

推广的卡尔曼滤波应用于主被动混合定位

高 吉 祥

提 要 当飞行器被一个几何位置已知的雷达跟踪时, 相对方位与仰角可用安装在飞行器上的角传感器来测量, 相对高度数据可用无线电或激光高度表来获得。根据这些数据即可确定飞行器的位置。为提高定位精度, 使用了扩展的卡尔曼滤波器, 得到的位置参数被变换成射面坐标系。用计算机模拟的结果是良好的。

一、引 言

当飞机进入敌区之后, 对方的雷达要对飞机进行跟踪, 然后袭击飞机。面临这种情况, 飞机有两种防御办法: 一是消极地回避雷达的跟踪; 二是将计就计, 利用对方雷达的波束, 测出相对于雷达站的方位角和俯仰角, 并采用卡尔曼滤波的方法, 精确地估计出雷达站相对于飞机的位置, 先下手用导弹将雷达站摧毁掉。

本文试图将这一应用推广。我们要袭击的目标是已知的, 敌区的雷达站的位置、地形高度事先得到。飞行器测出相对于雷达站的方位角和俯仰角, 并利用高度表测出相对于地面的高度, 粗略地定出飞行器在空间的位置。为提高定位精度, 采用推广的卡尔曼滤波方法, 实时地估计出飞行器的空间位置参数, 再通过坐标变换, 转换成射面坐标系的参数, 从而可以直观地得到飞行器相对于目标的位置参数, 达到准确袭击目标的目的。

二、主 要 假 设

1. 假定可以获得雷达波束的角度和高度的测量值, 而不管它们是如何获得的。测量误差假定为高斯白噪声。
2. 假设雷达波束连续地或间断地跟踪飞行器, 因此滤波器至少在离散点上可以得到测量值。
3. 假定飞行器的探测器在一个以上雷达站跟踪飞行器时, 能鉴别目标。若飞行器不能鉴别雷达站, 则经滤波器处理的数据就不能假设来自一个简单雷达站, 且可能引起滤波器发散。
4. 假定敌区雷达站的位置参数和发射频率事先得到, 且装入我方飞行器计算机的存储器内。

5. 目标的位置参数要事先已知。
6. 加入系统的噪声假定是高斯白噪声。
7. 作为滤波器输入的飞行器速度是可以得到的。
8. 附加于俯仰角、方位角的测量误差及测高误差均互不相关。

三、系统模型

如图 1 所示, 我们选定飞行器所在的经度 λ , 纬度 ϕ 和绝对高度 h 作为状态变量。选定飞行器相对于雷达波束的方位角 η 和俯仰角 ε 及飞行器相对于地面的高度 H 作为测量值。选定目标的中心作为射面坐标系的原点, 从目标中心水平指向发射点的方向作为射面坐标系的 $X_{射}$ 方向, $Z_{射}$ 方向垂直向上, $Y_{射}$ 方向垂直于 $X_{射}OZ_{射}$ 平面, 且符合右手螺旋法则。

下面具体推导一下状态方程、测量方程和变换方程。

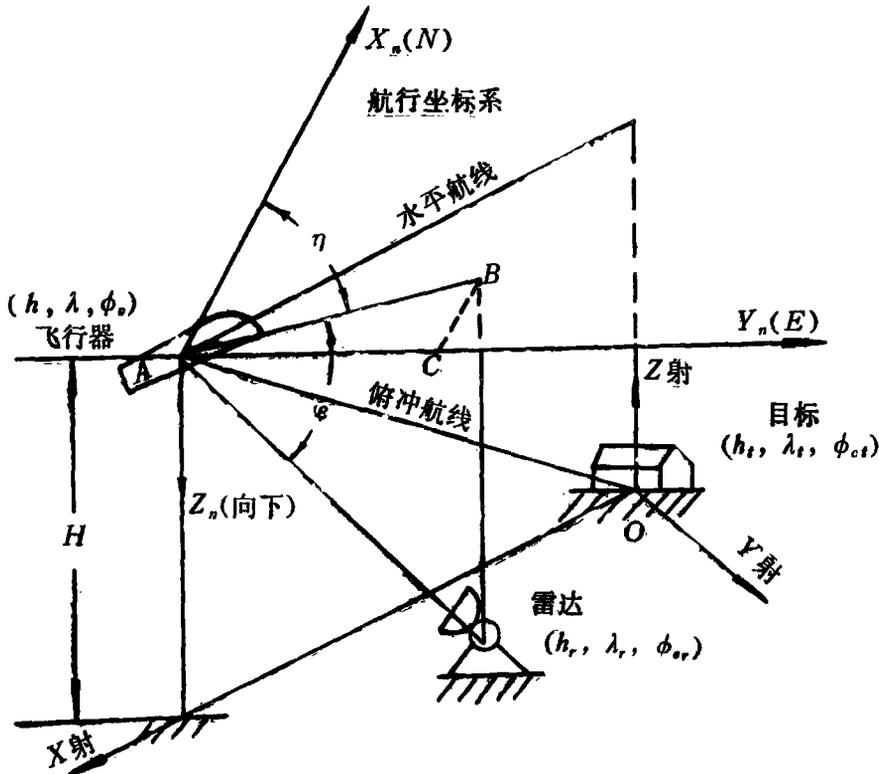


图 1 系统原理图

1. 动力学方程的推导

如图 2 所示, 在航行坐标系中, X_n 方向指向正北, Y_n 方向指向正东, Z_n 方向垂直向下, 由于地球是一个椭球体, 于是

$$\dot{h} = -V_z - \dot{R}_A \quad (1)$$

因

$$R_A = R_N / \sqrt{1 - E^2 \cdot \cos^2 \phi_c}$$

其中, R_A 为对应纬度为 ϕ_c 的地球半径, $R_N = 6356.760\text{km}$ 为地球的短轴半径, $E = 0.08181974$ 为离心率。

故

$$\dot{R}_A = -\frac{1}{2} V_X E^2 \sin 2\phi_c \quad (2)$$

其中 V_X 为飞行器在航行坐标系中 X_n 方向上的速度分量。

于是

$$\dot{h} = -V_Z + \frac{1}{2} V_X E^2 \cdot \sin 2\phi_c \quad (3)$$

根据力学原理, 角速度等于线速度除以曲率半径, 即:

$$\dot{\lambda} = \frac{V_Y}{(R_A + h) \cdot \cos \phi_c} \quad (4)$$

$$\dot{\phi}_c = \frac{V_X}{R_A + h} \quad (5)$$

令 $\underline{X} = [h, \lambda, \phi_c]^T$ 作为状态变量, 可将式(3)、(4)和(5)写成矢量形式。假设系统所提供的速度没有误差, 只考虑系统的不完善所带来的误差 $\omega_1(t)$, 于是

$$\dot{\underline{X}} = \begin{pmatrix} -V_Z + \frac{1}{2} V_X E^2 \sin 2\phi_c \\ V_Y / [(R_A + h) \cos \phi_c] \\ V_X / (R_A + h) \end{pmatrix} + \omega_1(t) = f(\underline{X}(t), t) + \omega_1(t) \quad (6)$$

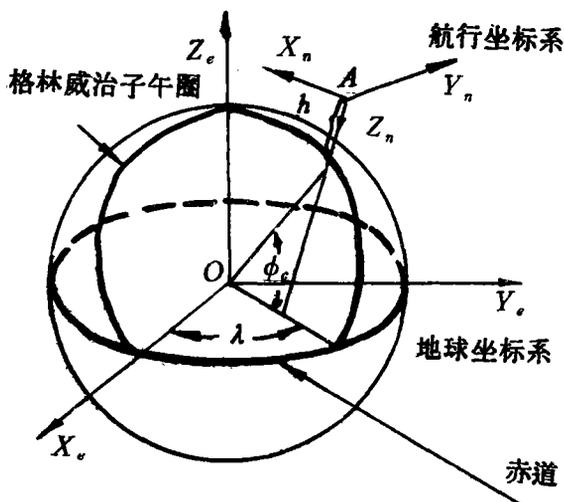


图 2 状态矢量示意图

然而, 系统所提供的速度不可能没有误差, 假定系统所提供的速度等于系统的实际

速度减去它的误差项, 那么

$$\begin{bmatrix} V_{x正} \\ V_{y正} \\ V_{z正} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{x测} \\ V_{y测} \\ V_{z测} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

将(7)式代入(6)式得:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{X}} &= \begin{pmatrix} -V_{z测} + \frac{1}{2}E^2V_{x测}\sin 2\phi_c \\ V_{y测}/[(R_A+h)\cdot\cos\phi_c] \\ V_{x测}/(R_A+h) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E^2\sin 2\phi_c & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{(R_A+h)\cos\phi_c} & 0 \\ \frac{1}{R_A+h} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} + \omega_1(t) \\ &= f(\underline{X}(t), t) + G(\underline{X}(t), t)\omega_2'(t) + \omega_1(t) \end{aligned} \quad (8)$$

现作如下近似:

$$\begin{aligned} G(\underline{X}(t), t)\omega_2'(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E^2\sin 2\phi_c & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{(R_A+h)\cdot\cos\phi_c} & 0 \\ \frac{1}{R_A+h} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} \\ &\doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{(R_t+h_t)\cdot\cos\phi_{c,t}} & 0 \\ \frac{1}{R_t+h_t} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\Delta V_z \\ \Delta V_y/[(R_t+h_t)\cos\phi_{c,t}] \\ \Delta V_x/(R_t+h_t) \end{bmatrix} = \omega_2(t) \\ \text{令} \quad \omega(t) &= \omega_1(t) + \omega_2(t) \end{aligned}$$

则(8)式可改写成:

$$\underline{\dot{X}}(t) = f(\underline{X}(t), t) + \omega(t) \quad \omega(t) \sim N(0, Q(t)) \quad (9)$$

此式即为所要求的动力学方程。

2. 测量方程的推导

如图1所示, 假定雷达站的位置参数为: $(h_r, \lambda_r, \phi_{cr})$, 飞行器在某一时刻的位置参数为: (h, λ, ϕ_c) , 飞行器到雷达站之间的波束在 NE 平面的投影 AB 与正北方向的夹

$$\eta \doteq \angle ABC = \operatorname{tg}^{-1} \frac{AC}{BC} \doteq \operatorname{tg}^{-1} \frac{\widehat{AC}}{\widehat{BC}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{(\lambda_r - \lambda) \cdot \cos \phi_c}{\phi_{cr} - \phi_c} \quad (10)$$

飞行器到雷达站之间的波束与 NE 平面间的夹角 ε 为:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{BD}{AB} \doteq \operatorname{tg}^{-1} \frac{\widehat{BD}}{\widehat{AB}} \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{h_r - h}{(R_d + h) \sqrt{(\lambda_r - \lambda)^2 \cos^2 \phi_c + (\phi_{cr} - \phi_c)^2}} \end{aligned} \quad (11)$$

飞行器重心到地面的高度 H 为:

$$H = h - h(\lambda, \phi_c) \quad (12)$$

其中, $h(\lambda, \phi_c)$ 是制导区域内的地形高度函数。

令 $Z = [H, \eta, \varepsilon]^T$ 作为测量矢量。

将(10)、(11)和(12)式写成矢量形式, 并假设地形高度函数和雷达站的地址没有误差, 只考虑测量噪声 $V(t)$ 的影响。于是

$$\begin{aligned} Z &= \begin{pmatrix} h - h(\lambda, \phi_c) \\ \operatorname{tg}^{-1} \frac{(\lambda_r - \lambda) \cdot \cos \phi_c}{\phi_{cr} - \phi_c} \\ \operatorname{tg}^{-1} \frac{h_r - h}{(R_d + h) \sqrt{(\lambda_r - \lambda)^2 \cos^2 \phi_c + (\phi_{cr} - \phi_c)^2}} \end{pmatrix} + V(t) \\ &= g(\underline{X}(t), t) + V(t) \end{aligned} \quad (13)$$

将上述方程离散化得:

$$Z_k = g(\underline{X}(t_k), t_k) + V(t_k) \quad (14)$$

3. 变换方程的推导

除了通过测量对状态进行估值外, 我们还希望得到便于飞行器控制的射面坐标系三个参数(图1)。下面推导这种关系式。

假定在 t_k 时刻已得到状态估计量

$$\hat{X}_{k/k} = [\hat{h}_k, \hat{\lambda}_k, \hat{\phi}_{ck}]^T.$$

目标的位置为 $(h_t, \lambda_t, \phi_{ct})^T$ 。

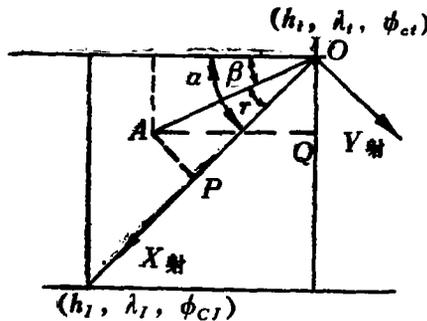


图 3

于是:

$$Z_{\text{射}} = R_k + \hat{h}_k - R_t - \hat{h}_t$$

其中: R_k 表示对应于 $\hat{\lambda}_k$, $\hat{\phi}_{ck}$ 处的地球半径。

在图 3 中,

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \frac{\phi_{ct} - \phi_{ct}}{(\lambda_t - \hat{\lambda}_t) \cdot \cos \phi_{ct}} \quad (16)$$

$$\beta = \text{tg}^{-1} \frac{\phi_{ct} - \hat{\phi}_{ck}}{(\lambda_t - \hat{\lambda}_k) \cdot \cos \phi_{ct}} \quad (17)$$

其中 λ_t , ϕ_{ct} 为发射点所对应的经度和纬度。

$$\gamma = \beta - \alpha \quad (18)$$

而

$$OA = \sqrt{(\phi_{ct} - \hat{\phi}_{ck})^2 + [(\lambda_t - \hat{\lambda}_k) \cdot \cos \hat{\phi}_{ck}]^2 \cdot (R_k + h_t)} \quad (19)$$

$$X_{\text{射}} = OA \cdot \cos \gamma \quad (20)$$

$$Y_{\text{射}} = OA \cdot \sin \gamma \quad (21)$$

方程(15)、(20)和(21)就是射面坐标系的三个分量。

四、 $Q(k)$ 和 $R(k)$ 的确定

根据上面推导的动力学模型和测量模型,要确定 $Q(k)$ 和 $R(k)$ 就比较方便。因为 $Q(k)$ 和 $R(k)$ 的确定大同小异,所以我们只讨论 $Q(k)$ 的确定。

首先假定系统所提供的速度没有误差,那么 $\omega(t) = \omega_1(t)$, 即扰动函数仅由模型的不完善所造成。根据定义 $Q(t) = E[\omega_1(t)\omega_1^T(t)]$, 数学上要求出这个值来是有困难的。在工程实际中,常常用试探法、优选法,逐渐缩小实验范围,逼近实际的 $\hat{Q}(k)$ 的值。我们就是采用这种方法进行了许多试验,认为 $Q(k)$ 取下面的值较好:

$$Q_1(k) = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-13} & 1 \times 10^{-14} \\ 0 & 1 \times 10^{-14} & 1 \times 10^{-13} \end{bmatrix} \quad (22)$$

当 $Q(k)$ 取上述值时,滤波精度较高,即估计状态与实际状态非常接近,从而说明模型刻画得比较正确。

上述是假设系统所提供的速度分量无误差,这实际上是办不到的。如果系统所提供的速度有误差,且假定速度分量有 1% 的误差,那么我们就很难算出 $Q(k)$ 来。下面具体计算一下。

模拟时假定: $V_x = 2.53 \text{ KM/S}$.

$V_y = 1.97 \text{ KM/S}$, $V_z = 0.205 \text{ KM/S}$.

于是三个速度分量的标准偏差为:

$$\sigma_{V_x} = V_x \cdot 1\% = 0.0253 \text{ KM/S},$$

$$\sigma_{V_y} = V_y \cdot 1\% = 0.0197 \text{ KM/S}.$$

$$\sigma_{V_Z} = V_Z \cdot 1\% = 0.00205 \text{ K M/S.}$$

根据定义, 将上述数据代入得:

$$Q_2(t) \delta(t-\tau) = E[\omega_2(t) \omega_2^T(\tau)] \\ = \begin{bmatrix} 4 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \times 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 0.16 \times 10^{-10} \end{bmatrix}$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $Q(k) \rightarrow Q(t) \cdot \Delta t$

取 $\Delta t = 1 \text{ s}$ 时得:

$$Q_2(k) = \begin{bmatrix} 4 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \times 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 0.16 \times 10^{-10} \end{bmatrix} \\ Q(k) = Q_1(k) + Q_2(k) \quad (23)$$

假定系统所提供的速度误差为 2%、5%……时, 同理可求出对应的 $Q(k)$ 的值来。

五、滤波及模拟

1. 滤波器公式

我们所讨论的这个系统, 动力学模型是连续非线性的, 测量方程是离散非线性的, 卡尔曼滤波器不能直接应用, 代之以推广的卡尔曼滤波器。在这里我们只引出推广的卡尔曼滤波公式, 不作具体推导。连续—离散型推广的卡尔曼滤波器见表 1。

连续—离散型推广的卡尔曼滤波器

表 1

系统模型	$\dot{X}(t) = f(X(t), t) + W(t), W(t) \sim N(0, Q(t))$	
测量模型	$Z_k = g(X(t_k), t_k) + V_k \quad k=1, 2, \dots; V_k \sim N(0, R_k)$	
起始条件	$X(0) \sim N(\hat{X}_0, P_0)$	
其他假设	$E[W(t)V_k^T] = 0, \quad \text{对于一切 } k \text{ 和 } t$	
估值传播	$\dot{\hat{X}}(t) = f(\hat{X}(t), t)$... I
估值误差的协方差传播	$\dot{P}(t) = F(\hat{X}(t), t)P(t) + P(t)F^T(\hat{X}(t), t) + Q(t)$... II
估值修正	$\hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k [Z_k - g(\hat{X}_{k/k-1})]$... III
协方差修正	$P_{k/k} = [I - K_k H_k(\hat{X}_{k/k-1})] P_{k/k-1}$... IV
增益矩阵	$K_k = P_{k/k-1} H_k^T(\hat{X}_{k/k-1}) [H_k(\hat{X}_{k/k-1}) P_{k/k-1} H_k^T(\hat{X}_{k/k-1}) + R_k]^{-1}$... V
定义	$F(\hat{X}(t), t) = \left. \frac{\partial f(X(t), t)}{\partial X(t)} \right _{X(t) = \hat{X}(t)}$ $H_k(\hat{X}_{k/k-1}) = \left. \frac{\partial g(X(t_k), t_k)}{\partial X(t_k)} \right _{X(t_k) = \hat{X}_{k/k-1}}$	

2. 模拟

要了解这个系统的性能如何,需要设定某些条件在数字计算机上进行模拟试验。关于模拟的详细情况就不再介绍了,这里只列出主程序框图(图4)。本程序采用 FORTRAN 语言在我校计算中心实验室 441B-III 型机上实现的。现将符号说明如下: I_k 、 k 为整形变量, C 、 B 分别表示测角和测高的标准偏差, Δt 表示取样间隔, N 为取样点数。 $X(0)$ 表示 $t=0$ 时刻的状态矢量, $P(\%)$ 表示初始误差协方差矩阵, $Q(k)$ 表示系统扰动协方差矩阵, $R(k)$ 表示测量误差协方差矩阵, $B_{k,N}$ 表示利用残差信息来判别系统是否发散的一个物理量^[4]。

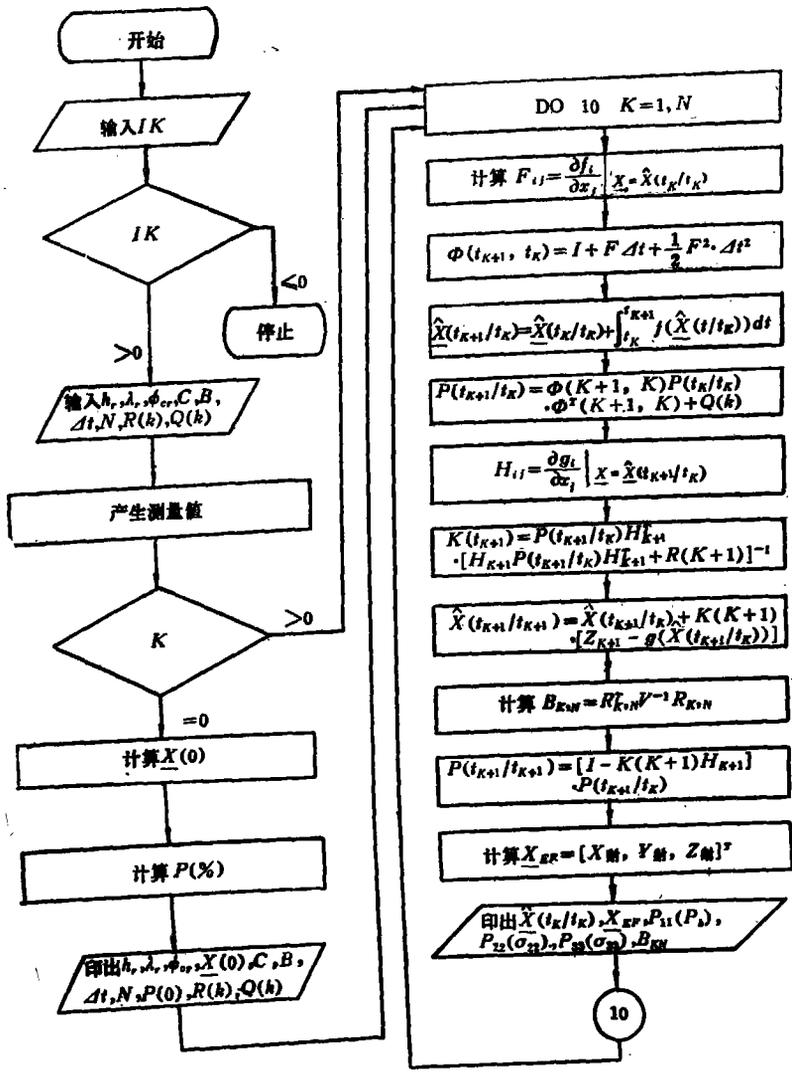


图 4 EKF 程序流程图 (主程序框图)

六、模拟结果及模拟结果分析

模拟结果分析的目的在于从物理概念入手对模拟结果进行解释,从而找出滤波器的收敛规律和估计误差精度同其它各量的依赖关系。

模拟结果分析的主要手段是解线性系统的提卡迪方程,即求解下列方程:

$$\dot{P} = FP + PF^T + Q - KRK^T \quad (24)$$

或者:

$$\dot{P} = (F - KH)P + P(F - KH)^T + Q + KRK^T \quad (25)$$

要对上述方程求解,当然方法很多,但是要直观地得出它们的解往往显得比较困难,否则就很难从所得到的解的解析式直观地看出物理意义来。为此,我们必须对动力学方程和测量方程进行加工,忽略一些次要因素,除去变量之间的相关性,使方程尽量简化,将多维的矢量函数分解成标量函数,以便于求解,从而进行性能分析。下面具体进行这项工作。

1. $P_h(\sigma_h)$ 的讨论

假设地球是一个理想球体,且 $h(\lambda, \phi_c) = c$ (常量) 的情况下,易得:

$$\begin{cases} \dot{h} = -V_z + \omega_h(t) \\ \dot{H} = h - c + V_{H'}(t) \end{cases} \quad (26)$$

对应的提卡迪方程为:

$$\dot{P}_h + 2kP_h = Q_h + k^2R_{H'} \quad (27)$$

解上述方程,并当 $t \rightarrow \infty$ 时取其极限得:

$$P_h(\infty) = \sqrt{Q_h \cdot R_{H'}} \quad (28)$$

模拟结果表明,在 $R_{H'}$ 一定的情况下, Q_h 越小,则 $P_h(\infty)$ 越小,如图 6 所示。在 Q_h 一定的情况下, $R_{H'}$ 越小,则 $P_h(\infty)$ 也越小,如图 7 所示。这个结果与式(28)的分析结论是一致的。

2. $P_\lambda(P_{22})$ 和 $P_{\phi_c}(P_{33})$ 的讨论

下面再来看一看各种因素对 $P_\lambda(P_{22})$ 和 $P_{\phi_c}(P_{33})$ 的影响。因 P_λ 和 P_{ϕ_c} 情况类似,所以只讨论 P_{ϕ_c} 的情况。

在假设 $V_y = 0$, $h = c$, $\lambda = \lambda_0$ (常值), $A = \frac{h_r - c}{R_A + c}$ 的情况下,动力学方程和测量方程可简化为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\phi}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ V_x / (R_A + c) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \eta \\ \varepsilon \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \text{tg}^{-1} 0 \\ \text{tg}^{-1} \frac{A}{\phi_{cr} - \phi_c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_n \\ V_e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

在只考虑 ϕ_c 的情况下, 则

$$\begin{cases} \dot{\phi}_c = V_X / (R_A + c) + \omega_3(t) \\ \varepsilon = \operatorname{tg}^{-1} \frac{A}{\phi_{cr} - \phi_c} + V_e(t) \end{cases}$$

然后将上述方程线性化, 并取其一次项得:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_c = V_X / (R_A + c) + \omega_3(t) \\ \varepsilon(t) = H\phi_c + Y(t) + V_e(t) \end{cases}$$

其中: $Y(t) = g_3(\phi_{cn}, t) - H\phi_{cn}$, $H = \left. \frac{\partial g_3(\phi_c, t)}{\partial \phi_c} \right|_{\phi_c = \phi_{cn}}$ 这里 ϕ_{cn} 是标准轨道的地心纬度。

对应的提卡迪方程为:

$$\dot{P}_{\phi_c} = -2kHP_{\phi_c} + (Q_{\phi_c} + k^2R_e),$$

求解得:

$$P_{\phi_c}(t) = \frac{Q_{\phi_c} + k^2R_e}{2kH} + \left[P_{\phi_c}(0) - \frac{Q_{\phi_c} + k^2R_e}{2kH} \right] e^{-2kHt}$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时取其极限得:

$$P_{\phi_c}(\infty) = \frac{-\sqrt{Q_{\phi_c} \cdot R_e}}{H} - \frac{\sqrt{Q_{\phi_c} \cdot R_e} [(\phi_{cr} - \phi_{cn})^2 + A^2]}{A} \quad (29)$$

$$\beta = -2kH = -2P_{\phi_c}R_e^{-1} \frac{A^2}{[(\phi_{cr} - \phi_c)^2 + A^2]^2} \quad (30)$$

式(29)和(30)完全可以用来定性解释模拟结果。从图8可以看出, 改变 Q 的设计值, $P_{\phi_c}(\infty)$ 的值是不一样的, 当 $Q(k)$ 变大时, $P_{\phi_c}(\infty)$ 变大, 而且与 \sqrt{Q} 成正比例地增加, 曲线2和5就可以说明这一点, 下面具体计算一下:

对于曲线2: $Q_{\phi_c}^{(2)} = 1 \times 10^{-12}$, $P_{\phi_c}^{(2)}(\infty) = 1.1 \times 10^{-10}$

对于曲线5: $Q_{\phi_c}^{(5)} = 4 \times 10^{-10}$, $P_{\phi_c}^{(5)}(\infty) = 2.4 \times 10^{-9}$

于是

$$\frac{Q_{\phi_c}^{(5)}}{Q_{\phi_c}^{(2)}} = \frac{4 \times 10^{-10}}{1 \times 10^{-12}} = 400$$

如果以曲线2的情况作为基准, 按(29)式计算得

$$P_{\phi_c}^{(5)}(\infty) = 2.2 \times 10^{-9}$$

比较上述两个 $P_{\phi_c}^{(5)}(\infty)$ 值, 说明模拟结果与近似计算结果是基本符合的。

从图9可以看出, 改变 $R(k)$ 的设计值, $P_{\phi_c}(\infty)$ 的值也是不一样的, 当 $R(k)$ 变大时, $P_{\phi_c}(\infty)$ 也变大。

从图10可以看出, 在其他条件不变的情况下, 模拟选取雷达站的位置不同, 则最后滤波精度 σ_{ϕ_c} 也是不一样的, 利用靠近航线的雷达站的信息, 最后滤波精度就高。例如利用9号雷达站来的信息比利用10号雷达站来的信息最后精度要高。

从式(29)还可以看出, 在一般情况下 (即 Q_{ϕ_c} 和 R_e 不等于零的情况下), $P_{\phi_c}(\infty)$ 是时间 t 的函数。在飞行器接近雷达站的时刻, 滤波精度较高。随着 t 的增加, 飞行器将

逐渐远离雷达站的位置, (即 $|\phi_{cr} - \phi_{cn}|$ 增加)。所以 $P_{\phi_c}(\infty)$ 随着 t 的增加而增加。 $P_{\phi_c}(\infty)$ 增加的速率取决于 $Q(k)$ 、 $R(k)$ 的设计值及飞行器的高度。因此在飞行器经过雷达站附近时, $P_{\phi_c}(\infty)$ 可获得极小值。 $Q(k)$ 越大, 曲线凹下去越深。

由式(30)可以看出, 当飞行器经过雷达站附近时, 自由分量的衰减系数迅速增加, 故在雷达站附近收敛大大加快。其次 R_e 的大小对收敛也有影响: R_e 越大, β 越小, 说明收敛越慢, 反之亦然。

图 11 完全证实了这一点。图中 2、3、4、5 四条 σ_{ϕ_c} 曲线都是在雷达站附近收敛的。

要观察飞行高度对精度的影响, 我们还需对式(29)进行处理。

$$\text{因} \quad A = \frac{h_r - h}{R_A + h} \doteq \frac{-h}{R_A}$$

代入(29)式得

$$P_{\phi_c}(\infty) = \frac{\sqrt{Q_{\phi_c} \cdot R_e} [(\phi_{cr} - \phi_{cn})^2 + h^2/R_A^2]}{h/R_A} \quad (31)$$

我们观察两种特殊情况。当雷达站位于飞机的正下方时, $|\phi_{cr} - \phi_{cn}| \ll h^2/R_A^2$, 则(31)式可简化为:

$$P_{\phi_c}(\infty) = \frac{h\sqrt{Q_{\phi_c} R_e}}{R_A} \quad (32)$$

从式(32)可以看出, $P_{\phi_c}(\infty)$ 是随着飞行高度的增加而增加的, 正如图 12 所示。雷达站位于 4 号位, 恰好在航线的正下方, 它的物理概念是明显的。在测角偏差不变的情况下, 高度增加, 必须引起水平面内距离偏差加大, 因而精度下降。当雷达站偏离航线较远时, $|\phi_{cr} - \phi_{cn}|$ 可与 h/R_A 相比拟, 甚至远大于 h/R_A , 此时(31)式可简化为:

$$P_{\phi_c}(\infty) = \frac{R_A \sqrt{Q_{\phi_c} R_e} (\phi_{cr} - \phi_{cn})^2}{h} \quad (33)$$

从上式可以看出, $P_{\phi_c}(\infty)$ 与 h 成反比, 如图 13 所示。至于采样间隔 Δt 对精度的影响, 我们知道, 采样点数越多, 说明状态得到修正的次数就越多, 因而精度就越高。但是 $P_{\phi_c}(\infty)$ 与 Δt 并非呈线性关系, 它是连续测量作为它的极限情形。图 14 说明了这一点。

实验结果及其分析表明, 影响收敛性的因素有: 雷达站的相对于航线的位置、测量偏差、 $Q(k)$ 的设计值、采样间隔等等。其中雷达站相对于航线的位置是影响收敛的决定因素。这就告诉我们, 在制导区域内, 如果有许多雷达站的信息可供利用, 选取雷达站的原则是先近后远。要使滤波器尽快地收敛, 最好在起始点附近找到一个可供利用的雷达。

影响滤波器最后精度的因素有: $Q(k)$ 、 $R(k)$ 的设计值, 雷达站的位置, 采样间隔和飞行高度等等。

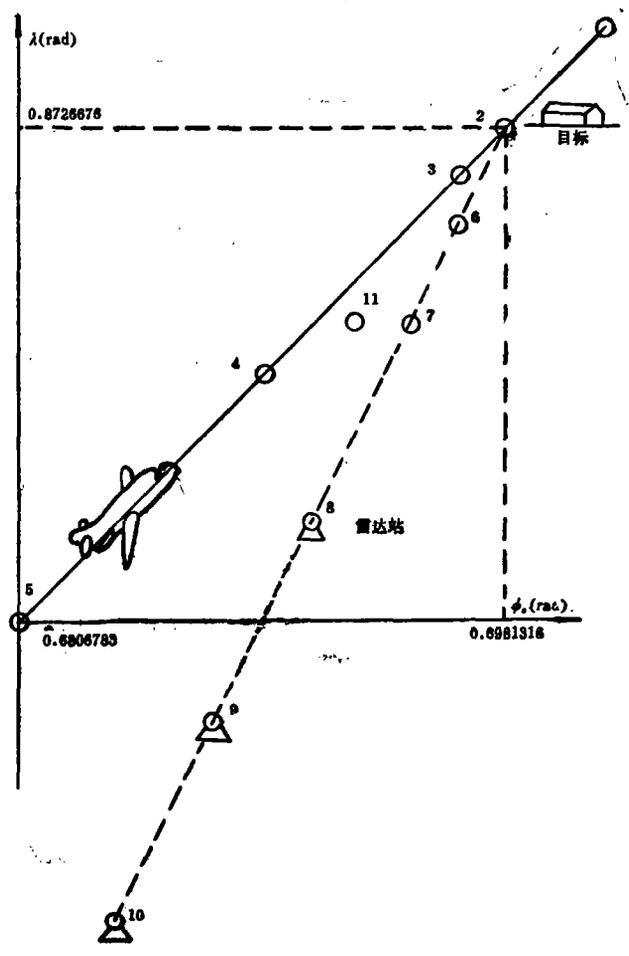


图 5 模拟雷达站位置平面图

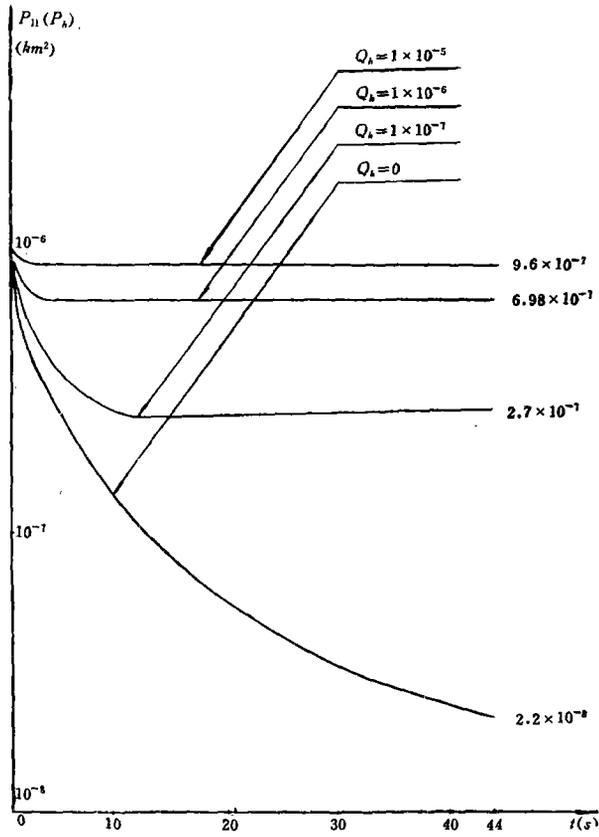


图 6 Q_k 对 P_k 的影响

- 试验条件: 1. 雷达站位于 6 号位, 见图 5,
 2. 航线: 俯冲, 起始高度为 10km,
 3. $c = 1^\circ$, $B = 1m$, $\Delta t = 1s$, $N = 44$.

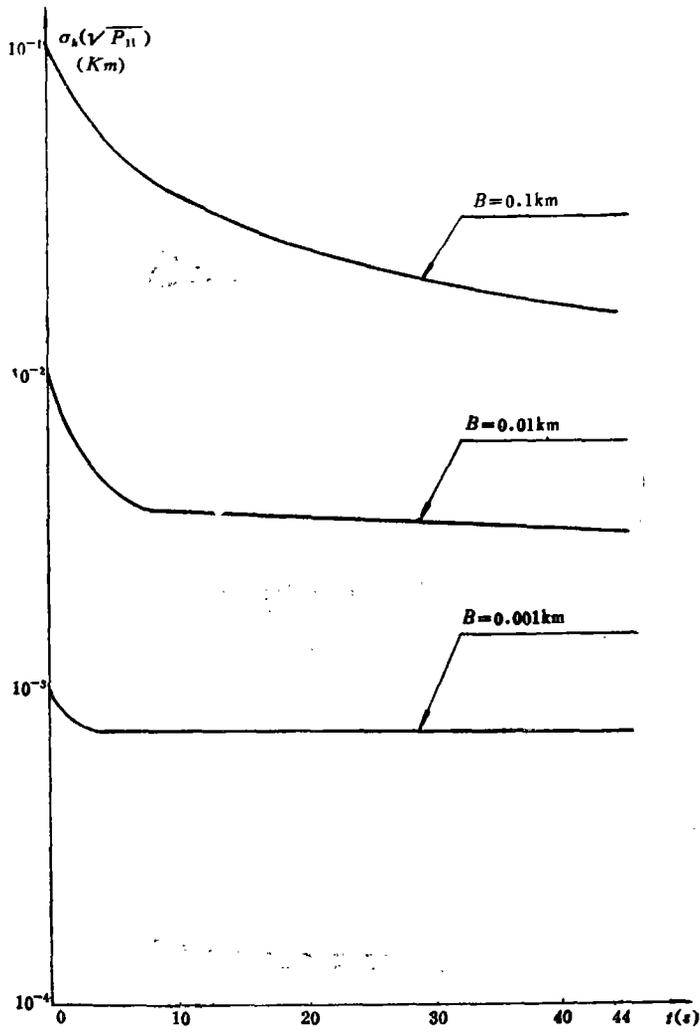


图 7 测高标准偏差 B 对收敛时间和精度的影响
 试验条件: 1. 雷达站位于 6 号位, 见图 5,
 2. 航线: 俯冲, 起始高度为 20km,
 3. $c = 1^\circ$, $\Delta t = 1s$, $N = 44$.

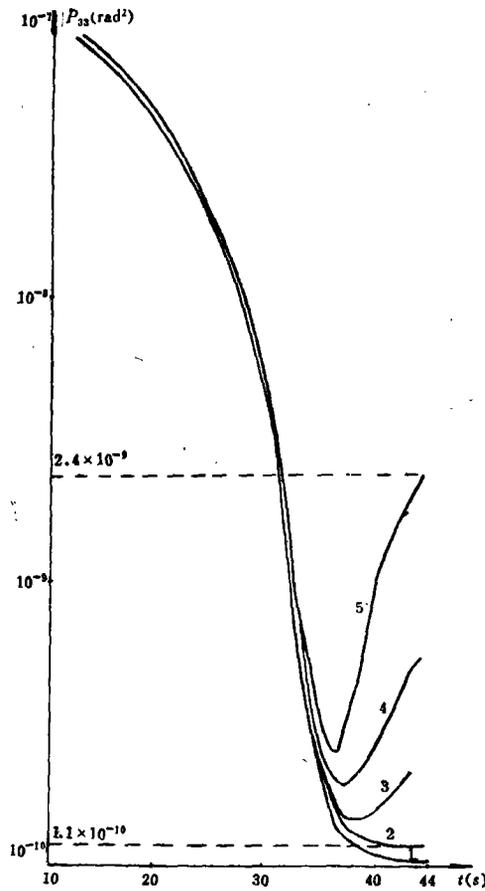


图 8 $Q(k)$ 对精度 $P_{33}(P_{\phi_c})$ 和收敛时间的影响

- 试验条件: 1. 雷达站位于6号位, 见图5,
 2. 航线: 俯冲, 起始高度为20km,
 3. $c=1^\circ$, $B=1m$, $\Delta t=1s$, $N=44$.

$$\text{曲线 1: } Q(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{曲线 2: } Q(k) = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$\text{曲线 3: } Q(k) = \begin{bmatrix} 4 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0.16 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\text{曲线 4: } Q(k) = \begin{bmatrix} 1.6 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0.64 \times 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 0.64 \times 10^{-10} \end{bmatrix}$$

$$\text{曲线 5: } Q(k) = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 4 \times 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \times 10^{-10} \end{bmatrix}$$

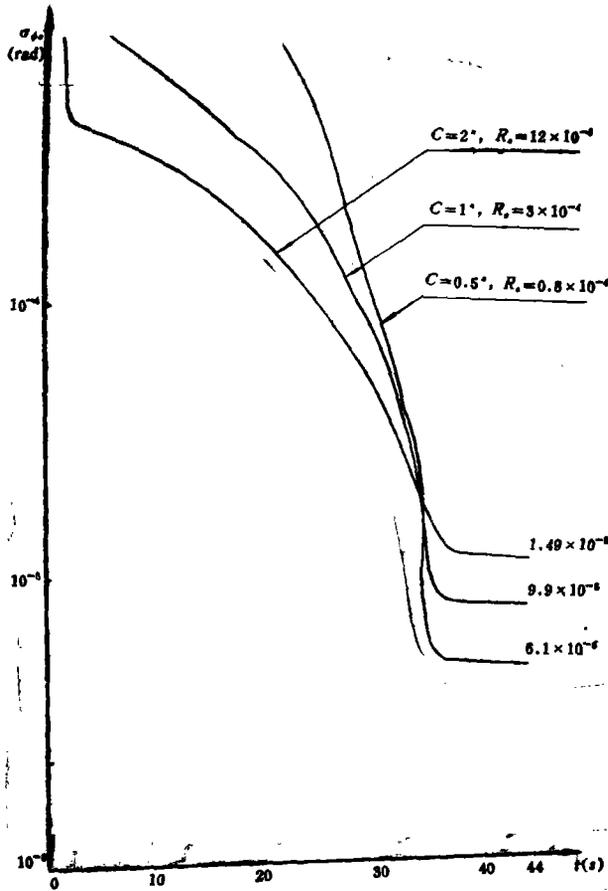


图9 测角标准偏差 c 和 R_s 对精度和收敛时间的影响

- 试验条件: 1. 雷达站位于6号位, 见图5,
 2. 起始高度为10km,
 3. $B=1\text{m}$, $\Delta t=1\text{s}$, $N=44$.

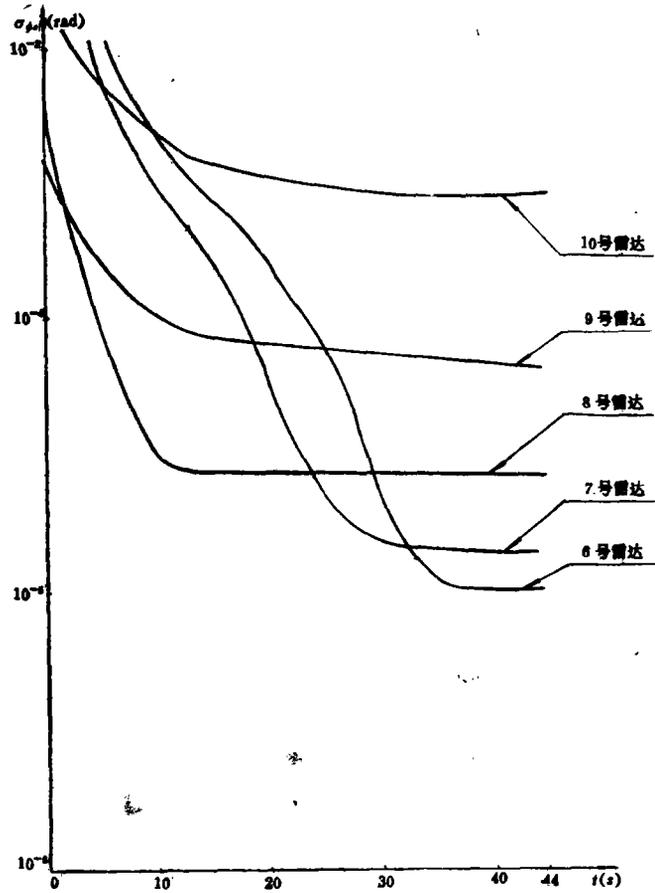


图 10 雷达站的位置对精度(σ_{ϕ_c})和收敛时间的影响

试验条件:

1. 雷达站分别位于 6 号、7 号、8 号、9 号和 10 号位, 见图 5,
2. 航线: 平飞, 起始高度 10km,
3. $c = 1^\circ$, $B = 1\text{m}$, $\Delta t = 1\text{s}$, $N = 44$,

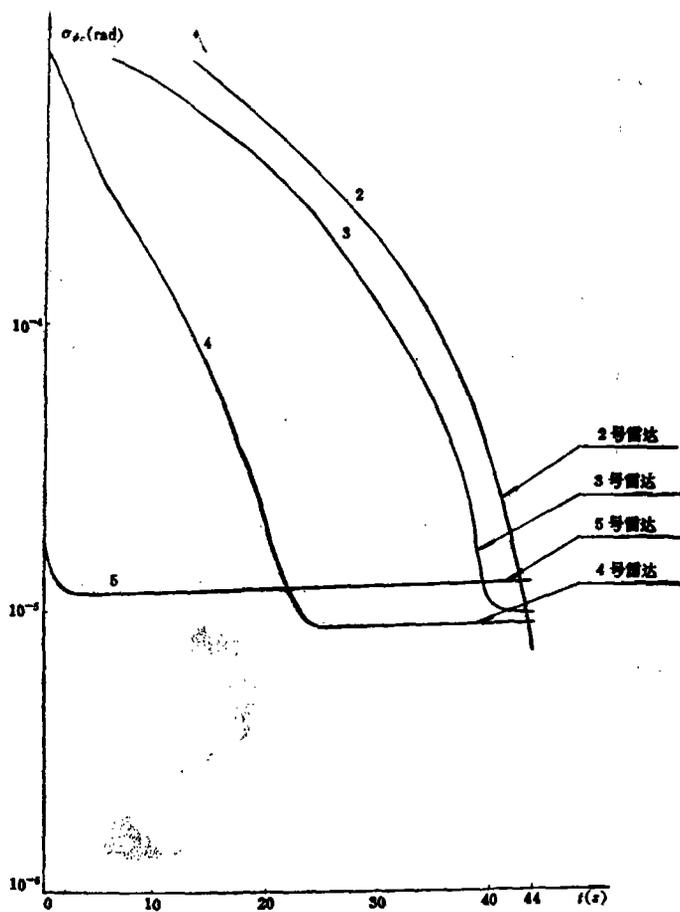


图 11 雷达站的位置对精度(σ_{ϕ_c})和收敛时间的影响

试验条件:

1. 雷达站分别位于 2 号、3 号、4 号和 5 号位, 见图 5,
2. 航线: 平飞, 起始高度为 10km,
3. $c = 1^\circ$, $B = 1m$, $\Delta t = 1s$, $N = 44$.

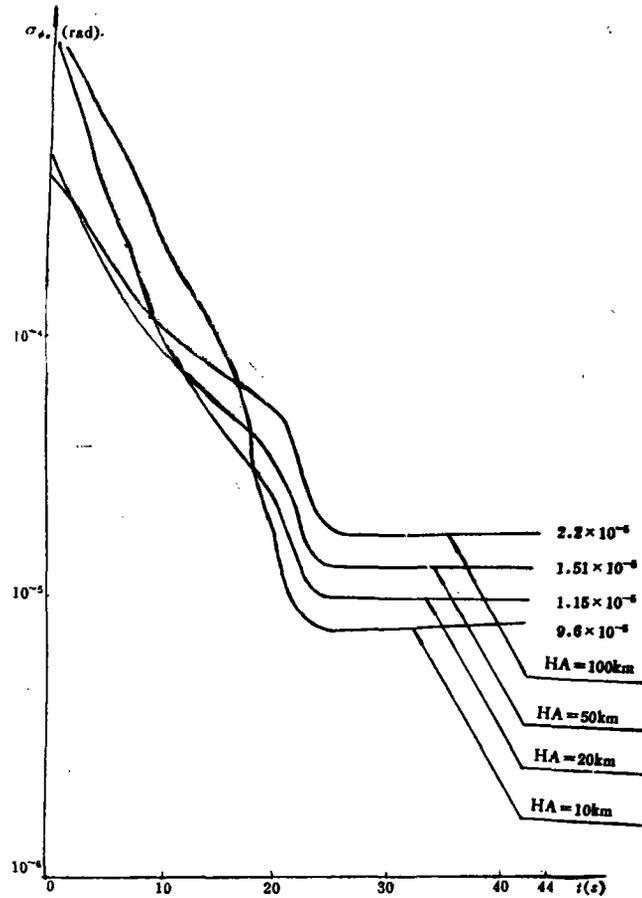


图 12 起始高度 HA 对精度 (σ_{ϕ_c}) 和收敛时间的影响

- 试验条件: 1. 雷达站位于 4 号位, 见图 5,
 2. 航线: 平飞
 3. $c = 1^\circ$, $B = 1\text{m}$, $\Delta t = 1\text{s}$, $N = 44$.

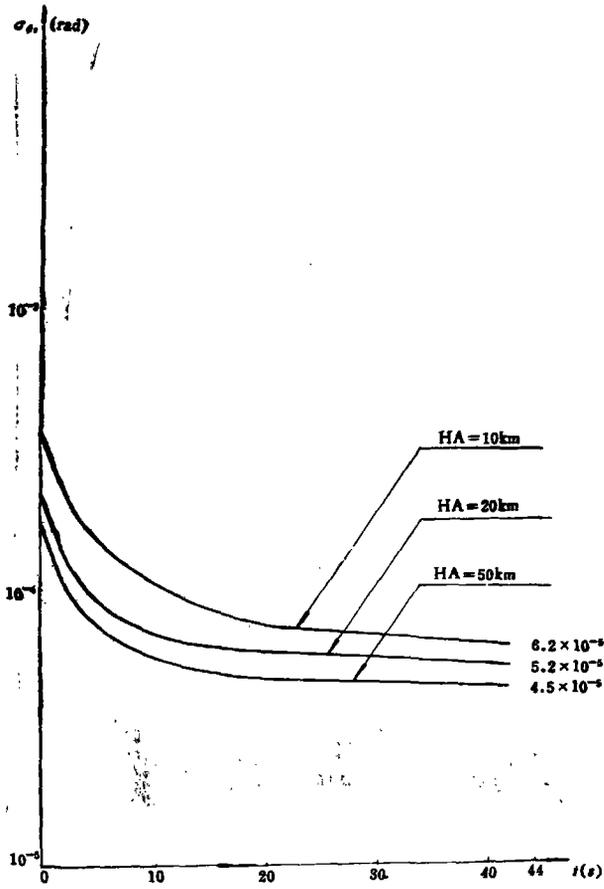


图 13 起始高度 HA 对精度 (σ_{ϕ_c}) 和收敛时间的影响

- 试验条件: 1. 雷达站位于 9 号位, 见图 5,
 2. 航线: 平飞
 3. $c = 1^\circ$, $B = 1m$, $\Delta t = 1s$, $N = 44$.

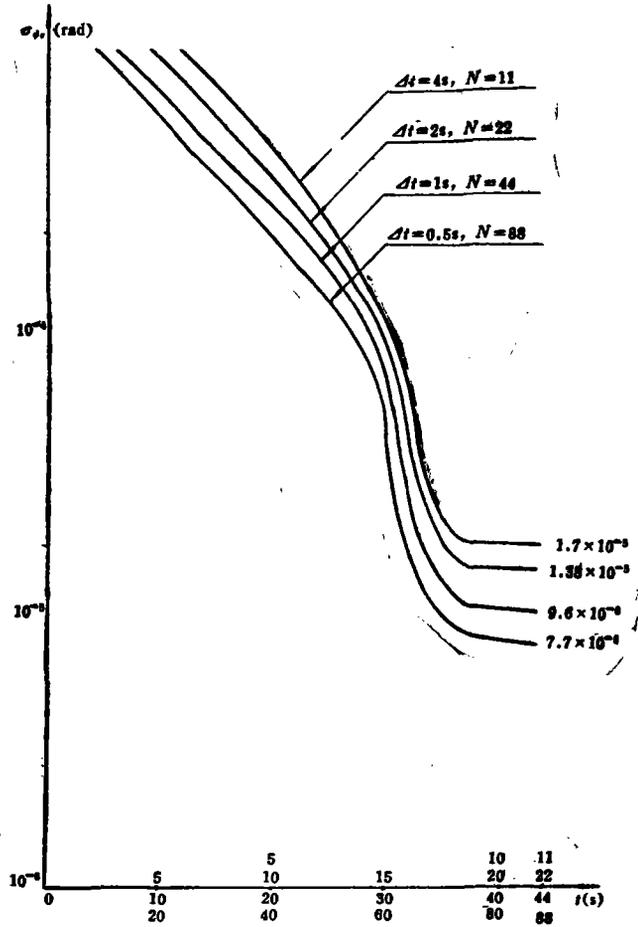


图 14 采样时间间隔 Δt 对精度和收敛时间的影响

试验条件: 1. 雷达站位于 6 号位, 见图 5,

2. 航线: 平飞

3. $c=1^\circ$, $B=1\text{m}$.

参 考 文 献

- [1] AD-745897, *Passive Detection and Ranging of a Ground Radar from an Aircraft Using an Extended Kalman Filter*, David Henry Watjen, Air Force Institute of Technology Wright-Patterson Air Force, Ohio March 1973.
- [2] AD-A033763, *Passive Target Tracking Using Nonlinear estimation Theory*, by Marcilio Boavista da Cunha, September 1976. Naval Postgraduate School, Monterey, California.
- [3] *Applied Optimal Estimation*, Written by Technical staff, The Analytic Sciences Corporation, edited by Arthur Gelb, THE M.I.T. PRESS, 1974.
- [4] 张金槐, 卡尔曼滤波器发散性的统计识别及自适应技术, 国防科技大学学报, 1980年第一期。

Application of Extended Kalman Filtering to Passive Location Aided with Height Data

Gao Ji-xiang

Abstract

When the vehicle is tracked by a radar with known geometrical position, the relative bearing and elevation can be measured by angle sensor installed on the vehicle, and the relative height data can be obtained by radio or laser altimeter. According to these data, the vehicle position can be determined. In order to raise the accuracy of position location, Extended Kalman Filter is utilized. The obtained position parameters are transformed to the flight path plane coordinate system. The results from computer simulation are satisfactory.