\Delta a_m| < S \quad (2.7)$$

而 Δr_m 却没有这种限制, 它可能很大也可能很小。如表 1 中, $\max(\Delta r_m) = 44.162$, $\min(\Delta r_m) = 1.614$, $|\Delta a_m| < 7.259$ 。而且 Δr_m 的最大值随 σ 的增大而增大。由上面分

析可知,随机模拟得到的 $E^*(Z_n)$ 要大于由近似公式计算的 $E_o(Z_n)$, 这也是使 $E^*(n)$ 大于 $E_o(n)$ 的第二种原因。从理论分析的角度来看,在参考文献[6]第7章指出由近似公式计算的 $E_{\sigma_0}(n)$ 和 $E_{\sigma_1}(n)$ 分别是实际 $E_{\sigma_0}(n)$ 和 $E_{\sigma_1}(n)$ 的下确界。我们的随机模拟表明:不仅是在 $\sigma = \sigma_0$ 和 $\sigma = \sigma_1$ 两个点,而至少是在区间 $[\sigma_0, \sigma_1]$ 上恒有 $E^*(n)$ 大于 $E_o(n)$ 。由此我们考虑要降低 $E_o(n)$, 只有增大 α 、 β 和 λ , 但 α 、 β 和 λ 的增大又使 $L(\sigma)$ 变差,所以在选择 α 、 β 和 λ 时注意权衡 $E^*(n)$ 和 $L^*(\sigma)$ 的利弊。

3) 由表1我们看到,终止试验数 m 的离差比较大。在图2中我们绘制了 $\sqrt{D^*(n)}$ 用来描述随机变量 n 相对 $E^*(n)$ 的密集度。图3绘制了 n 的经验分布函数 $F^*(n)$, 这对于分析 n 的概率特性是十分有用的。如确定 n 落在区间 $[n_1, n_2]$ 上的概率

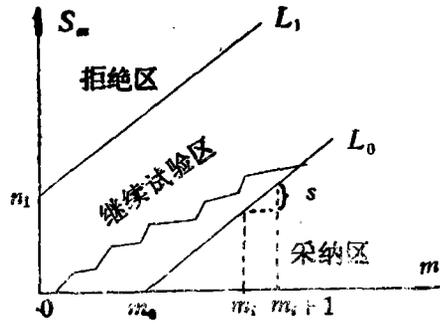


图 2.1

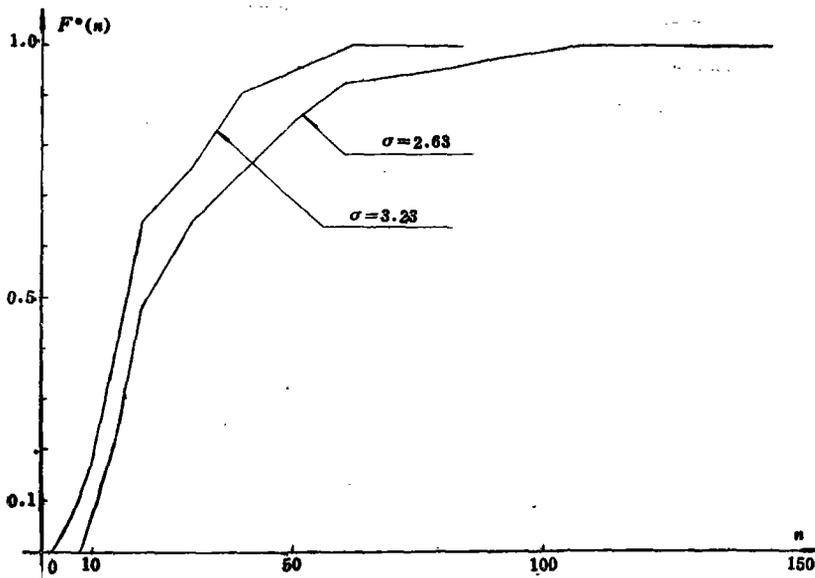


图 3

$$P\{n_1 \leq n \leq n_2\} = F^*(n_2) - F^*(n_1) \tag{2.8}$$

4) 在截尾的情况下,我们取 $\alpha = \beta = 0.05$, $\lambda = 1.5$, $\sigma_0 = 2.23$, $N = 120$, $n_0 = 11$ 。在上述参数下有 $h_0 = -59.980$, $h_1 = 45.461$, $S = 7.259$, $m_0 = 8.262$ 。则由下节(3.6)和(3.7)式算得

$$\begin{aligned} 40.119 < k_0 < 72.979 \\ -42.552 < k_1 < -17.647 \end{aligned}$$

我们取 $k_0 = 41$, $k_1 = -28.636$, 在此参数下对 σ 进行了三次曲线截尾的 SPR 检验的随机模拟。我们将所得结果分别绘制在图 1 和图 2 上, 可以看到 $L^{**}(\sigma)$ 较之 $L(\sigma)$ 变得平缓了, α' 和 β' 分别大于 α 和 β , 使检验的效果变差。其原因是很明显的, 由于截尾使得有些原来处在继续试验区内的点 (m, S_m) 落在曲线 c_0 的下方或 c_1 的上方, 而被采纳或拒绝, 所以 α 和 β 均有增大。在截尾的情况下, 相对 $L^{**}(\sigma)$ 而言 $E^{**}(n)$ 处于次要地位。根据导弹飞行试验的特点, 对于其落点散布的 SPR 检验来说采用三次曲线的序贯截尾方案还是比较好的, 适当选择 k_0 和 k_1 的值, 可改善 $L^{**}(\sigma)$ 使之好一点。

以上仅是对一组参数下的 σ 的 SPR 检验的随机模拟结果作了比较分析, 我们还对其它几组参数作了部分计算, 所得结果均同上述讨论相符 (有些工作对我们来说也是刚刚开始)。这里应当指出, 随机模拟的结果具有随机性, 不同次的随机模拟其结果是有些不同的, 但基本趋势相同。N 取得越大越接近实际情况。在实际工作中, 可对各种方案各种参数进行大量的随机模拟试验, 权衡各种情况下的利弊, 从中选择使设计、使用单位都满意的方案。

几点看法

1) 我们在上述随机模拟中, 是取正态 $N(\mu, \sigma^2)$ 分布的伪随机数: 这里 μ 和 σ^2 都是预先给定的数, 但实际的落点未必如此, 我们考虑能否通过在计算机上进行模拟打靶来得到落点 $x_i, (i=1, 2, \dots)$, 利用这些随机落点进行 σ 的 SPR 检验的随机模拟, 更接近实际的情况。

2) 从序贯检验图 (图 2.1) 可以看出, 采纳 H_0 时需要一个最小试验次数 $m^* = [m_0] + 1$ (作二次试验就有拒绝 H_0 的可能), 这样对于试验次数很少的检验问题, 除非把 α 、 β 和 λ 取得很大否则就不会采纳 H_0 , 但是大的 α 、 β 和 λ 使检验的效果很差 (即使采纳了 H_0 , 也使人难以相信)。由此, 我们考虑根据导弹研制的继承性 (即具有验前信息), 设想如下两个方案:

i) 具有验前信息的 SPR 检验, 即应用验前信息改变序贯检验图上第一个点 $(1, S_1)$ 的位置或改变三区 (拒绝区、继续试验区、采纳区) 的划分。

ii) 由 Bayes 假设检验的决策不等式

$$\frac{L(x_1, \dots, x_m | \sigma_1)}{L(x_1, \dots, x_m | \sigma_0)} \underset{\text{acc. } H_1}{\overset{\text{acc. } H_0}{\leq}} \frac{C_{10} - C_{00}}{C_{01} - C_{11}} \cdot \frac{P_{H_0}}{P_{H_1}} \triangleq \mathcal{F} \quad (2.9)$$

其中, $c_{ij} (i, j=0, 1)$ 为损失函数, P_{H_0}, P_{H_1} 为验前概率 (详见 [2])。

把决策限 \mathcal{F} 加减 Δ , 划出一个继续试验区 (见图 2.2), 记

$$T_m = \frac{L(x_1, \dots, x_m | \sigma_1)}{L(x_1, \dots, x_m | \sigma_0)}$$

若进行了 $m - 1$ 次试验没有作出判断, 则再取 x_m 计算 T_m , 若

$$T_m \leq \mathcal{F} - \Delta \quad \text{接受 } H_0, \text{ 试验终止} \quad (2.10)$$

$$T_m \geq \mathcal{F} + \Delta \quad \text{拒绝 } H_0, \text{ 试验终止} \quad (2.11)$$

$$\mathcal{F} - \Delta < T_m < \mathcal{F} + \Delta \quad \text{继续试验取 } x_{m+1} \quad (2.12)$$

以上设想的两种方法, 都有必要进行大量的随机模拟试验。一方面通过模拟试验看

方法本身是否可行。另一方面通过模拟试验,法一要确定 OC 函数和平均试验数,选择参数 α , β 和 λ 等。法二要确定 $c_{ij}(i, j=0, 1)$, P_{H_0} , P_{H_1} 和 Δ , 同样地也需要给出 OC 函数和平均试验数。

3) 对于 σ 的 SPR 检验的随机模拟在 m 次试验后作出判断时有子样 (x_1, \dots, x_m) , 我们还利用判别分析的方法(参阅[1]), 确定子样 (x_1, \dots, x_m) 所属母体 $Q_i(i=1, \dots, M)$ (其中, Q_i 为正态母体

$N\left(\mu, \sigma_0 + \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{M}\right)$ 的问题作了初步的随机模拟计算。结果表明: 若子样 (x_1, \dots, x_m) 取自母体 Q_i 的验前概率 P_i 取得适当, 那么二者的判断结果大体上是一致的。由此我们考虑, 能否将二法结合起来, 采用序贯分析的思想, 这对提高检验的效果是有意义的。

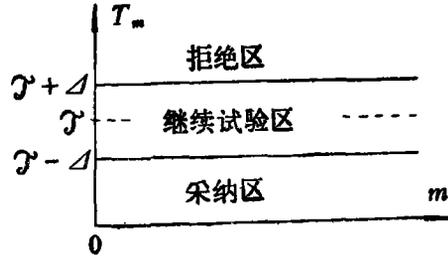


图 2.2

§3 关于序贯截尾方案的讨论

在对 σ 的截尾 SPR 检验中, 我们认为三次曲线截尾有很大的灵活性(详见[5]), 本节主要讨论三次曲线截尾的 SPR 检验, 在图 3.1 中, c 点为直线 $y=ms$ 和 $m=n_0$ 的交点, m_0 为直线 L_0 和 m 轴的交点, P_1 为直线 L_1 和 $m=m_0$ 的交点, 曲线 $c_i(i=0, 1)$ 的方程为

$$y_i = a_i m^3 + b_i m^2 + c_i m + d_i \quad (i=0, 1) \quad (3.1)$$

其中系数 $a_i, b_i, c_i, d_i(i=0, 1)$ 可由方程组

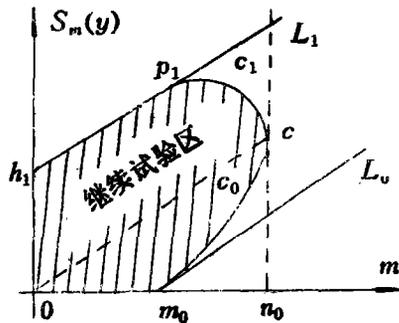


图 3.1

$$\begin{cases} 3a_i n_0^2 + 2b_i n_0 + c_i = k_i \\ 3a_i m_0^2 + 2b_i m_0 + c_i = S \\ a_i m_0^3 + b_i m_0^2 + c_i m_0 + d_i = h_i + m_0 S \quad (i=0, 1) \\ a_i n_0^3 + b_i n_0^2 + c_i n_0 + d_i = n_0 \cdot S \end{cases} \quad (3.2)$$

解得。其中 $k_i(i=0, 1)$ 为曲线 $c_i(i=0, 1)$ 在 c 点的斜率, $m_0 = -h_0/S$ 。

我们所要讨论的问题是限定 k_0 和 k_1 的取值范围, 使曲线 c_0 和 c_1 在区间 $[m_0, n_0]$ 上分别为凹函数和凸函数, 故有条件

$$\begin{aligned} c_0: & \quad 3a_0 m + b_0 > 0 \\ c_1: & \quad 3a_1 m + b_1 < 0 \end{aligned} \quad (m \in [m_0, n_0]) \quad (3.3)$$

由于三次曲线 $c_i(i=0, 1)$ 仅有一个拐点 $(m_i^*, y(m_i^*))$, $m_i^* = -\frac{b_i}{3a_i}(i=0, 1)$, 故上述条件又可改为

$$c_0: 3a_0m_0 + b_0 > 0; 3a_0n_0 + b_0 > 0 \quad (3.4)$$

$$c_1: 3a_1m_0 + b_1 < 0; 3a_1n_0 + b_1 < 0 \quad (3.5)$$

由此推得:

$$S - \frac{3h_0}{2(n_0 - m_0)} < k_0 < S - \frac{3h_0}{n_0 - m_0} \quad (n_0 > m_0) \quad (3.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S - \frac{3h_1}{n_0 - m_0} < k_1 < S - \frac{3h_1}{2(n_0 - m_0)} \quad \left(m_0 < n_0 < m_0 - \frac{3m_0h_1}{2h_0} \right) \\ k_1 < 0 \quad \left(n_0 > m_0 - \frac{3m_0h_1}{2h_0} \right) \end{array} \right. \quad (3.7)$$

进一步我们看到, $S_m = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2$ 是一个不减函数, 当点 (m, S_m) 落在直线 $y=c$ 的上方时, 不论再作几次试验总归是要拒绝 H_0 的。由此我们想到, 若用直线 $y=c$ 代替三次曲线 c_1 , 有可能节省试验次数。这里必须指出, 我们人为地构造的截尾的 SPR 检验, 它并不保持最优检验的性质。但根据导弹的生产及飞行试验的特点, 这种序贯截尾的 SPR 检验又是切实可行的。对于序贯截尾的 SPR 检验, 同样可以用(1.11)–(1.14)式来估计 OC 函数和平均试验次数等。

结 束 语

本文是在毕业设计的基础上, 进一步整理而成的。文中所讨论的导弹落点散布的 SPR 检验的随机模拟, 我们仅在少数几组参数下进行了计算 (文中所举数据仅是其中一组)。若能进行大量的计算, 正如引言所讲的, 这对我们的实际工作是很有益的。

由于我们理论水平有限, 计算也不充分, 文中很可能有各种错误, 欢迎同志们批评指正。在我们整个工作中都得到了张金槐老师的热心指导, 谨致谢意。

参 考 文 献

- [1] 复旦大学编, “概率论”, 第二册, 人民出版社, 1979.
- [2] 张金槐编, “导弹试验统计学”, 上册, 国防科技大学印刷, 1982年 (即将出版)
- [3] 中国科学院计算中心概率统计组编著, “概率统计计算”, 科学出版社, 1979年.
- [4] A. Wald, “Sequential Analysis”, 1948年.
- [5] 常兆诚, “序贯分析方法及在导弹落点散布分析中的应用”, 湖南省宇航学会自动控制专业分会年会技术报告, 1981年10月.
- [6] C.R. Rao, “Linear Statistical Inference and Its Application”, 第二版, 1973年.

Random Simulation of Sequential Probability Ratio Test for Spread of Impact Point of Missile

Chang Chao-cheng Liang Ming Guo Zhen-hua

Abstract

This paper describes the calculation step and formula of the random simulation of SPR test for the spread of impact point of missile. We do the random simulation of sequential truncated and untruncated testing methods for standard deviation of impact point by DJS-130 computer and analyse the results at the same time. The analysis shows that the OC function $L^*(\sigma)$ obtained by random simulation has the precedence over $L(\sigma)$ obtained by approximate formula. However, $E_o^*(n)$ is larger than $E_o(n)$. Hence when we select parameters α, β and λ , it is preferable to use $L^*(\sigma)$ and $E_o^*(n)$, and to consult $L(\sigma)$ and $E_o(n)$ at the same time.

This paper also discusses the scheme of sequential truncated method and presents the opinions for some problems.