延迟型泛函微分方程的一般理论

裘 兆 泰

提 要 本文在引进 Schauder 不动点定理的基础上讨论了具有延迟因子的泛函微分方程的一般理论，包括解的存在性、唯一性、连续依赖性以及解的延拓性质，并对文献 [1] 中的某些定理作了补充和推广。

设 $r\geqslant 0$ 是给定的实数，$R=(-\infty,\infty)$，R^n 为具有模$\|\cdot\|$的n維线性矢量空间，$C=C([-r,0],R^n)$ 是連续函数的 Banach 空间，具有一致收斂的拓扑映射，将区间$[-r,0]$映射到 R^n。对任何 $\phi\in C$，定义

$$\|\phi\|=\max_{r\leqslant\theta\leqslant 0}|\phi(\theta)|$$

设$\sigma\in R$，$A\geqslant 0$ 且 $x\in C([\sigma-r,\sigma+A],R^n)$，则对任意 $t\in[\sigma,\sigma+A]$，$x_t\in C$ 定义为

$$x_t(\theta)=x(t+\theta)\quad -r\leqslant\theta\leqslant 0$$

若D是 $R\times C$ 的子集，$f: D\to R^n$ 是给定的函数且"$\cdot$"表示关于 t 的右导数，我们称关系式

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t)\tag{0.1}$$

是D上带有时滞因子的泛函微分方程。

称函数 x 是方程(0.1) 在 $[\sigma-r,\sigma+A]$ 上的解，是指：存在 $\sigma\in R$ 和 $A\geqslant 0$，使得 $x\in C([\sigma-r,\sigma+A],R^n)$，$(t,x_t)\in D$ 且对 $t\in[\sigma,\sigma+A]$ 有 $x(t)$ 满足方程 (0.1).

对于给定的 $\sigma\in R$ 与 $\phi\in C$，称 $x(\sigma,\phi,f)$ 是方程 (0.1) 过初值 (σ,ϕ) 的解，是指：存在$A\geqslant 0$，使得 $x(\sigma,\phi,f)$ 是方程 (0.1) 在 $[\sigma-r,\sigma+A]$ 上的解，且 $x_\sigma(\sigma,\phi,f)=\phi$.

如果给定 $\sigma\in R$，$\phi\in C$ 且 $f(t,\phi)$ 連续，则过初値 (σ,ϕ) 求方程 (0.1) 的解等价于解积分方程

$$x_\sigma=\phi;\quad x(t)=\phi(0)+\int_\sigma^t f(s,x_s)ds\quad t\geqslant\sigma\tag{0.2}$$

利用 x_t 对 t 的連续性，上述等价性的证明是很明显的。

本文 1982年8月16日收到

一、预备知识（不动点定理）

本节中对所有的定理都只叙述结果而不加以证明，有兴趣的读者可参阅文献 [5]、[6]。

定义 1.1　设U是 Banach 空间X的子集，$T:U\to X$，称T为U上的压缩，是指：如果存在$\lambda(0\leqslant\lambda<1)$，使得

$$|Tx-Ty|\leqslant\lambda|x-y|\quad 对一切\ x、y\in U$$

如果还有V也是 Banach 空间X的闭子集，$T:U\times V\to X$，则称T为一致压缩，是指：如果存在 $0\leqslant\lambda<1$，使得

$$|T(x,v)-T(y,v)|\leqslant\lambda|x-y|\quad 对一切\ x、y\in U 和\ v\in V$$

定理 1.1　（压缩映像原理）　如果U是 Banach 空间X的闭子集，$T:U\to U$是压缩的，则T在U上有唯一的不动点。

定义 1.2　（Frechet 导数）　设X、Y是 Banach 空间，D是X中开集。称函数$f:D\to Y$为在D中点x处 Frechet 可微，是指：如果存在$X\to Y$的线性算子$A(x)$，使得对每个$h\in X$，只要$x+h\in D$，就有

$$|f(x+h)-f(x)-A(x)\cdot h|\leqslant\rho(|h|,x)$$

其中 $\rho(|h|,x)$满足$\lim\limits_{|h|\to 0}\dfrac{\rho(|h|,x)}{|h|}\to 0$，线性算子$A(x)$称为$f$在$x$处的导数，而$A(x)\cdot h$称为$f$在$x$处的微分。

定理 1.2　如果U是 Banach 空间X的闭子集，V是 Banach 空间Y的子集，对于任意 $v\in V$，$T_v:U\to U$是U上的一致压缩，对于U中每个固定的x，T_vx 对v是连续的，则 T_v的唯一不动点 $g(v)$ 对v是连续的。更进一步，如果U、V是开集U^0、V^0的闭包，而T_vx 对v、x 有连续的一阶导数，记为 $A(x,v)$ 和 $B(x,v)$，则 $g(v)$关于v有连续的一阶导数。

定理 1.3　（Brouwer 不动点定理）　R^n中单位闭球$\bar{B}$映入自身的任何连续映射φ必有一不动点。

定理 1.4　（Schauder 不动点定理）　如果U是 Banach 空间X的有界闭凸集，映射$T:U\to U$是全连续的，则T在U中有不动点。

二、解的存在性与唯一性

这一节将在假定f是连续的条件下给出方程（0.1）满足初值问题的基本存在定理。证明所用的基本工具是上节已叙述的 Schauder 不动点定理。

先引进一些记号。

对于任意 $(\sigma,\phi)\in R\times C$，定义 $\widetilde{\phi}\in C([\sigma-r,\infty),R^n)$ 为

$$\widetilde{\phi}_\sigma=\phi;\quad \widetilde{\phi}(t+\sigma)=\phi(0)\quad t\geqslant 0$$

设 x 是方程 (0.1) 通过 (σ,ϕ) 的解，如果令

$$x(t+\sigma)=\widetilde{\phi}(t+\sigma)+y(t) \quad t\geqslant -r$$

则由 (0.2) 可知，应有

$$y(t)=\int_0^t f(s+\sigma,\widetilde{\phi}_{s+\sigma}+y_s)ds \quad t\geqslant 0 \tag{2.1}$$
$$y_0(\theta)=0 \quad -r\leqslant\theta\leqslant 0$$

反之，若 y 满足方程(2.1)，则由上述变换不难得到 x 为方程(0.2)的解，即是说，初值问题(0.2)的解等价于求 $\alpha>0$ 以及函数 $y\in C([-r,\alpha],R^n)$，使对 $0\leqslant t\leqslant\alpha$ 上 y 满足方程 (2.1)。对任意实数 α 和 β，我们还定义

$$I_\alpha=[0,\alpha];\ B_\beta=\{\phi\,|\,\phi\in C,\ \|\phi\|\leqslant\beta\}$$
$$\mathcal{A}(\alpha,\beta)=\{y\,|\,y\in C([-r,0],R^n),\ y_0=0,\ y_t\in B_\beta,\ t\in I_\alpha\} \tag{2.2}$$
$$C^0(V,R^n)=\{f\,|\,f\in C(V,R^n),\ V\subset R\times C,\ f\text{ 有界}\}$$

引理 2.1 若 $x\in C([\sigma-r,\sigma+\alpha],R^n)$，则对一切 $t\in[\sigma,\sigma+\alpha]$，$x_t$ 是 t 的连续函数。

这个引理的证明是很明显的。

引理 2.2 设 $\Omega\subset R\times C$ 是开集，$W\subset\Omega$ 是紧集，给定 $f^0\in C(\Omega,R^n)$，则存在 W 的邻域 $V\subset\Omega$，使得 $f^0\in C^0(V,R^n)$。又存在 f^0 的邻域 $U\subset C^0(V,R^n)$ 以及常数 M、α 与 β，使得

$$|f(\sigma,\phi)|<M \quad \text{对 } (\sigma,\phi)\in V,\ f\in U$$

而且，对任意 $(\sigma^0,\ \phi^0)\in W$，如果 $t\in I_\alpha$ 以及 $y\in\mathcal{A}(\alpha,\beta)$，则还有

$$(\sigma^0+t,\ y_t+\widetilde{\phi}^0_{\sigma^0+t})\in V$$

证明： 因为 $W\subset R\times C$ 是紧集，而 f^0 连续，故存在常数 M，使对 $(\sigma^0,\ \phi^0)\in W$ 有 $|f^0(\sigma^0,\phi^0)|<M$. 于是，给定充分小的 $\varepsilon>0$，存在 $\overline{\alpha}$、$\overline{\beta}>0$，使当 $(\sigma^0,\phi^0)\in W$ 以及 $(t,\psi)\in I_{\overline{\alpha}}\times B_{\overline{\beta}}$ 时，有

$$|f^0(\sigma^0+t,\phi^0+\psi)|<M-\varepsilon$$

现令

$$V=\{(\sigma^0+t,\phi^0+\psi)\,|\,(\sigma^0,\phi^0)\in W,\ (t,\psi)\in I_{\overline{\alpha}}\times B_{\overline{\beta}}\}$$

则有 $f^0\in C^0(V,R^n)$，且存在 f^0 的 $\varepsilon-$邻域 $U\subset C^0(V,R^n)$，使当 $f^0\in C^0(V,R^n)$ 而 $f\in U$ 时，就有 $|f-f^0|<\varepsilon$ 即 $|f|<|f^0|+\varepsilon<M$。再令 $0<\beta<\overline{\beta}$，又因 W 是紧集，故可以选择 α 使满足

(i) $\alpha<\overline{\alpha}$

(ii) $|\widetilde{\phi}^0_{\sigma^0+t}-\phi^0|<\overline{\beta}-\beta$ 对一切 $(\sigma^0,\phi^0)\in W$，$t\in I_\alpha$

于是对 $y\in\mathcal{A}(\alpha,\beta)$，就有

$$|\psi|\triangleq|y_t+\widetilde{\phi}_{\sigma^0+t}-\phi^0|\leqslant|y_t|+|\widetilde{\phi}_{\sigma^0+t}-\phi^0|<\overline{\beta}$$

即 $(t,\psi)\in I_\alpha\times B_{\overline{\beta}}\subset I_{\overline{\alpha}}\times B_{\overline{\beta}}$，故 $(\sigma^0+t,\ y_t+\widetilde{\phi}^0_{\sigma^0+t})\in V$

引理 2.3　设 $\Omega\subset R\times C$ 为开集，$W\subset\Omega$是紧集，给定 $f^0\in C(\Omega,R^n)$，取f^0 与W的邻域U、V以及常数M、α、β如引理2.2，若

$$T:W\times U\times\mathcal{A}(\alpha,\beta)\to C([-r,\alpha],R^n)$$
$$T(\sigma,\phi,f,y)(t)=0\quad t\in[-r,0]$$
$$T(\sigma,\phi,f,y)(t)=\int_0^t f(\sigma+s,\widetilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds\qquad t\in I_\alpha$$

则T连续，且存在 $C([-r,\alpha],R^n)$ 上的紧集K，使得

$$T:W\times U\times\mathcal{A}(\alpha,\beta)\to K$$

更进一步，如果 $M\alpha\leqslant\beta$，则还有

$$T:W\times U\times\mathcal{A}(\alpha,\beta)\to\mathcal{A}(\alpha,\beta)$$

证明：

1^0 对一切 t、$\tau\in I_\alpha$，由引理2.2我们有

$$|T(\sigma,\phi,f,y)(t)-T(\sigma,\phi,f,y)(\tau)|=\left|\int_\tau^t f(\sigma+s,\widetilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds\right|\leqslant M|t-\tau|$$
$$|T(\sigma,\phi,f,y)(t)|\leqslant M\alpha.$$

现令

$$K=\{g\,|\,g\in C([-r,\alpha],R^n),\ |g(t)-g(\tau)|\leqslant M|t-\tau|,\ |g(t)|\leqslant M\alpha\}$$

则K显然是凸闭的，且对任意序列$\{g_n\}\subset K$是一致有界等度连续。由 Arzela-Ascoli定理可知存在 $g\in C([-r,\alpha],R^n)$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n=g$. 但因$K$为闭集，故$g\in K$即$K$为紧集。

同时还有

$$T:W\times U\times\mathcal{A}(\alpha,\beta)\to K$$

当$M\alpha\leqslant\beta$ 时，又有 $K\subset\mathcal{A}(\alpha,\beta)$。于是

$$T:W\times U\times\mathcal{A}(\alpha,\beta)\to\mathcal{A}(\alpha,\beta)$$

2^0下证T为连续算子

设 $(\sigma^k,\phi^k,f^k,y^k)\in W\times U\times\mathcal{A}(\alpha,\beta)$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}(\sigma^k,\phi^k,f^k,y^k)=(\sigma^0,\phi^0,f^0,y^0)\in W\times U\times\mathcal{A}(\alpha,\beta)$。现 $\{T(\sigma^k,\phi^k,f^k,y^k)\}\subset K$且$K$为紧集，故有

$$\lim_{k\to\infty}T(\sigma^k,\phi^k,f^k,y^k)=\nu\in K$$

又对一切 $s\in I_\alpha$，当$f^k(\sigma^k+s,\widetilde{\phi}^k_{\sigma^k+s}+y^k_s)\to f^0(\sigma^0+s,\widetilde{\phi}^0_{\sigma^0+s}+y^0_s)$ 时，显然有 $f^k\in U$. 由引理2.2可知存在$M>0$，使对充分大K成立 $|f^k|<M$. 于是由 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}T(\sigma^k,\phi^k,f^k,y^k)(t)&=\lim_{k\to\infty}\int_0^t f^k(\sigma^k+s,\widetilde{\phi}^k_{\sigma^k+s}+y^k_s)ds\\&=\int_0^t f^0(\sigma_0+s,\widetilde{\phi}^0_{\sigma^0+s}+y^0_s)ds\\&=T(\sigma^0,\phi^0,f^0,y^0)(t)\end{aligned}$$

从而T是连续的。引理证完。

定理 2.1（存在性定理）　设Ω是 $R\times C$ 中的开集，$f\in C(\Omega,R^n)$，如果 $(\sigma,\phi)\in$

Ω，则方程 (0.1) 在 I_a 上存在通过 (σ,ϕ) 的解。更一般地，如果$W\subset\Omega$是紧集，且给定 $f^0\in(\Omega,R^n)$，则存在W的邻域$V\subset\Omega$，使得 $f^0\in C^0(V,R^n)$，又存在 f^0 的邻域 $U\subset C^0(V,R^n)$ 以及常数 $\alpha>0$，使对任意 $(\sigma,\phi)\in W$，$f\in U$，则方程 (0.1) 在 $[\sigma-r,\sigma+\alpha]$ 上存在通过 (σ,ϕ) 的解 $x(\sigma,\phi,f)$.

证明：

1^0 取单点集 $W=\{(\sigma,\phi)\}$ 为紧集，因 $\mathcal{A}(\alpha,\beta)\subset C([-r,\alpha],R^n)$ 为有界闭凸集，当 $M\alpha\leqslant\beta$ 时，从引理 2.3 得出

$$T:\mathcal{A}(\alpha,\beta)\to\mathcal{A}(\alpha,\beta)$$

是全连续的，再由 Schauder 不动点定理可知，T 在 $\mathcal{A}(\alpha,\beta)$ 上有不动点。即

$$y(t)=Ty(t)=\int_0^t f(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds\quad t\in I_\alpha$$

$$y_0=Ty(t)=0\quad t\in[-r,0]$$

从而方程 (0.1) 有通过 (σ,ϕ) 的解。

2^0 为了证明定理的后一个结论，在 (2.2) 中记

$I_\alpha(\sigma)=[\sigma,\sigma+\alpha]$；$\mathcal{A}_\sigma(\alpha,\beta)=\{y\,|y\in C([\sigma-r,\sigma+\alpha],R^n),y_\sigma=0,y_t\in B_\beta,\ t\in I_\alpha(\sigma)\}$，其余记号不变。在引理 2.3 中令

$$T:W\times U\times\mathcal{A}(\alpha,\beta)\to C([\sigma-r,\sigma+\alpha],R^n)$$

$$T(\sigma,\phi,f,y)(t)=0\quad t\in[\sigma-r,\sigma]$$

$$T(\sigma,\phi,f,y)(t)=\int_\sigma^t f(s,x_s)ds\quad t\in I_\alpha(\sigma)$$

则几乎可以逐字逐句重复引理 2.3 的证明而得到相应结论。其余部分证明同1^0。

定义 2.1 设 $\Omega\subset R\times C$ 为开集，$f:\Omega\to R^n$ 是连续的，称 $f(t,\phi)$ 在Ω上对 ϕ 满足 Lipschitz 条件，是指：存在常数K，使对一切 (σ,ϕ_1)、$(\sigma,\phi_2)\in\Omega$，有

$$|f(t,\phi_1)-f(t,\phi_2)|\leqslant K\,|\phi_1-\phi_2|$$

又称 $f(t,\phi)$ 为对 ϕ 局部满足 Lipschitz 条件，是指：对任意紧集$W\subset\Omega$（或有界闭集 $U\subset\Omega$），存在常数 K_W，使对一切(σ,ϕ_1)，$(\sigma,\phi_2)\in W$，有

$$|f(t,\phi_1)-f(t,\phi_2)|\leqslant K_W\,|\phi_1-\phi_2|$$

定理 2.2（唯一性定理） 设 $f:[\sigma,a]\times C_D\to R^n$ 是连续的。其中 $C_D=C([-r,0],D)$，$D\subset R^n$ 为开集。且对 ϕ 是局部 Lipschitz 的，则对任意给定的 $\phi\in C_D$和 $\bar{a}\in(\sigma,a]$，方程 (0.1) 在 $[\sigma-r,\bar{a})$ 上至多只有一个解。

证 明： 用反证法。设对某 $\bar{a}\in(\sigma,a]$，有两个解 x 与 $y(x\not\equiv y)$ 映射 $[\sigma-r,\bar{a}]\to D$。令

$$t_0=\inf\{t\,|t\in(\sigma,\bar{a}),x(t)\neq y(t)\}$$

则 $\sigma\leqslant t_0<\bar{a}$，且在区间 $[\sigma-r,t_0]$ 上恒有 $x(t)\equiv y(t)$. 现 $(t_0,x_{t0})\in[\sigma,\bar{a})\times C_D$，而$D$为开集，从而存在充分小的正数 a 、b，使当令集合 $W=[t_0,t_0+a]\times\{\psi|\ \psi\in C,\ \|\psi-x_{t0}\|\leqslant b\}$ 时，有$W\subset[\sigma,a)\times C_D$.$W$显然是有界闭集，由条件$f$ 在W上是Lipschitz的，不妨设 Lipschitz 常数为 K_W.

由引理 2.1 可知，存在常数 $\delta(0<\delta\leqslant a)$，使对一切 $t\in[t_0,t_0+\delta)$ 有满足方程(0.2)

的解 x、y，且使 (t,x_t)、$(t,y_t)\in W$，于是当 $t\in[t_0,t_0+\delta)$ 时，有

$$\|x(t)-y(t)\|=\|\int_\sigma^t [f(s,x_s)-f(s,y_s)]ds\|$$
$$\leqslant\int_\sigma^t K_W\cdot\|x_t-y_t\|ds$$

注意到当 $t\in[t_0-r,t_0]$ 时有 $x(t)\equiv y(t)$，从而上式可以改写为：对一切 $t\in[t_0,t_0+\delta)$ 有

$$\|x_t-y_t\|\leqslant\int_{t_0}^t K_W\cdot\|x_t-y_t\|ds$$

由常微分方程理论中熟知的 Bellman 不等式，即有

$$\|x_t-y_t\|=0 \quad 即 \quad x_t=y_t \quad t\in[t_0,t_0+\delta)$$

从而可以得到当 $t\in[t_0,t_0+\delta)$ 时还有 $x(t)=y(t)$，这与 t_0 的假设条件矛盾。定理证完。

与常微分方程的理论不同，对于延迟型泛函微分方程(0.1)来说，仅仅规定映射 f 的连续性并不能保证过初值 (σ,ϕ) 一定存在解。定理2.1给出了解的存在性条件。事实上，对方程(0.1)来说，最简单的存在性定理可以通过假设映射在整个 $R\times C$ 上满足Lipschitz条件而得到。但是相对于局部存在性而言，只须假设 f 满足局部Lipschitz条件也已经足够。作为本节的最后部分，我们将证明这一点。

定理 2.3 (局部存在性定理) 设 $f:[\sigma,\alpha)\times C_D\to R^n$ 连续且对 ϕ 是局部Lipschitz的，则对任意 $\phi\in C_D$，方程(0.1)对某 $\bar{\alpha}>0$ 在 $[\sigma-r,\sigma+\bar{\alpha})$ 上解存在且唯一。

证明：

1^0 考虑充分小的正数 a、b，使当令集合

$$W=[\sigma,\sigma+a]\times\{\psi\,|\psi\in C,\ \|\psi-\phi\|\leqslant b\}$$

时，有 $W\subset[\sigma,\alpha)\times C_D$. W 显然是有界闭集，由条件，f 在 W 上是 Lipschitz 的，不妨设 Lipschitz 常数为 K_W，定义 $[\sigma-r,\sigma+a]\to R^n$ 的连续函数 $\bar{x}$：

$$\bar{x}(t)=\begin{cases}\phi(t-\sigma) & \sigma-r\leqslant t\leqslant\sigma\\ \phi(0) & \sigma\leqslant t\leqslant\sigma+a\end{cases}$$

则显然有 $(t,\bar{x}_t)\in[\sigma,\alpha)\times C_D$，故 $f(t,\bar{x}_t)$ 对 t 连续，从而存在常数 M_1，使当 $t\in[\sigma,\sigma+a]$ 时有 $|f(t,\bar{x}_t)|\leqslant M_1$. 现令 $M=K_W\cdot b+M_1$，由引理2.1可知，存在常数 $\delta(0<\delta\leqslant a)$，使对一切 $t\in[\sigma,\sigma+\delta]$，有

$$\|\bar{x}_t-\phi\|=\|\bar{x}_t-\bar{x}_\sigma\|\leqslant b$$

选择 $\bar{\alpha}>0$，使得 $\bar{\alpha}=\min\left\{\delta,\dfrac{b}{M},\dfrac{1}{K_W}\right\}$，并记

$$U=\{x\,|x\in C([\sigma-r,\sigma+\bar{\alpha}],R^n)\ 且\ x(t)=\phi(t-\sigma)$$
$$\sigma-r\leqslant t\leqslant\sigma;\ \|x(t)-\phi(0)\|\leqslant b,\ \sigma\leqslant t\leqslant\sigma+\bar{\alpha}\}$$

那么

(i) U 是 Banach 空间 $C([\sigma-r,\sigma+\bar{\alpha}],R^n)$ 的闭子集；

(ii) 当 $x\in U$ 以及 $t\in[\sigma,\sigma+\bar{\alpha}$ 时]，有 $\|x_t-\bar{x}_t\|\leqslant b$

从而

$$|f(t,x_t)|\leqslant|f(t,x_t)-f(t,\bar{x}_t)|+|f(t,\bar{x}_t)|$$
$$\leqslant K_W\cdot\|x_t-\bar{x}_t\|+|f(t,\bar{x}_t)|\leqslant K_Wb+M_1=M$$

2^0 对任意 $x\in U$，在 $[\sigma-r,\sigma+\overline{\alpha}]$ 上定义算子 T：

$$(Tx)(t)=\begin{cases}\phi(t-\sigma) & \sigma-r\leqslant t\leqslant\sigma\\ \phi(0)+\int_\sigma^t f(s,t_s)ds & \sigma\leqslant t\leqslant\sigma+\overline{\alpha}\end{cases}$$

则显然有 $Tx\in C([\sigma-r,\sigma+\overline{\alpha}],R^n)$ 且

$$\|(Tx)(t)-\phi(0)\|\leqslant\int_\sigma^t |f(s,t_s)|ds\leqslant M\cdot\overline{\alpha}\leqslant b$$

故 $Tx\in U$，即是说有 $T:U\to U$.

对任意 $x、y\in U$，我们有

$$\|Tx-Ty\|=|\int_\sigma^t[f(s,x_s)-f(s,y_s)]ds|\leqslant\int_\sigma^t K_W\cdot|x_s-y_s|ds$$

$$\leqslant K_W\cdot\overline{\alpha}\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x_s-y_s|=K_W\cdot\overline{\alpha}\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x(s+\theta)-y(s+\theta)|$$

记 $\lambda=K_W\cdot\overline{\alpha}<1$，注意到当 $\sigma-r\leqslant t\leqslant r$ 时恒有 $x(t)=y(t)$，于是上式可改写为：当 $t\in[\sigma,\ \sigma+\overline{\alpha}]$时，有

$$\|Tx-Ty\|\leqslant\lambda\sup|x(t)-y(t)|=\lambda\cdot\|x-y\|$$

从而 $T:U\to U$是压缩的。由定理1.1可知T在U上有唯一不动点 $x\in U$ 满足

$$x(t)=\begin{cases}\phi(t-\sigma) & \sigma-r\leqslant t\leqslant\sigma\\ \phi(0)+\int_\sigma^t f(s,x_s)ds & \sigma\leqslant t\leqslant\overline{\alpha}\end{cases}$$

即方程(0.1)在 $[\sigma-r,\sigma+\overline{\alpha})$上过初值 (t,x_t) 的解存在且唯一。

三、解的延拓

定义 3.1 设方程(0.1)中的f连续，如果x是方程(0.1)在区间$[\sigma,a)$上的解，称$\hat{x}$是x的延拓，是指：如果存在$b>a$，使得$\hat{x}$定义在$[\sigma-r,b)$上，在$[\sigma-r,a)$上与x一致，且$\hat{x}$在$[\sigma,b)$上满足方程(0.1)；如果x的延拓不存在，则称x是不可延拓的，也即是说，区间$[\sigma,a)$是使解x存在的最大区间。

定理 3.1 设 $\Omega\subset R\times C$ 为开集，$f\in C(\Omega,R^n)$. 如果 x 是方程(0.1)在 $[\sigma-r,b)$上的非延拓解，则对Ω中任意紧集W，存在t_W，使对一切$t\in[t_W,b)$有 $(t,x_t)\notin W$.

证明： 不妨设 $r>0$，只考虑$b<+\infty$的情况。用反证法。

若当$r>0$时定理的结论不成立，则存在实数列 $t_k\to b^-(k\to\infty)$ 以及 $\psi\in C$，使当 $k\to\infty$时 $t_k\to b, x_{t_k}\to\psi$，且 $(t_k,x_{t_k})\in W,(b,\psi)\in W$

于是，对任意 $\varepsilon>0$ 存在$K>0$，使当 $k>K$ 时

$$\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant-\delta}|x_{t_k}(\theta)-\psi(\theta)|<\varepsilon$$

这里δ是充分小的正数。现 $x_t(\theta)=x(t+\theta)(-r\leqslant\theta\leqslant0,r>0)$，故有

$$x(b+\theta)=\psi(\theta)\quad(-r\leqslant\theta<0)$$

即是说，$\lim\limits_{t\to b^-}x(t)$存在。补充定义 $x(b)=\psi(0)$. 则 $x(t)$ 在 $[\sigma-r,b]$ 上连续。现令

$$\phi(\theta)=x(\theta)\in C\quad\theta\in[\sigma-r,b]$$

则因$(b,x_b)\in W$，于是由定理2.1可知解至少在$[b,b+\alpha_1]$上存在。其中α_1为某个确定的正数。这与解的非延拓性矛盾。定理证完。

定理 3.2 设$\Omega\subset R\times C$为开集，$f:\Omega\to R^n$是全連续的，x是方程(0.1)在$[\sigma-r,b)$上的非延拓解，则对$R\times C$上的任何有界闭集$U\subset\Omega$，存在t_u，使对一切$t\in[t_u,b)$有$(t,x_t)\notin U$.

这个定理的证明与前一个类似，有兴趣的读者可以自己完成。

下面将讨论什么时候函数x能成为延迟型泛函微分方程的非延拓解。为此先不加证明地引进 Tietze 延拓定理。

引理 3.1 （Tietze 延拓定理） 设X为度量空间，$S\subset X$是闭子集，而$g:S\to R^n$是連续的，则存在連续映射$G:X\to R^n$，使对一切$\phi\in S$，有$G(\phi)=g(\phi)$.

定理 3.3 设$\sigma-r<\sigma<b$，令$x:[\sigma-r,b)\to R$是連续可微的，满足条件

$$\lim_{t\to b^-}x(t)\ \text{不存在}\tag{3.1}$$

则(1)存在連续映射$G:C^r\to R^n$，其中$C^r=C([-r,0],R^n)$，使得x是方程$\dot{x}(t)=G(x_t)$在$[\sigma,b)$上的非延拓解；

(2) 如果对一切$t\in[\sigma,b)$，$\ddot{x}(t)$存在，则存在$f:R\times C^r\to R^n$对t和x是局部 Lipschitz 的，使得x是方程$\dot{x}(t)=f(t,x_t)$在$[\sigma,b)$上的非延拓解。

证明：

1^0 令$x:[\sigma-r,b)\to R$是連续可微的并满足(3.1)，即$x(t)$当$t\to b$时或者沒有聚点($|x(t)|\to\infty$)，或者有多于一个聚点。在上述情况下，应有下面的结果：

(i) x_t当$t\to b^-$时在C^r上无极限点；

(ii) $S=\{x_t\,|\,\sigma\leqslant t<b\}$是$C^r$的闭子集。

事实上，若对任意序列$\{t_n\}$，$t_n\to b(n\to\infty)$和某个$\phi\in C^r$有$x_{t_n}\to\phi\in C^r(n\to\infty)$，即是说，对任意$\theta\in[-r,0)$都有$x_{t_n}(\theta)\to\phi(\theta)$. 但

$$x_{t_n}(\theta)=x(t_n+\theta)\to x(b+\theta)\quad t_n\to b$$

因此$\phi(\theta)=x(b+\theta)$，而当$\theta\to0^-$时，又有$\phi(\theta)\to\phi(0)$，从而$\lim\limits_{t\to b^-}x(t)=\phi(0)$，这与条件(3.1)矛盾，于是(i)成立。

再证(ii)。假设对某序列$\{t_n\}\subset[\sigma,b)$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_{t_n}=\phi\in C^r$而$\phi\notin S$.考虑$\{t_{nk}\}$的收敛点为$\tau$，那么$\tau\notin[\sigma,b)$. 事实上，如若有$x_{n_k}\to x_\tau=\phi(k\to\infty,\sigma\leqslant\tau<b)$则有$\phi\in S$，与假设矛盾。从而只能有$t_n\to b^-$，但(i)中已证此时$\{x_t\}$无极限点，于是(ii)得证。

2^0 下面证明命题(1).

对于$\phi\in S$，导数$\dot{\phi}(\theta)$存在，利用ϕ在0处的左导数，定义

$$g(\phi)=\dot{\phi}(0)\quad\phi\in S$$

由$g(x_t)=\dot{x}_t(0)=\dot{x}(t)$可知$g$在$S$上連续。倘若不然，则存在$\{\phi_n\}\subset S\ (n=1,2,\cdots)$，$\phi\in S$以及$\varepsilon_0>0$，$\phi_n\to\phi$而

$$|g(\phi_n)-g(\phi)|\geqslant\varepsilon_0\quad(n=1,2,\cdots)$$

于是存在$\{t_n\}\subset[\sigma,b)$使得$\phi_n=x_{t_n}$. 现设有$\tau\in[\sigma,b)$，$t_n\to\tau$，由1^0中(i)的结论可知

$\tau\neq b$. 于是由 $\phi=x_\tau$ 以及 $x:[\sigma-r,b)\to R$ 的連续可微性，即有

$$g(x_{t_n})=\dot{x}(t_n)\to\dot{x}(\tau)=g(x_\tau)$$

即 $g(\phi_n)\to g(\phi)$. 这与假设条件矛盾，于是 g 必定連续。

由 1^0 中 (ii) 的结论已证 $S\subset C^r$ 为闭子集，而 $g:S\to R^n$是連续的，于是由引理 3.1 (Tietze) 可知存在連续映射 $G:C^r\to R^n$ 是連续的，且对 $t\in[\sigma,b)$ 有 $\dot{x}(t)=G(x_t)$，从而 x 是 $\dot{x}=G(x_t)$ 在 $[\sigma,b)$ 上的非延拓解。

3^0 再证明命题(2).

对任意$t\in R$ 和 $\phi\in C^r$，定义函数

$$F(t,\phi)=\begin{cases}0 & t\geqslant b\\ \dot{x}(t)\cdot\left(1-\dfrac{\|x_t-\phi\|}{b-t}\right) & \left\langle\begin{array}{l}\sigma\leqslant t<b\\ \|x_t-\phi\|\leqslant b-t\end{array}\right.\\ 0 & \left\langle\begin{array}{l}\sigma\leqslant t<b\\ \|x_t-\phi\|>b-t\end{array}\right.\\ F(\sigma,\phi) & t\leqslant\sigma\end{cases}$$

则$F(t,x_t)=\dot{x}(t)$，且$F(t,\phi)$对任意 $(t,\phi)\in R\times C^r$ 是連续的。事实上，令 $t_n\to t$，$\phi_n\to\phi(n\to\infty)$，若 $t\neq b$，则当 $n\to\infty$ 时显然有 $F(t_n,\phi_n)\to F(t,\phi)$，若 $t=b$ 且 $F(t_n,\phi_n)\neq 0(n=1,2,\cdots)$. 则有

$$\|x_{t_n}-\phi_n\|<|b-t_n|\to 0\quad(n\to\infty)$$

于是 $x_{t_n}\to\phi(n\to\infty)$.这又与 1^0 中 (i) 的结论矛盾。于是对充分大的 n，应有 $F(t_n,\phi_n)=0$. 而F对每个 $\phi\in C^r$在 (b,ϕ)的某邻域中为 0，从而F是連续的。

现在设 $\ddot{x}$ 存在，令 $W=[\sigma,b)\times C^r$，对 $(t,\phi)\in W$重新定义映射

$$F(t,\phi)=\dot{x}(t)(|b-t|-\|x_t-\phi\|)\cdot|b-t|^{-1}$$

我们将证明，F在W上是局部 Lipschitz 的，即是说，对W的任意有界闭子集N，存在常数$L>0$，使对任意 $\omega_1=(t_1,\phi_1)$、$\omega_2=(t_2,\phi_2)\in N$，有 $|F(\omega_1)-F(\omega_2)|\leqslant L\|\omega_1-\omega_2\|$。这里 $\|\omega_1-\omega_2\|=\|\phi_1-\phi_2\|+|t_1-t_2|$。

事实上，若记 $F_1(\omega)=\dot{x}(t)$，$F_2(\omega)=|b-t|$，$F_3(\omega)=-\|x_t-\phi\|$，$F_4(\omega)=|b-t|^{-1}$，则 $|F_i|$ $(i=1,2,3,4)$在N上有界，且对任意 ω_1、$\omega_2\in N$，有

$$|F_1(\omega_1)-F_1(\omega_2)|=|\dot{x}(t_1)-\dot{x}(t_2)|\leqslant\sup_{t\in N}\ddot{x}(t)|t_1-t_2|;$$

$$|F_2(\omega_1)-F_2(\omega_2)|=||b-t_1|-|b-t_2||\leqslant|t_1-t_2|;$$

$$\begin{aligned}|F_3(\omega_1)-F_3(\omega_2)|&=\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}||x(t_1+\theta)-\phi_1|-|x(t_2+\theta)-\phi_2||;\\&\leqslant\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|\sup_{t\in N}\dot{x}(t+\theta)|t_1-t_2|+\|\phi_1-\phi_2\||\\&\leqslant(\sup_{\substack{-r\leqslant\theta\leqslant 0\\ t\in N}}|\dot{x}(t+\theta)|+1)(\|\phi_1-\phi_2\|+|t_1-t_2|);\end{aligned}$$

$$|F_4(\omega_1)-F_4(\omega_2)|=\left|\frac{1}{|b-t_1|}-\frac{1}{|b-t_2|}\right|\leqslant\frac{1}{\inf\limits_{t\in N}|b-t|^2}\cdot|t_1-t_2|$$

于是$F_i(i=1,2,3,4)$在N上分别有 Lipschitz 常数$L_1=\sup\limits_{t\in N}|\ddot{x}(t)|$，$L_2=1$，$L_3=\sup\limits_{\substack{-r\leqslant\theta\leqslant 0\\ t\in N}}|\dot{x}(t+\theta)|+1$，$L_4=1/\inf\limits_{t\in N}|b-t|^2$. 注意到

(i) 若 $F_i(i=1,2,\cdots n)$ 是在N上具有常数 L_i 的 Lipschitz 函数，则 $\sum_{i=1}^{n} F_i$ 在N上仍是 Lipschitz 的，且常数为 $\sum_{i=1}^{n} L_i$.

(ii) 若 $F_i(i=1,2)$ 是在N上具有常数 L_i 的 Lipschitz 函数，且 $|F_i|\leqslant M_i(i=1,2)$，则 $F_1\cdot F_2$ 在N上仍是 Lipschitz 的，且常数为 $L_1M_1+L_2M_2$.

于是 $F=F_1\cdot(F_2+F_3)\cdot F_4$ 在 N 上是 Lipschitz 的，从而 F 在 W 上是局部 Lipschitz 的。

四、解的连续依赖性与可微性

定义 4.1 设 $\Omega\subset R\times C$ 是开集，$(\sigma^0,\phi^0)\in\Omega, f^0\in C(\Omega,R^n)$，方程 (0.1) 通过 (σ^0,ϕ^0) 的解 $x^0=x^0(\sigma^0,\phi^0,f^0)$ 在 $[\sigma^0-r,b]$ 上存在，通过 (σ^k,ϕ^k) 的解 $x^k=x^k(\sigma^k,\phi^k,f^k)$ 在 $[\sigma^k-r,b]$ 上也存在，称在$[\sigma^0-r,b]$上一致地有 $x^k\to x^0$, 是指：对任意$\varepsilon>0$，存在 $K_1(\varepsilon)>0$，使对一切 $k>K_1(\varepsilon)$，$x^k(t)$ 定义在$[\sigma^0-r+\varepsilon,b]$上, 且在$[\sigma^0-r+\varepsilon,b]$ 上一致地有 $x^k\to x^0$.

定理 4.1 (连续依赖性定理) 设$\Omega\subset R\times C$ 是开集，$(\sigma^0,\phi^0)\in\Omega, f^0\in C(\Omega,R^n)$，方程 (0.1) 通过 (σ^0,ϕ^0) 的解 x^0 在 $[\sigma^0-r,b]$ 上存在且唯一，令 $W^0\subset\Omega$ 是由 $W^0=\{(t,x_t^0)\mid t\in[\sigma^0,b]\}$ 所定义的紧集，令 V^0 是 W^0 的邻域且 f^0 在V^0 上有界，如果 $(\sigma^k,\phi^k,f^k)(k=1,2,\cdots)$ 满足条件

$$\sigma^k\to\sigma^0;\quad \phi^k\to\phi^0;\quad \|f^k-f^0\|_{V_0}\to 0\quad (k\to\infty)$$

其中 $\|f\|_{V_0}=\sup_{(t,\phi)\in V^0}|f(t,\phi)|$, 则存在$K^0>0$, 使当 $k>K^0$ 时方程(0.1)通过(σ^k,ϕ^k) 的每一个解 $x^k=x^k(\sigma^k,\phi^k,f^k)$在$[\sigma^k-r,b]$ 上存在，且在 $[\sigma^0-r,b]$ 上一致地有$x^k\to x^0$.

证明： 因 W^0 是紧集，而当 $k\to\infty$时有 $\sigma^k\to\sigma^0$，$\phi^k\to\phi^0$，从而可知 $W^0\cup\{(\sigma^k,\phi^k)\mid k=1,2,\cdots\}$ 也是紧集。现对充分大的 K_0 取 $W=W^0\cup\{(\sigma^k,\phi^k)\mid k\geqslant K_0\}$，取 α、β足够小，使

$$V=\{(\sigma^0+t,\phi^0+\psi)\mid(\sigma^0,\phi^0)\in W,(t,\psi)\in I_\alpha\times B_\beta\}\subset V^0$$

由定理2.1，通过 (σ^k,ϕ^k) 的每一个解 $x^k=x^k(\sigma^k,\phi^k,f^k)$ 在$[\sigma^k-r,\sigma^k+\alpha(k)]$ 上存在，这里 $\alpha(k)$表示常数α依赖于 k。若令 $x^k(\sigma^k+t)=\widetilde{\phi}^k(\sigma^k+t)+y^k(t)$ 即 $y^k(t)=x^k(\sigma^k+t)-\widetilde{\phi}^k(\sigma^k+t)$，作算子$T$ 如同引理2.3，则对一切 $t\in I_{\alpha(k)}$，有

$$T(\sigma^k,\phi^k,f^k,y^k)(t)=\int_0^t f^k(\sigma^k+s,\widetilde{\phi}_{\sigma^k+s}+y_s^k)ds=y^k(t)$$

由引理 2.3 可知：

(i) T是连续算子；

(ii) 存在 $C([-r,\alpha(k)),R^n)$ 上的紧集 K，使 $y^k(t)=T(\sigma^k,\phi^k,f^k,y^k)(t)\in K$。于是对 $\{y^k\}$ 的任何子序列，存在 $y^*\in K$，使得在 $[-r,\alpha(k)]$上一致地有 $y^k\to y^*$. 又由 T 的连续性，有

$$y^*=\lim_{k\to\infty}y^k=\lim_{k\to\infty}T(\sigma^k,\phi^k,f^k,y^k)=T(\sigma^0,\phi^0,f^0,y^0)=y^0$$

即 $\{y^k\}$ 中任何序列都有收敛对 y^0 的子列，从而整个序列收敛到 y^0。现转而考虑方程的解 x^k 和 x^0，因

$$x^k(\sigma^k+t)=\widetilde{\phi}^k(\sigma^k+t)+y^k(t),\quad x^0(\sigma^0+t)=\widetilde{\phi}^0(\sigma^0+t)+y^0(t)$$

当 $t\in[-r,\alpha(k)]$ 时，$\sigma^k+t\in[\sigma^k-r,\sigma^k+\alpha(k)]$，而 $\sigma^k\to\sigma^0(k\to\infty)$。故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $K_1(\varepsilon)>0$，使当 $k\geqslant K_1(\varepsilon)$ 时 $[\sigma^k-r,\sigma^k+\alpha(k)]\supset[\sigma^0-r+\varepsilon,\sigma^0+\alpha]$，其中 $\alpha=\inf\alpha(k)-\varepsilon$。又因为在 $[-r,\alpha(k)]$ 上一致地有 $y^k\to y^0$，注意到

$$\widetilde{\phi}_\sigma(\theta)=\widetilde{\phi}(\sigma+\theta)=\phi(\theta)\quad -r\leqslant\theta\leqslant 0$$

以及

$$\widetilde{\phi}(t+\sigma)=\phi(0)\quad t\geqslant 0$$

故对一切 $t\in[\sigma^0-r+\varepsilon,\alpha]$，有 $\widetilde{\phi^k}(\sigma^k+t)=\widetilde{\phi^0}(\sigma^0+t)$。从而最后在区间 $[\sigma^0-r,\alpha]$ 上一致地有 $x^k\to x^0$。在长度为 α 的区间上逐次重复以上证明过程，定理即证完。

最后讨论解的可微分性。现以 $C^p(\Omega,R^n)(P\geqslant 0)$ 表示 Ω 到 R^n 的连续函数空间，且对 Ω 上的 ϕ 为 p 阶有界连续可导。定义范数为

$$\|\phi\|_p=\sup_{t\in\Omega}\{|\phi^{(n)}(t)|\;|n=1,2\cdots p\}$$

定理 4.2 如果 $f\in C^p(\Omega,R^n)$，$p\geqslant 1$，则方程 (0.1) 通过 (σ,ϕ) 的解 $x(\sigma,\phi,f)(t)$ 是唯一的，且对 $x(\sigma,\phi,f)$ 定义域内的任意紧集上的 t 关于 (ϕ,f) 连续可微。

证明：

1^0 由 $f\in C^p(\Omega,R^n)(p\geqslant 1)$ 可知 f 的导函数在 Ω 上有界，必满足 Lipschitz 条件。由定理 2.1 和定理 2.2 可知方程 (0.1) 通过 (σ,ϕ) 的解 $x=x(\sigma,\phi,t)$ 在某一区间上存在且唯一。不妨设使解存在的最大区间为 $[\sigma-r,\sigma+\omega)$，并固定 $b<\omega$。由条件 $\phi\in\Omega$ 为开集，故存在 ϕ 的开邻域 U 使对一切 $\psi\in U$、$t\in[\sigma-r,\sigma+b]$，$x(\sigma,\psi,f)(t)$ 有定义。

令 $W=\{(t,x_t)|t\in[\sigma,\sigma+b]\}$，则 W 显然是紧集。取 f 与 W 的邻域 U、V 以及常数 M、α、β 如引理 2.2，且选择 α 使 $M\alpha\leqslant\beta$，$K\alpha<1$，这里 K 是 f 在 Ω 上关于 ϕ 的导数的上界。若定义算子 T 如同引理 2.3，则有：

(i) $T:\mathcal{A}(\alpha,\beta)\to\mathcal{A}(\alpha,\beta)$;

(ii) 对任意 ϕ_1、$\phi_2\in\mathcal{A}(\alpha,\beta)$，有

$$\begin{aligned}|(T\phi_1)(t)-(T\phi_2)(t)|&\leqslant\int_0^\sigma|f(s,x_s(\sigma,\phi_1,f))-f(s,x_s(\sigma,\phi_2,f))|\,ds\\&\leqslant\int_0^\sigma|\dot f_\phi|\cdot|\phi_1(t)-\phi_2(t)|\,ds\\&\leqslant K\alpha\cdot|\phi_1(t)-\phi_2(t)|=\lambda\cdot|\phi_1(t)-\phi_2(t)|\end{aligned}$$

其中 $\lambda=K\alpha<1$。从而 T 是压缩的，且压缩常数与 $(\sigma,\phi,f)\in V\times U$ 无关。也即是说，T 是 $\mathcal{A}(\alpha,\beta)$ 上的一致压缩。若令

$$x(\sigma+t)=\widetilde{\phi}(\sigma+t)+y(t)\quad t\in I_\alpha$$

则 y 即成为算子 T 的不动点。

2^0 记

$$T(\sigma,\phi,f)(t)=\int_{\sigma}^{t} f(s,x_s(\sigma,\phi,f))ds \quad t\in I_a(\sigma)$$

易知算子 $T(\sigma,\phi,f)$对 ϕ、f 是连续可微的。于是由定理 1.2 可知 $y=y(\sigma,\phi,f)$ 在 Ω 上对 ϕ 連续可微，从而当 $t\in[\sigma,\sigma+a]$ 肘 $x=x(\sigma,\phi,f)(t)$ 在Ω上对 ϕ 也連续可微。同理可知 $x(\sigma,\phi,f)(t)$关于 f 是連续可微的。在长度为 a 的区间上逐次使用上述证明方法，我们就把结论延拓到整个区间 $[\sigma-r,\sigma+b]$ 上。

要强调指出的是，在定理 4.2 的假设条件下，$x(\sigma,\phi,f)(t)$ 关于 σ 一般并不可微。J.K.Hale(1973) 曾给出过一个反例，我们在此不再赘述了。

参 考 文 献

[1] Hale J.K., Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin, 1977.

[2] Driver R.D., Ordinary and Delay Differential Equations, Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin, 1977.

[3] Nelson Dunford and Jacob T.Schwartz Linear Operators Part I: General Theory, Interscience Publishers INC., New York, 1958.

[4] Yorke J. A., Noncontinuable Solutions of Differential Delay Equations, Proc. Amer. Math. Soc. 21(1969), 648—652.

[5] Rosean M., Equations Differentiells （中译本，上海科技出版社，1981）.

[6] 夏道行等，实变函数与泛函分析（下册），人民教育出版社，1979.

The General Theory of Functional Differential Equations With Delays.

Qiu Zhao-tai

Abstract

This paper, which is based on the Schauder fixed-point theorem, discusses the general theory of functional differential equations with delays, it includes the existence, uniqueness, continuous dependence and continuation of solutions, at the same time it supplements and generalizes some theorem in the paper[1].