

# 图象配准的幅度排序快速相关算法

经 一 平

**提 要** 本文在分析了幅度排序相关技术以后,研究了一种对传感器灰度量化排序的相关算法。本文选择合适的量化阈值,对传感器灰度作量化排序,可将传感器图分块成若干张 0—1 数码图。进一步用数码图与参考图相关,结果省去了所有的乘法运算。此外,在确定的量化函数条件下,对灰度为高斯分布的图象从理论上分析计算出了度量值的均值与方差,从而得出在不同信噪比条件下的检测门限序列。在计算机上对不同相关长度的随机高斯分布的图象进行的模拟表明,门限序列对信噪比从 5 到 1 的传感器图的匹配,都能有效地进行检测。对实际地形图进行模拟的结果是:当传感器图的信噪比从 3 降到 1 时,都获得了正确的匹配。

## 一、引 论

图象匹配的基本方法是:通过对两幅图象相似程度的某种度量,来寻找两张图之间的最佳的拟合位置。

度量两张图象相似程度的常用方法有:

(1) 平均绝对差算法(MAD)

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |x_{ij} - y_{ij}(u, v)| \quad (1-1)$$

(2) 积相关算法(Prod)

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_{ij} y_{ij}(u, v) \quad (1-2)$$

其中  $N$  为传感器图一边的象素数,  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}(u, v)$  分别为传感器图和参考图窗口中第  $i$  行第  $j$  列象素的灰度值。假定传感器图与参考图窗口在位置  $(u^*, v^*)$  上最相似,那么当传感器图与  $(u^*, v^*)$  位置上的参考图窗口重合时(即配准时),MAD 算法的度量值将会出现极小值,Prod 算法的度量值将会出现极大值。因此可采用度量值是否为极值来判断传感器图与参考图是配准还是非配准。

当一张  $M \times M$  的参考图与一张  $N \times N$  的传感器图进行匹配时,采用 MAD 算法须作  $N^2(M - N + 1)^2$  次加法才能确定配准点;而采用 Prod 算法须作  $N^2(M - N + 1)^2$  次乘法和  $N^2(M - N + 1)^2$  次加法才能确定配准点。所以 MAD 算法的优点是匹配速度较快,

缺点是不适合在低信噪比条件下工作。Prod算法的优点是,在低信噪比条件下有较高的截获概率,缺点是匹配速度慢,运算量大。但是在实际中,由于敏感器噪声,景象的变化,以及几何失真,如同步误差、旋转误差、尺度误差等的影响,将使敏感器图的信噪比大大下降,因此,采用积相关算法则显得较为有利。所以,寻找快速的积相关算法以提高匹配速度就显得十分必要了。

## 二、幅度排序相关算法的原理

如果采用一个量化函数  $g_s(x)$  对敏感器象素的灰度值进行量化,则类似于积相关算法的形式,其度量值为

$$\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_s(x_{ij}) y_{ij}(u, v) \quad (2-1)$$

其中量化函数  $g_s(x)$  如图 1 所示。

不难证明,此式亦可作为敏感器图与参考图间相似程度的一种度量。因为在配准时上述度量值同样会出现极值。

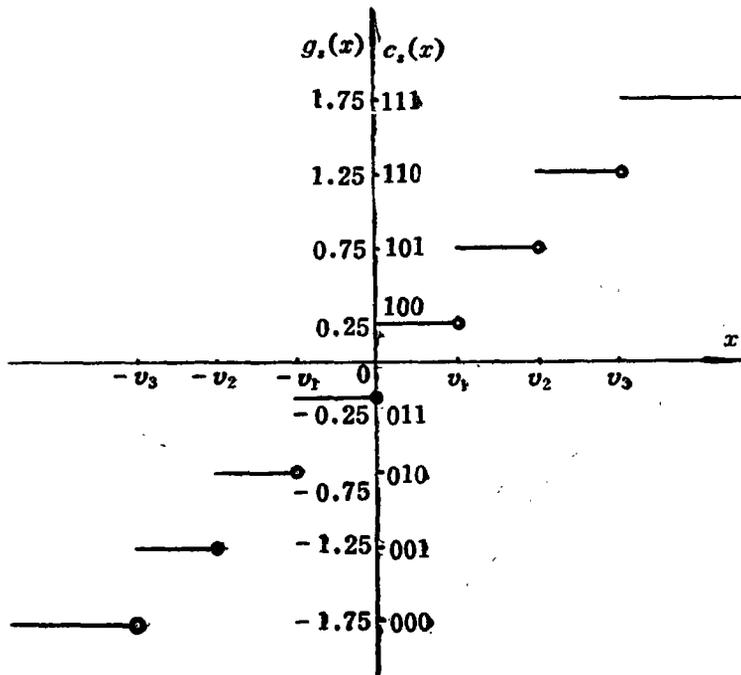


图 1 量化函数  $g_s(x)$

对于量化函数  $g_s(x)$ , 可以将其分解成三个量化函数  $g'_1(x)$ ,  $g'_2(x)$ ,  $g'_3(x)$  的和, 如图 2 所示。即

$$g_s(x) = g'_1(x) + g'_2(x) + g'_3(x) \quad (2-2)$$

因此(2-1)式表示的度量值可分解为

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g'_1(x_{ij}) y_{ij}(u, v) \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g'_2(x_{ij}) y_{ij}(u, v) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g'_3(x_{ij}) y_{ij}(u, v) \end{aligned} \quad (2-3)$$

若令 
$$\varphi_1(u, v) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g'_1(x_{ij}) y_{ij}(u, v) \quad (2-4)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(u, v) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [g'_1(x_{ij}) + g'_2(x_{ij})] y_{ij}(u, v) \\ &= \varphi_1(u, v) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g'_2(x_{ij}) y_{ij}(u, v) \end{aligned} \quad (2-5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(u, v) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_2(x_{ij}) y_{ij}(u, v) \\ &= \varphi_2(u, v) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g'_3(x_{ij}) y_{ij}(u, v) \end{aligned} \quad (2-6)$$

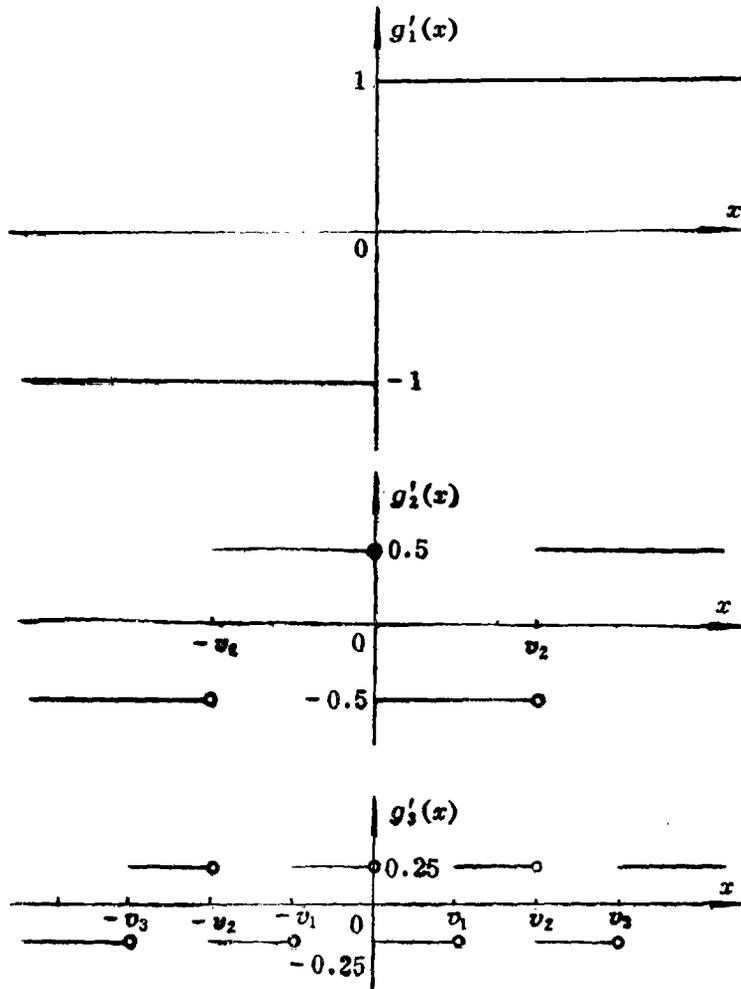


图 2 量化函数  $g_s(x)$  的分解

则  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  都可作为敏感器图  $x$  与参考图窗口  $y(u, v)$  之间相似程度的量度, 且从粗到细地反映了二图的相似程度, 在配准时它们都会出现极大值。如果我们能预先找到一组门限序列  $\{T_k\}, k=1, 2, 3$ 。则在相关时便可用门限  $T_k$  对相应的度量值  $\varphi_k(u, v)$  进行检测。即当  $\varphi_1(u, v)$  大于  $T_1$  时, 记录下位置  $(u, v)$  及度量值  $\varphi_1(u, v)$ , 准备用作第二次相关; 如果  $\varphi_1(u, v)$  小于  $T_1$ , 则判断此点为非配准点, 并在以后的各次相关中不再进行计算。这样, 在第一次相关后就可以摒弃极大多数非配准点, 而留下少数的位置, 作第二次相关用。在以后的各次相关中, 作同样的检测和淘汰非配准点, 这样就达到了减少计算量的目的。

观察图 2 所示的量化函数  $g'_k(x)$  知, 它们都是等幅交变函数。如果用一个一位二进制码  $C_{kij}$  表示  $g'_k(x_{ij})$  的符号, 即  $C_{kij}=1$  时, 函数值为正,  $C_{kij}=0$  时函数值为负, 则有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g'_k(x_{ij}) y_{ij}(u, v) \\ &= \frac{1}{2^{k-1}} \left[ \sum_{\substack{i \\ C_{kij}=1}} \sum_{\substack{j \\ C_{kij}=1}} y_{ij}(u, v) - \sum_{\substack{i \\ C_{kij}=0}} \sum_{\substack{j \\ C_{kij}=0}} y_{ij}(u, v) \right] \end{aligned} \quad (2-7)$$

代入(2-4), (2-5), (2-6)式可得

$$\begin{aligned} \varphi_1(u, v) &= \sum_{\substack{i \\ C_{1ij}=1}} \sum_{\substack{j \\ C_{1ij}=1}} y_{ij}(u, v) - \sum_{\substack{i \\ C_{1ij}=0}} \sum_{\substack{j \\ C_{1ij}=0}} y_{ij}(u, v) \\ &\dots\dots \\ \varphi_k(u, v) &= \varphi_{k-1}(u, v) + \frac{1}{2^{k-1}} \left[ \sum_{\substack{i \\ C_{kij}=1}} \sum_{\substack{j \\ C_{kij}=1}} y_{ij}(u, v) - \sum_{\substack{i \\ C_{kij}=0}} \sum_{\substack{j \\ C_{kij}=0}} y_{ij}(u, v) \right] \end{aligned} \quad (2-8)$$

如果将上述的一位二进制码组合成一个三位的二进制码, 即  $C_s = C_1 C_2 C_3$ , 则  $C_s$  的每个码值正好与  $g_s(x)$  离散值一一对应,

$$g_s(x) = - [ (-1)^{c_1} + 0.5 \times (-1)^{c_2} + 0.25 \times (-1)^{c_3} ] \quad (2-9)$$

因此采用(2-1)式的幅度量化的排序的算法可按以下步骤进行:

1) 如图 3 所示, 将敏感器图中的每个象素灰度值按图 1  $C_s - x$  的关系曲线进行编码, 产生出一张三比特的二进制码图  $C_s$ 。

2) 将  $C_s$  图分块成三张子图  $C_1, C_2, C_3$ 。子图中的象素值分别与编码值  $C_s$  的第一、二、三位相对应, 如图 3 所示。

3) 第一次相关操作。

让  $(u, v)$  从  $(0, 0) \rightarrow (M-N, M-N)$  位置上变化。每当求得一个度量值  $\varphi_1(u, v)$  时, 用门限  $T_1$  与其比较。如果  $\varphi_1(u, v)$  大于  $T_1$ , 记录下这个位置  $(u, v)$  及度量值  $\varphi_1(u, v)$ 。本文在下面称这些大于门限的位置为检测点。

4) 第二次相关操作。

让  $C_2$  图与参考图相关, 且参考图窗口位置  $(u, v)$  仅在第一次相关后大于  $T_1$  的那些位置上进行, 计算  $\varphi_2(u, v)$  的操作与第一次相关一样, 不同的是起始值为  $\varphi_1(u, v)$  且累

加和须乘上  $\frac{1}{2}$ , 即

$$\varphi_2(u, v) = \varphi_1(u, v) + \frac{1}{2} \left[ \sum_i \sum_j y_{ij}(u, v) - \sum_i \sum_j y_{ij}(u, v) \right] \quad (2-10)$$

然后用门限  $T_2$  与  $\varphi_2(u, v)$  比较, 记下检测点  $(u, v)$  与  $\varphi_2(u, v)$ 。

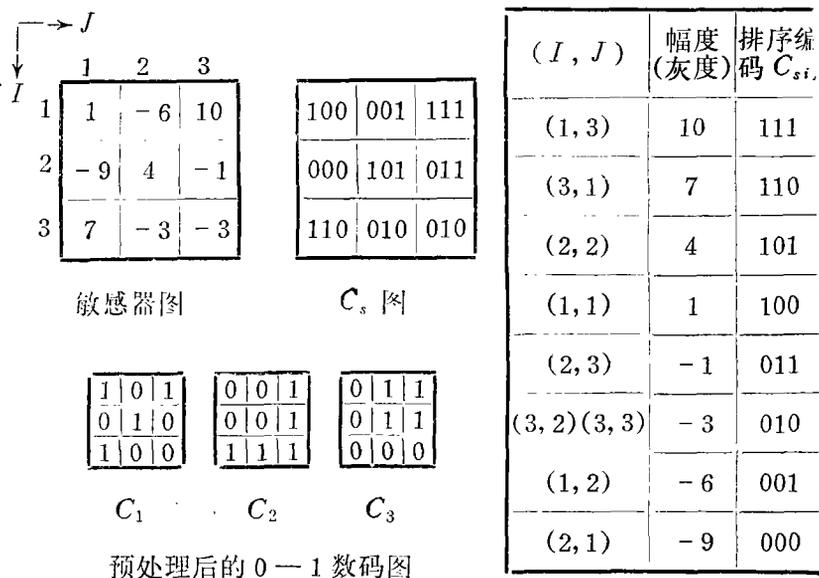


图 3 传感器图的预处理过程

以后的相关操作都类同于第二次相关操作。在最后一次相关操作后, 如果大于门限  $T_k$  的值仅为一个, 则判决这个点为配准点; 如果大于门限  $T_k$  的值不止一个, 则需要从中寻找一个极大值点作为配准点。

幅度排序相关算法操作方块图如图 4 所示。

当  $N \times N$  的传感器图与  $M \times M$  的参考图作上述幅度排序相关时, 第一次相关须作  $(M - N + 1)^2$  次搜索, 以后的相关仅在极少的几个检测点上进行, 总共需作  $K(M + N - 1)^2$  次搜索, 其中  $K$  为  $1 \sim 1.2$  之间的常数。每次搜索需作  $N^2$  次加法, 所以一共需作  $K(M - N + 1)^2 N^2$  次加法。这与一般积相关算法相比, 省略了  $N^2(M - N + 1)^2$  次乘法。进一步, 为了提高匹配速度可采用并行处理的方法, 此时由于这种方法只进行加法操作, 故可使得并行处理中的每个操作单元变得较为简单。

由上述分析可知, 幅度排序相关算法是从积相关算法演变而来的, 因此具有积相关算法的优点。所以在存在同步误差、旋转误差、尺度误差的条件下, 与积相关算法一样, 仍能在较低的信噪比情况下检测出配准位置。

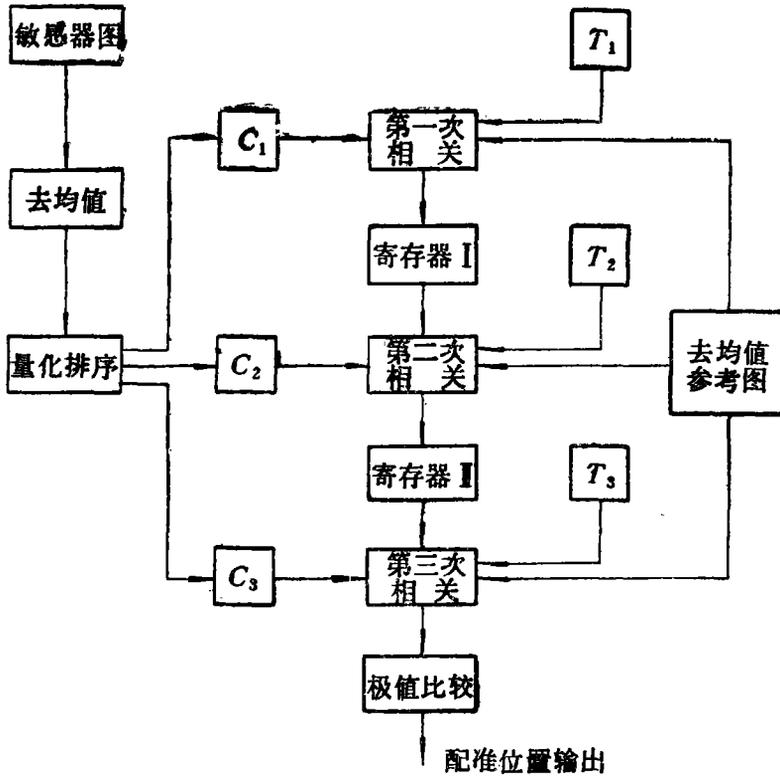


图 4 幅度排序相关算法操作方块图

### 三、量化函数 $g_s$ 的级数与最佳量化阈值的选取

在二进制幅度排序相关算法中,可以采用  $K$  个比特数的量化函数  $g_s$  进行量化排序。显然,  $K$  越大,度量值

$$\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_s(x_{ij}) y_{ij}(u, v)$$

越接近于积相关算法的度量值

$$\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_{ij} y_{ij}(u, v)$$

但是,比特数的增加势必增加处理量与相关操作量。因此必须选取适当的比特数与量化阈值,使得在工程上既能满足实际的需要,又能使操作量最小。

首先我们来考虑如下问题:即采用幅度排序相关算法来度量两图的相似程度与采用积相关算法时究竟差多远?要回答这个问题,需要寻找一种衡量量化函数  $g_s$  的标准。

考虑二个随机变量  $X$  与  $Y$ , 它们的互相关系数  $\rho$  为

$$\rho = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \{E[XY] - E[X] \cdot E[Y]\} \quad (3-1)$$

如果作  $N^2$  次实验 (或观测) 获得它们的子样为

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{N^2}\}, \{y_1, y_2, \dots, y_{N^2}\}$$

则可以得到相关系数的估计  $\hat{\rho}$  为

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sigma_x^* \sigma_y^*} \{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}\} \quad (3-2)$$

其中

$$\overline{xy} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} x_i y_i$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} y_i$$

$$\sigma_x^* = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$\sigma_y^{*2} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} y_i^2 - \bar{y}^2$$

为了讨论方便起见, 设  $\bar{x}=0$ ,  $\bar{y}=0$ ,  $\sigma_x^* = \sigma_x$ ,  $\sigma_y^* = \sigma_y$ . 则(3-2)式为

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \cdot \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} x_i y_i \quad (3-3)$$

显然相关系数的估计  $\hat{\rho}$  亦为一随机变量, 它的估计差的方差  $\sigma_{\hat{\rho}}^2$  为

$$\sigma_{\hat{\rho}}^2 = E[(\rho - \hat{\rho})^2]$$

由此可见,  $\sigma_{\hat{\rho}}^2$  说明了估计出的相关系数  $\hat{\rho}$  接近真值  $\rho$  的程度, 若  $\sigma_{\hat{\rho}}^2$  越小则  $\hat{\rho}$  越接近  $\rho$ . 所以它可以用来衡量估计方法的优劣程度。

同理, 如果用第二节所述的量化函数  $g_s$  对子样  $\{x_1, x_2, \dots, x_{N^2}\}$  作量化, 则可以得到子样  $\{g_s(x_1), g_s(x_2), \dots, g_s(x_{N^2})\}$ 。显然, 它与子样  $\{y_1, y_2, \dots, y_{N^2}\}$  一起亦可以获得相关系数  $\rho$  的一种估计:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{\sigma_x' \sigma_y} [\overline{g_s(x)y} - \overline{g_s(x)} \cdot \bar{y}] \quad (3-4)$$

其中

$$\overline{g_s(x)y} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} g_s(x_i) y_i$$

$$\sigma_x'^2 = D[g_s(x)]$$

即

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{\sigma_x' \sigma_y} \cdot \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} g_s(x_i) y_i \quad (3-5)$$

当图象  $X$  与图象  $Y$  相关时, 它们的积相关度量值为

$$\varphi_{prod}(u, v) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} x_i y_i(v, u) \quad (3-6)$$

幅度排序的相关度量值为

$$\varphi_{amp}(u, v) = \sum_{i=1}^{N^2} g_s(x_i) y_i(v, u) \quad (3-7)$$

这里, 为了讨论书写方便起见, 采用了图象的一维表示形式, 且图象  $X, Y$  都为移去均值的图象。

对于敏感器图与参考图窗口  $Y(u, v)$ , 假设象素的选取使得它们相邻象素之间是相互统计独立的, 而且除了靠近配准位置的几个点以外, 两图间的相关系数都很小 ( $\rho \ll 1$ )。这样, 可以将两图中的  $N^2$  个象素视为随机变量  $X$  与  $Y$  的两个子样。比较 (3-3) 与 (3-6),

(3-5) 与 (3-7) 式可以看出, 积相关与幅度排序相关的度量值可以视为  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho$  的一种估计。比较它们的估计误差的方差  $\sigma_{\hat{\rho}}^2$ ,  $\sigma_{\hat{\rho}_1}^2$  就可以对量化函数  $g_s$  的性能作出评价。

下面求采用幅度排序相关度量时, 相关系数的估计  $\hat{\rho}_1$  的误差的方差。

设  $X$  与  $Y$  都具有高斯分布的概率密度函数, 它们的联合分布为

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right\} \quad (3-8)$$

根据 (3-7) 式, 可求得  $\sigma_{\varphi_{amp}}^2$  为

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi_{amp}}^2 &= E[\varphi_{amp}^2] - E^2[\varphi_{amp}] \\ &= N^2\sigma_y^2 \left[ (1.75)^2 - 3\Phi\left(\frac{v_3}{\sigma_x}\right) - 2\Phi\left(\frac{v_2}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{v_1}{\sigma_x}\right) \right] \end{aligned} \quad (3-9)$$

在上述运算中作了如下近似, 即  $1 - \rho \approx 1$ 。其中  $\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ ,  $v_1, v_2$ ,

$v_3$  为量化函数  $g_s$  的量化阈值。

为了求得  $\sigma_{\hat{\rho}_1}^2$ , 必须建立  $\sigma_{\varphi_{amp}}^2$  与  $\sigma_{\hat{\rho}_1}^2$  的关系。

设  $X, Y$  的互协方差为

$$\mu = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] \quad (3-10)$$

对于  $X, Y$  的任意函数  $Z = G(x, y)$ ,  $Z$  亦为一随机变量, 且有

$$E[Z] = E[G(x, y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y) f(x, y) dx dy \quad (3-11)$$

其中  $f(x, y)$  为随机变量  $X, Y$  的高斯分布的联合概率密度。

由 Price 定理<sup>[2]</sup>

$$\frac{\partial^n E[G(x, y)]}{\partial u^n} = E\left[\frac{\partial^{2n} G(x, y)}{\partial x^n \partial y^n}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{2n} G(x, y)}{\partial x^n \partial y^n} f(x, y) dx dy \quad (3-12)$$

令  $G(x, y) \triangleq g_s(x, y)$ ,  $R \triangleq E[G(x, y)]$ , 应用上述定理, 取  $n=1$  时得

$$\frac{\partial R}{\partial \mu} = \frac{\partial E[g_s(x, y)]}{\partial \mu} = E\left\{\frac{\partial^2 [g_s(x, y)]}{\partial x \partial y}\right\} \quad (3-13)$$

由于  $\rho_1 = \frac{\mu}{\sigma_x \sigma_y}$ , 故有

$$\frac{\partial R}{\partial \rho_1} = \frac{\partial R}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \rho_1} = \frac{\partial R}{\partial \mu} \sigma_x \sigma_y = \sigma_x \sigma_y E\left\{\frac{\partial^2 [g_s(x, y)]}{\partial x \partial y}\right\}$$

当  $\rho \ll 1$  时可以算得

$$\frac{\partial R}{\partial \rho_1} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{2} + e^{-\frac{v_1^2}{2\sigma_x^2}} + e^{-\frac{v_2^2}{2\sigma_x^2}} + e^{-\frac{v_3^2}{2\sigma_x^2}} \right) \triangleq K \quad (3-14)$$

对上式积分得

$$R = K\rho_1 + C \quad (C \text{ 为待定常数})$$

而

$$\hat{R} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} g_s(x_i) y_i = \frac{1}{N^2} \phi_{AmP}$$

因此对上述两式取方差得

$$\sigma_{\phi_{AmP}}^2 = N^4 \sigma_R^2 = N^4 K^2 \sigma_{\rho_1}^2$$

即

$$\sigma_{\rho_1}^2 = \frac{\sigma_{\phi_{AmP}}^2}{N^4 K^2} \quad (3-15)$$

将(3-9), (3-14)代入(3-15)式得

$$\sigma_{\rho_1}^2 = \frac{2\pi \left[ 1.75^2 - 3\Phi\left(\frac{v_3}{\sigma_x}\right) - 2\Phi\left(\frac{v_2}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{v_1}{\sigma_x}\right) \right]}{N^2 \left( \frac{1}{2} + e^{-\frac{v_1}{2\sigma_x}} + e^{-\frac{v_2}{2\sigma_x}} + e^{-\frac{v_3}{2\sigma_x}} \right)^2} \quad (3-16)$$

可以用同样方法算得积相关度量的相关系数的估计  $\hat{\rho}$  的误差的方差  $\sigma_{\hat{\rho}}^2$  为

$$\sigma_{\hat{\rho}}^2 = \frac{1}{N^2}$$

利用(3-16)式在计算机上计算出  $\sigma_{\rho_1}^2$  极小值时的  $v_1/\sigma_x$ ,  $v_2/\sigma_x$ ,  $v_3/\sigma_x$  值。计算的结果如表1所示。

由表1可得出如下结论:

1) 相关系数的估计  $\hat{\rho}$  的误差的方差与象素  $N^2$  成反比, 也就是说, 敏感器图取得越大,  $\sigma_{\hat{\rho}}^2$  就小。

表 1

度量类别	$v_1/\sigma_x$	$v_2/\sigma_x$	$v_3/\sigma_x$	$\sigma_{\hat{\rho}}^2$	备 註
幅度排序	0.50	1.00	1.50	$1.043255 \frac{1}{N^2}$	
幅度排序	0.59	1.18	1.76	$1.039009 \frac{1}{N^2}$	为极小值
幅度排序	0.30	0.70	1.90	$1.103968 \frac{1}{N^2}$	
幅度排序	0.20	1.00	2.00	$1.105656 \frac{1}{N^2}$	
积 相 关	————	————	————	$\frac{1}{N^2}$	

2) 当采用三比特的量化函数  $g_s$  时, 适当地选取量化阈值, 可以使幅度排序相关度量的误差方差非常接近于积相关度量的误差方差。所以在工程上, 选用三比特的量化函数能收到积相关算法的同样效果。

3) 采用三比特的量化函数  $g_s$  的最佳量化阈值为  $v_1/\sigma_x=0.59$ ,  $v_2/\sigma_x=1.18$ ,  $v_3/\sigma_x=1.76$ 。同时也可以看到, 当  $v_1/\sigma_x=0.5$ ,  $v_2/\sigma_x=1.0$ ,  $v_3/\sigma_x=1.5$  时  $\sigma_{\hat{\rho}}^2=1.043$  也非常接近极小值 1.039。本文在实验中采用了后一结果。计算机模拟表明, 采用这组阈值完全能满足工程上的要求。

#### 四、门限序列 $\{T_k\}$ 的估计

实现幅度排序相关算法的关键是要确定一个门限序列  $\{T_k\}$ , 以便在每次相关中, 用这些门限检测出可能的配准点, 抛弃非配准点, 从而做到减少运算量, 提高匹配速度。在一些适当的假设条件下<sup>[3]</sup>可以估计出相关匹配时不同信噪比情况下的门限序列  $\{T_k\}$ , 这些假设是:

(1) 参考图灰度  $y_{ij}$  为一随机过程, 并假设它为平稳的, 各态历经的, 零均值的\*, 方差为  $\sigma_y^2$  的高斯过程。

(2) 传感器图假设为掺杂了噪声的参考图, 即  $x_{ij}=y_{ij}+n_{ij}$ ,  $n_{ij}$  为白色高斯噪声, 均值为零, 方差为  $\sigma_n^2$ 。

(3) 参考图灰度值  $y_{ij}$  与噪声  $n_{ij}$  相互独立, 且对于不同的  $ij$  它们亦为相互统计独立的随机变量。

(4) 对图象集合来说, 在配准位置上与非配准位置上的相关度量值的分布都是高斯的。

为了讨论方便, 令

$$g_1(x) = g'_1(x)$$

\* 零均值的条件很容易得到满足, 只要移去均值即可。

$$\begin{aligned} g_2(x) &= g'_2(x) + g'_1(x) \\ g_3(x) &= g'_3(x) + g'_2(x) + g'_1(x) \end{aligned} \quad (4-1)$$

则各次相关的度量值可表示为

$$\varphi_k(u, v) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_k(x_{ij}) y_{ij}(u, v) \quad (k=1, 2, 3) \quad (4-2)$$

当敏感器图与参考图配准时，则由假设(2)知，在配准条件下的度量值为

$$\varphi_k(u, v) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_k(y_{ij}(u, v) + n_{ij}) y_{ij}(u, v)$$

由假设(4)，可以认为在配准条件下的度量值  $\varphi_k$  的分布是高斯的。所以，如果能求出配准度量值  $\varphi_k$  的均值与方差，则可以确定在配准条件下的条件概率密度  $p(\varphi_k/s)$ ，此处  $s$  表示正确配准。这样，对应于要求的检测概率，可以得出检测门限  $T_k$ 。

配准度量值  $\varphi_k$  的均值  $\mu_{n\varphi_k}$  为

$$\begin{aligned} \mu_{n\varphi_k} &= E[\varphi_k] = E\left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_k(y_{ij} + n_{ij}) y_{ij}\right] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E[g_k(y_{ij} + n_{ij}) y_{ij}] \\ &= N^2 E[g_k(y + n) y] \end{aligned} \quad (4-3)$$

配准度量值  $\varphi_k$  的方差  $\sigma_{n\varphi_k}^2$  为

$$\begin{aligned} \sigma_{n\varphi_k}^2 &= E[\varphi_k^2] - \mu_{n\varphi_k}^2 \\ &= E\left\{\left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_k(y_{ij} + n_{ij}) y_{ij}\right] \cdot \left[\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N g_k(y_{rs} + n_{rs}) y_{rs}\right]\right\} - \mu_{n\varphi_k}^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E[g_k^2(y_{ij} + n_{ij}) y_{ij}^2] + \sum_{\substack{i, j \neq r, s \\ i, j \neq r, s}} E[g_k(y_{ij} + n_{ij}) y_{ij}] \cdot \\ &\quad E[g_k(y_{rs} + n_{rs}) y_{rs}] - \mu_{n\varphi_k}^2 \\ &= N^2 E[g_k^2(y + n) y^2] - N^2 E^2[g_k(y + n) y] \end{aligned} \quad (4-4)$$

这里，由假设(3)知，当  $i, j \neq r, s$  时  $n_{ij}, y_{ij}, n_{rs}, y_{rs}$  都相互独立。

又由假设(1)知，对于空间集合上所有的  $i, j$ ， $y_{ij}$  与  $n_{ij}$  都有同样的分布。因此，它们的函数的期望也与  $i, j$  无关，我们可用移去下标的  $y, n$  来表示。且有

$$\begin{aligned} E[y] &= 0 & D[y] &= \sigma_y^2 \\ E[n] &= 0 & D[n] &= \sigma_n^2 \end{aligned}$$

$\sigma_y^2$  为一常值，它可以对空间的平均来得到，即

$$\mu = \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M y_{ij}^{(l)} \quad (4-5)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M [y_{ij}^{(l)}]^2 - \mu^2$$

这里，图象  $Y^{(l)}$  为实际获得的一张图。

$n$  与  $y$  相互独立，因此可得  $n, y$  的联合概率密度分布为

$$\begin{aligned} f_{yn}(y, n) &= f_y(y) \cdot f_n(n) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{n^2}{\sigma_n^2}\right)\right\} \end{aligned} \quad (4-6)$$

可以采用数值积分的方法在  $n-y$  平面上直接求出期望

$$E[g_k(y+n)y], E[g_k^2(y+n)y^2]$$

$$E[g_k(y+n)y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_k(y+n)y \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_n} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{n^2}{\sigma_n^2}\right)\right] dndy \quad (4-7)$$

$$E[g_k^2(y+n)y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_k^2(y+n)y^2 \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_n} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{n^2}{\sigma_n^2}\right)\right] dndy \quad (4-8)$$

将它们代入(4-3), (4-4)式即可求得配准度量值的均值与方差。

当量化阈值  $v_1 = 0.5\sigma_y$ ,  $v_2 = 1.0\sigma_y$ ,  $v_3 = 1.5\sigma_y$  时, 在计算上求出不同信噪比情况下  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  的均值、均方差如表 2 所示。

$$SNR = \sigma_y / \sigma_n$$

表 2

SNR	$\mu_{n\varphi_1} (N^2\sigma_y)$	$\sigma_{n\varphi_1} (N\sigma_y)$	$\mu_{n\varphi_2} (N^2\sigma_y)$	$\sigma_{n\varphi_2} (N\sigma_y)$	$\mu_{n\varphi_3} (N^2\sigma_y)$	$\sigma_{n\varphi_3} (N\sigma_y)$
5	0.78246	0.62269	0.87450	1.0328	0.91647	1.1295
4	0.77417	0.63298	0.87009	1.0318	0.91307	1.1293
3	0.75710	0.65330	0.86086	1.0300	0.90575	1.1290
2	0.71386	0.70029	0.83478	1.0287	0.88505	1.1305
1	0.56435	0.82554	0.72108	1.0610	0.78601	1.1678

配准度量值  $\varphi_k$  在配准条件下的概率密度函数  $p(\varphi_k/s)$  为

$$p(\varphi_k/s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{n\varphi_k}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(\varphi_k - \mu_{n\varphi_k})^2}{\sigma_{n\varphi_k}^2}\right\} \quad (4-9)$$

$$k=1, 2, 3$$

检测概率  $P_d$  为

$$P_d = P\{(\varphi_k > T_k) / s\} = \int_{T_k}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{n\varphi_k}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(\varphi_k - \mu_{n\varphi_k})^2}{\sigma_{n\varphi_k}^2}\right\} d\varphi_k$$

$$= \int_{\frac{T_k - \mu_{n\varphi_k}}{\sigma_{n\varphi_k}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

令  $\frac{T_k - \mu_{n\varphi_k}}{\sigma_{n\varphi_k}} = \lambda_k < 0$  则化为

$$P_d = \frac{1}{2} + \Phi(-\lambda_k) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\mu_{n\varphi_k} - T_k}{\sigma_{n\varphi_k}}\right) \quad (4-10)$$

如前所述, 在幅度排序的每次相关中, 只有度量值  $\varphi_k$  大于  $T_k$  的位置才能在下次相关中继续进行。所以, 对于配准点来说, 一旦在某次相关中被漏检, 就会导致整个匹配的失败。因此门限序列  $\{T_k\}$  的选择必须有一定的检测概率。另外, 若降低门限, 则大于门限的位置数将会增多, 结果会增加下一次相关时的操作量, 使匹配的速度受到

影响。因此必须在检测概率与操作量之间进行权衡，即确保一定检测概率的同时使操作量最小。

注意到，当  $N^2=32 \times 32$  时

$$\frac{\mu_{n\varphi k}}{\sigma_{n\varphi k}} \approx 30 \quad \text{即 } \sigma_{n\varphi k} \ll \mu_{n\varphi k}$$

而当  $\lambda_k = -3 \quad k=1, 2, 3$  时，检测概率  $P_d$

$$P_d = \frac{1}{2} + \Phi(3) = 0.99865$$

这时有

$$T_k = \mu_{n\varphi k} - 3\sigma_{n\varphi k} \tag{4-11}$$

由此可见， $T_k$  稍低于均值  $\mu_{n\varphi k}$ 。由于  $T_k$  值下降很少，不会增加多少计算量，因此，取  $\lambda_k = -3$  时能满足对门限所提出的要求。

表 3 列出了量化阈值  $v_1=0.5\sigma_y, v_2=1.0\sigma_y, v_3=1.5\sigma_y$ ，敏感器图尺寸  $N^2=32 \times 32$  时，不同信噪比条件下的门限值。 $T_k-SNR$  曲线如图 5 所示。

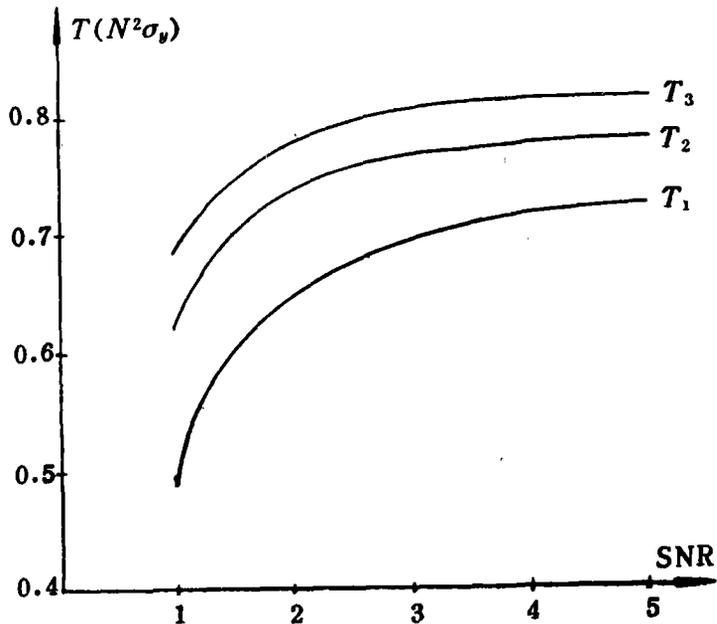


图 5 门限  $T_1, T_2, T_3-SNR$  曲线

在不同信噪比下的门限值

表 3

$SNR$	$T_1(N^2\sigma_y)$	$T_2(N^2\sigma_y)$	$T_3(N^2\sigma_y)$
5	0.72397	0.77769	0.81058
4	0.71483	0.77337	0.80721
3	0.69584	0.76411	0.79990
2	0.64822	0.73836	0.77907
1	0.48695	0.62160	0.67713

## 五、计算机上的模拟与结果

计算机模拟的目的主要是估价幅度排序相关算法的性能和验证理论门限值在实际检测中的效果。在实验中对多张不同相关长度的伪随机高斯图象<sup>[4]</sup>与一张实际的地形图进行了模拟。

采用高斯图象作模拟时的参考图尺寸为  $40 \times 40$  个象素，传感器图尺寸为  $32 \times 32$  个象素，其中传感器图是通过从参考图中取出的子图加上一定方差的伪随机高斯序列获得的。在相关长度  $L$  为  $2 \sim 16$  的不同的图象中，当传感器图的信噪比 ( $SNR = \sigma_y / \sigma_n$ ) 从 5 到 1 变化时，估计出的门限序列  $\{T_k\}$  在各次相关中都能有效地检测出配准点。

表 4 为相关长度  $L=10$  的高斯图象的匹配结果。

为了评价门限序列的检测结果，这里引入归一化偏差的概念，即在一定信噪比下，已知理论估计的均值为  $\mu_{n\varphi k}$ ，均方差为  $\sigma_{n\varphi k}$ ，且测得第  $k$  次相关的配准度量值为  $\varphi_k$ ，则定义归一化偏差  $\lambda_k$  为

$$\lambda_k = \frac{\varphi_k - \mu_{n\varphi k}}{\sigma_{n\varphi k}}$$

显然，当配准度量值为门限值  $T_k$  时， $\lambda_k = -3$ 。由此可见，当  $\lambda_k > -3$  时都能被检测到。 $\lambda_k$  既反映了偏离均值的程度，也反映了偏离门限的程度。

模拟采用的实际地形图的高度频数分布为近似高斯的。参考图的尺寸为  $30 \times 90$  个象素，传感器图尺寸为  $16 \times 64$  个象素。当信噪比从 3 到 1 变化时，采用幅度排序相关算法都获得了正确的匹配。表 5 给出了信噪比  $SNR=1$  时，在十个不同位置上的匹配结果。

如果设第二、三次相关搜索的次数为  $L$ ，则第二节中的系数  $k$  为

$$k = \frac{(M - N + 1)^2 + L}{(M - N + 1)^2}$$

在采用实际地形图的模拟中，当  $SNR=1$  时测得：

极大值  $k_{\max} = 1.059$

极小值  $k_{\min} = 1.005$

平均值  $k_{\text{ave}} = 1.026$

可以近似地认为幅度排序相关算法的加法操作为  $(M - N + 1)^2 N^2$  次。

高斯图象的匹配结果  $L=10 \quad \sigma_y=1.547$

表 4

SNR		第一次相关 ( $i=1$ )	检测 点数	第二次相关 ( $i=2$ )	检测 点数	第三次相关 ( $i=3$ )	检测 点数	匹配 结果
5	$T_i$	1147.53	1	1232.07	1	1284.16	1	正 确
	$\varphi_i/s$	1227.56		1340.87		1390.84		
	$\lambda_i$	-0.404		-0.872		-1.092		
4	$T_i$	1132.48	1	1225.22	1	1278.84	1	正 确
	$\varphi_i/s$	1219.99		1346.49		1389.49		
	$\lambda_i$	-0.207		-0.625		-1.020		
3	$T_i$	1102.40	1	1210.57	1	1276.26	1	正 确
	$\varphi_i/s$	1186.98		1318.57		1372.34		
	$\lambda_i$	-0.384		-0.882		-1.120		
2	$T_i$	1026.96	1	1169.76	1	1234.24	1	正 确
	$\varphi_i/s$	1112.47		1276.76		1337.92		
	$\lambda_i$	-0.533		-0.899		-1.147		
1	$T_i$	771.46	1	984.78	1	1072.76	1	正 确
	$\varphi_i/s$	851.37		1093.60		1202.07		
	$\lambda_i$	-1.044		-0.928		-0.763		

表 5

地形图的匹配结果  $SNR=1$   $\sigma_y=31.4$ 米

应配准位置	5, 3	21, 14	14, 8	3, 5	7, 6	4, 4	8, 5	13, 13	19, 6	15, 11	
实际配准位置	5, 3	21, 14	14, 8	3, 5	7, 6	4, 4	8, 5	13, 13	19, 6	15, 11	
$T_1$ 15652.3											
第一次相关	$\varphi_1/s$	17322.9	16661.6	18282.9	17345.6	18106.0	17343.7	17126.7	16890.7	18236.4	17972.5
	$\lambda_1$	-0.98	-1.78	0.173	-0.957	-0.041	-0.96	-1.22	-1.51	0.116	-0.20
	检测点数	8	1	11	7	9	6	3	4	13	9
$T_2$ 19980.5											
第二次相关	$\varphi_2/s$	20575.4	20305.3	22273.6	21466.6	22417.3	21363.2	20998.1	21791.9	21759.3	21425.5
	$\lambda_2$	-2.44	-2.69	-0.85	-1.61	-0.71	-1.70	-2.05	-1.30	-1.33	-1.64
	检测点数	3	1	5	3	4	4	2	4	3	2
$T_3$ 21765.5											
第三次相关	$\varphi_3/s$	22226.9	22033.9	23758.3	23139.5	24084.7	22753.1	22173.9	23608.3	23185.6	22851.8
	$\lambda_3$	-2.61	-2.77	-1.30	-1.83	-1.02	-2.16	-2.65	-1.43	-1.79	-2.07
	检测点数	1	1	3	3	3	2	1	3	3	1

## 结 束 语

幅度排序相关算法是由积相关算法演变而来的算法。它既具有积相关算法所特有的优点,即在低信噪比时仍有较高的截获概率,又省略了积相关算法所有的乘法。实现这种算法的关键是确定合适的门限序列 $\{T_k\}$ 。在计算机上通过各种模拟表明:在符合一定的假设条件下,理论上估计出的门限序列 $\{T_k\}$ 在不同信噪比下均能十分有效地检测出配准点。

## 参 考 文 献

- [1] Charles C. Ormsby, "Advanced Scene Matching Techniques", 1979 IEEE NAECON.
- [2] A. Papoulis, "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes", Mc Graw-Hill Book Company, 1965.
- [3] "Image Correlation; Part II Simulation and Analysis", AD-A036665, 1976.
- [4] "TERCOM Performance Analysis and Simulation", Appendix B, AD-783804.

# A Fast Algorithm of Amplitude Ranking Correlation for Images Registration

Jing yi—ping

## Abstract

After investigating the technique for amplitude ranking correlation, this paper presents an algorithm for quantizing and ranking grey levels of pixels of a sensor image. The optimum threshold for quantization has been found; after ranking a sensor image can be decomposed into several 0-1 coded images. Then the coded images will be correlated with a reference image without multiplication operations. For a give quantization function the means and variance of metrics for correlation can be calculated theoretically. Detection threshold sequences  $\{T_k\}$  for different signal to noise ratios can be obtained for the image of Gaussian distribution, Computer simulation

shows that the detection threshold sequence can detect each match point effectively for the images of Gaussian distribution with different correlation lengths and with signal to noise ratios from 5 to 1. It is also shown that, for actual terrain maps with signal to noise ratios from 3 to 1, correct match can be reached.