

关于 Kaiser 时窗函数的谱特性分析

肖 林 吴孟达

提 要 本文讨论的是 Kaiser 时窗函数, 其目的是: (1) 对 Kaiser 时窗函数及它的一些基本性质作一简单的介绍; (2) 从计算得出的 Kaiser 时窗频谱出发, 对 Kaiser 窗的谱特性进行初步的探讨与分析。本文给出了 Kaiser 窗公式及一些参数公式的推导, 列出了 Kaiser 窗取不同参数 α 时的能量比值、主瓣宽度及旁瓣峰值, 并大略描绘了频谱曲线。

在信号分析中必须对测量得到的数据进行分析, 即分析信号中的各种频率成分。由于计算机容量及速度的限制, 只能用有限个采样值作频谱分析来逼近真实信号的谱, 其中很重要的方法是采用加时窗函数的方法。用数据加窗的办法来进行信号分析或时间序列分析时, 根据不同的准则, 可产生各种不同的时窗。例如: Kaiser窗, 矩形窗, Hanning窗, Hamming窗, Parzen窗, Daniell窗及最大能量比时窗等等。要对这些种类繁多的时窗函数的优劣进行评定, 就要分析时窗函数的频谱, 看频谱的主瓣与旁瓣的关系如何。

一、Kaiser 窗公式推导及基本性质

J. F. Kaiser 在 1966 年提出了一个可调的近似最大能量比连续时窗函数, 1980 年又给出了这一时窗的修正公式, 它是第一类零阶贝塞尔函数的形式给出的, 定义为:

$$w_{\alpha}(t) = \begin{cases} \frac{I_0[\alpha\sqrt{1-(t/\tau)^2}]}{I_0[\alpha]}, & |t| \leq \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases} \quad (1.1)$$

它相应的频谱为:

$$W_{\alpha}(\omega) = \begin{cases} \frac{2\tau \operatorname{sh}[\alpha\sqrt{1-(\omega/\omega_a)^2}]}{I_0[\alpha] \cdot \alpha \cdot \sqrt{1-(\omega/\omega_a)^2}}, & |\omega| \leq \omega_a \\ \frac{2\tau \sin[\alpha\sqrt{(\omega/\omega_a)^2-1}]}{I_0[\alpha] \cdot \alpha \cdot \sqrt{(\omega/\omega_a)^2-1}}, & |\omega| > \omega_a \end{cases} \quad (1.2)$$

其中: α 、 τ 是实的正参数; I_0 是变形的第一类零阶 Bessel 函数; $\omega_a = \alpha/\tau$ 。下面我们

来证明 Kaiser 时窗的频谱公式。由于本文篇幅有限,对于论证过程中的逐项积分、逐项微分的条件便不在此罗列了。

证

$$\begin{aligned}
 W_a(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} w_a(t) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1}{I_0[\alpha]} I_0 \left[\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \right] e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{I_0[\alpha]} \int_{-\tau}^{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} \sqrt{1 - \left(\frac{t}{\tau}\right)^2}^{2k} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{2}{I_0[\alpha]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} \int_0^{\tau} \left[1 - \left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right]^k \cos \omega t dt \\
 &= \frac{2\tau}{I_0[\alpha]} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} \int_0^1 (1-u^2)^k \cos(\omega\tau u) du \\
 &= \frac{2\tau}{I_0[\alpha]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha^2)^k}{k!} \left(\frac{d}{\omega\tau d\omega\tau}\right)^k \left\{ \frac{\sin \omega\tau}{\omega\tau} \right\} \\
 &= \frac{2\tau}{I_0[\alpha]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha^2)^k}{k!} \cdot 2^k \left(\frac{d}{d(\omega\tau)^2}\right)^k \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega\tau)^{2n}}{(2n+1)!} \right] \\
 &= \frac{2\tau}{I_0[\alpha]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k}}{k!} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{d(\omega\tau)^2}\right)^k \left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\omega\tau)^{2n} \right] \right\} \\
 &= \frac{2\tau}{I_0[\alpha]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot [(\omega\tau)^2]^{n-k} \\
 &= \frac{2\tau}{I_0[\alpha]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} (-\alpha^2)^k [(\omega\tau)^2]^{n-k} \\
 &= \frac{2\tau}{I_0[\alpha]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} [(\omega\tau)^2 - \alpha^2]^n \\
 &= \begin{cases} \frac{2\tau \operatorname{rsh} \sqrt{\alpha^2 - (\omega\tau)^2}}{I_0[\alpha] \sqrt{\alpha^2 - (\omega\tau)^2}}, & |\omega\tau| \leq \alpha \\ \frac{2\tau \sin \sqrt{(\omega\tau)^2 - \alpha^2}}{I_0[\alpha] \sqrt{(\omega\tau)^2 - \alpha^2}}, & |\omega\tau| > \alpha \end{cases}
 \end{aligned}$$

(证 毕)

由于 Kaiser 时窗的参数 α 是可调的,所以它应用起来较为方便,目前已广泛地应用于 FIR 数字滤波的设计中了。当我们要用 Kaiser 时窗函数求信号频谱估计时,自然希望能事先知道 α 的值对 Kaiser 窗的主瓣宽度 Δf 及主瓣峰值与旁瓣峰值之比 β 的影响如何,以便使我们能根据需要来选择适当的 α 值,参见 [6] 有如下定理:

定理 1.1 设 Kaiser 时窗信号及频谱如(1.1), (1.2)式所示,则相应的 Kaiser 时窗的主瓣宽度为:

$$\Delta f = \frac{1}{\pi\tau} \sqrt{\pi^2 + \alpha^2} \quad (1.3)$$

证 由主瓣宽度的定义知, 只须令 $W_a(\omega) = 0$, 求得其最靠近原点的两个零点之差即为所求。

令 $W_a(\omega) = 0$, 由于

$$\frac{2\tau \operatorname{sh} \sqrt{\alpha^2 - (\omega\tau)^2}}{I_0[\alpha] \sqrt{\alpha^2 - (\omega\tau)^2}} \neq 0 \quad |\omega\tau| \leq \alpha$$

于是 $|\omega\tau| > \alpha$, 从而有:

$$\sin[\alpha \sqrt{(\omega/\omega_a)^2 - 1}] = 0$$

$$\text{即} \quad \alpha \cdot \sqrt{(\omega\tau/\alpha)^2 - 1} = k\pi, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

依题意取 $k=1$, 则有:

$$(\omega\tau)^2 = \pi^2 + \alpha^2$$

将 $\omega = 2\pi f$ 代入上式即可得(1.3)式。

(证 毕)

定理 1.2 在定理 1.1 的意义下, Kaiser 时窗对应的旁瓣峰值处的频率为:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\tau} \sqrt{\theta_r^2 + \alpha^2} \quad (1.4)$$

其中 θ_r 是超越方程 $\theta = \operatorname{tg}\theta$ 的最小正根。

证 为了找出旁瓣峰值所对应的频率, 只须找出 $W_a(\omega)$ 通过第一个零点后的第一个极值的位置 ω_r 即可, 因 $W_a(\omega)$ 是连续的, 且极值存在, 故由求极值的方法, 令 $W'_a(\omega) = 0$,

由于 $\omega_r > \frac{\alpha}{\tau}$, 故有:

$$\left(\frac{2\tau \sin \sqrt{(\omega\tau)^2 - \alpha^2}}{I_0[\alpha] \cdot \sqrt{(\omega\tau)^2 - \alpha^2}} \right)'_{\omega} = 0$$

得:

$$\sqrt{(\omega\tau)^2 - \alpha^2} \cos \sqrt{(\omega\tau)^2 - \alpha^2} = \sin \sqrt{(\omega\tau)^2 - \alpha^2} \quad (1.5)$$

令 $\theta_r = \sqrt{(\omega_r\tau)^2 - \alpha^2}$, 由于 ω_r 是方程(1.5) 的最小正根, 故 θ_r 是方程 $\theta = \operatorname{tg}\theta$ 的最小正根, 并且

$$\omega_r = \frac{1}{\tau} \sqrt{\theta_r^2 + \alpha^2}$$

又 $\omega_r = 2\pi f_r$, 代入上式即可得(1.4)式。

(证 毕)

推论 在定理 1.2 的条件下, 有:

$$\beta = \left| \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha \cos\theta_r} \right|$$

证

$$\begin{aligned}
 \beta &= \left| \frac{W_a(0)}{W_a(\omega_r)} \right| \\
 &= \left| \frac{\frac{2rsh\alpha}{I_0[\alpha] \cdot \alpha}}{\frac{2r \sin \sqrt{(\omega_r \tau)^2 - \alpha^2}}{I_0[\alpha] \cdot \sqrt{(\omega_r \tau)^2 - \alpha^2}}} \right| \\
 &= \frac{sh\alpha}{\alpha} \left| \frac{\sqrt{\theta_r^2 + \alpha^2 - \alpha^2}}{\sin \sqrt{\theta_r^2 + \alpha^2 - \alpha^2}} \right| \\
 &= \frac{sh\alpha}{\alpha} \left| \frac{\theta_r}{\sin \theta_r} \right| \\
 &= \left| \frac{sh\alpha}{\alpha \cos \theta_r} \right|
 \end{aligned}$$

(证 毕)

对于 α 的选择, Kaiser 在 [6] 中又给出了一个近似公式:

$$\alpha = \begin{cases} 0, & R < 13.26 \\ 0.76609(R - 13.26)^{0.4} + 0.09834(R - 13.26), & 13.26 < R < 60 \\ 0.12438(R + 6.3), & 60 < R < 120 \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\text{其中 } R \triangleq 20 \lg \left| \frac{W(0)}{W(\omega_r)} \right|.$$

近似式(1.5)是由最小二乘法得到的, 因此, 我们对数学模型

$$\alpha = \begin{cases} \beta_1(R - 13.26)^{0.4} + \beta_2(R - 13.26), & 13.26 < R < 60 \\ \beta_3(R + 6.3), & 60 < R < 120 \end{cases}$$

求 β_i , $i=1, 2, 3$ 的最小二乘估计, 得到:

$$\hat{\beta}_1 = 0.76495, \quad \hat{\beta}_2 = 0.09842, \quad \hat{\beta}_3 = 0.12460.$$

对事先给定的 R , 由公式(1.6)得出的 α 所给出的 Kaiser 离散时窗, 其 R 值与事先给定的 R 值的误差要小于 0.36%; 显然, 类似于(1.6)的近似关系式不是唯一的, 例如, 通过分割区间为若干段, 再分别对每一段用最小二乘法求与(1.6)同样形式的近似式, 必然可以得到更为精确的结果。但一般说来, 式(1.6)已经足够满足要求了。

二、利用 FFT 计算 Kaiser 时窗的方法及 参数 λ 、 β 、 γ 的计算公式

在处理数字信号谱分析问题, 需要采用离散的 Kaiser 时窗:

$$w_n = w(n\Delta) = \begin{cases} \frac{I_0[\alpha \sqrt{1 - (n/N_D)^2}]}{I_0[\alpha]}, & |n| \leq N_D \\ 0, & |n| > N_D \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 Δ 为抽样间隔, $N_D = \tau / \Delta$ 。

在计算有限离散信号的有限离散频谱时,要采用快速傅立叶变换。

关于用 FFT 计算有限离散频谱的具体方法和步骤,请参阅文献 [3]、[4],那里有详细的论述,并且很容易就能将它们应用到计算 Kaiser 离散时窗频谱的情形。但要注意用 FFT 计算有限离散频谱时,要求信号长度 $N=2^k$ (k 为正整数),因此一般取

$N_D = \frac{N}{2} = 2^{k-1}$, 则(2.1)式为:

$$w_n = w(n\Delta) = \begin{cases} \frac{I_0[\alpha\sqrt{1-(2n/N)^2}]}{I_0[\alpha]}, & |n| < \frac{N}{2}, \quad n = -\frac{N}{2} \\ 0 & |n| > \frac{N}{2}, \quad n = \frac{N}{2} \end{cases}$$

为讨论方便起见,记

$$x_n = w_{-\frac{N}{2}+n} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{则} \quad x_n = 0 \quad (n < 0 \text{ 或 } n > N-1) \quad (*)$$

设 x_n 的频谱为 $X(f)$, 有限离散频谱为 $X_N(f_m)$, 由(*)式有:

$$\begin{aligned} X(f) &= \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i2\pi f n \Delta} = \Delta \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi f n \Delta} \\ \Rightarrow X(f_m) &= \Delta \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi \frac{m n}{N}} = X_N(f_m) \end{aligned}$$

从而得知,此时由 FFT 计算得出的 $X_N(f_m)$ 恰为 $X(f)$ 在 f_m 处的值。

下面给出参数 λ 、 β 、 γ 的近似计算公式。

定理2.1 设实的信号序列 $x_k (k=0, 1, \dots, N)$ 为已知,且 $W(f)$ 为相应的频谱 (Δ 为采样间隔),则能量比 λ 的近似计算公式为:

$$\lambda \approx \frac{1}{p} \left\{ \sum_{q=0}^{p-1} \left[\left| W\left(\frac{q/p-1}{N\Delta}\right) \right|^2 + \left| W\left(\frac{q/p}{N\Delta}\right) \right|^2 \right] \right\} / \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \left| W\left(\frac{m}{N\Delta}\right) \right|^2 \right\}$$

其中 p 为根据需要选定的一个正整数,可以为 2, 4, 8, 16 等等。

此定理的证明见文献 [3]。

在计算机上算题时,根据定理 2.1 所提供的公式即可得出 λ 的值。关于主瓣与旁瓣峰值之比 β 的计算,则只须从打印结果中找到主瓣峰值与旁瓣峰值并使之相除即得。关于主瓣宽度 γ 的求法是:先找到频谱值最靠近原点的第一个零点位置(当然,在离散情况下零点不一定达到,取最接近零点的值即可),设该点到原点的距离为 h ,因为频谱值是以 $\frac{1}{N\Delta p}$ 为间隔而取的,故主瓣宽度为 $\gamma = \left(-\frac{h}{N\Delta p}, \frac{h}{N\Delta p} \right)$ 。

三、Kaiser 时窗谱特性分析

利用 FFT 标准子程序,我们在 441B-III 型计算机上分别计算了 $\alpha=1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$ 时的 Kaiser 离散时窗的有限离散频谱,通过计算得到了一批 Kaiser 时窗频谱的数据(请参见附表),根据这些数据进行分析得知,对于 Kaiser 时窗,当变动参

数 α 时, 主瓣宽度会发生变化; 就已得的数据而言, 当参数 α 为 4 时, Kaiser 时窗算是一个很好的时窗了。在区间 $2 \leq \alpha \leq 14$ 中, 随着 α 的值的减小, 能量比值 λ 越来越增大, 同时主瓣宽度越来越小, 但是旁瓣峰值也越来越增大了。然而当 $\alpha=1$ 时, 能量比却又减小了, 原因是旁瓣太高。故 $\alpha=1$ 时 Kaiser 窗不能算是好时窗。

$\alpha=2$ 时 Kaiser 窗的能量比 $\lambda=0.9704806$, 仅小于最大能量比时窗的 λ 值, 但是它所对应的 β 及 γ 都大于最大能量比窗所对应的 β 及 γ 的值。

由表中看到, 综合效果最佳的是最大能量比窗序列, 但是计算 1024 点最大能量比窗序列需两小时以上, 而计算一个 1024 点 Kaiser 窗序列只需约两分钟 (所需时间均指 441B—Ⅲ 型机而言), 因此, Kaiser 时窗不仅具有可调性 (即可选择不同参数 α 以适应各种不同需要), 而且具有占用机时少的优点, 所以 Kaiser 窗具有较大的适应性, 这就是 Kaiser 窗的最大的优越之处。

结 束 语

本文对 Kaiser 时窗的谱特性进行了初步的分析讨论, 关于连续情形, 主要可参考文献 [6]。在本文中, 我们所做的工作是对 [6] 中给出的部分公式给予了证明, 通过用 FFT 标准子程序上机计算得出了时窗序列的频谱及参数指标 λ , β , γ 的值, 为今后实践中寻找所需的时窗函数提供了一些有用的资料。

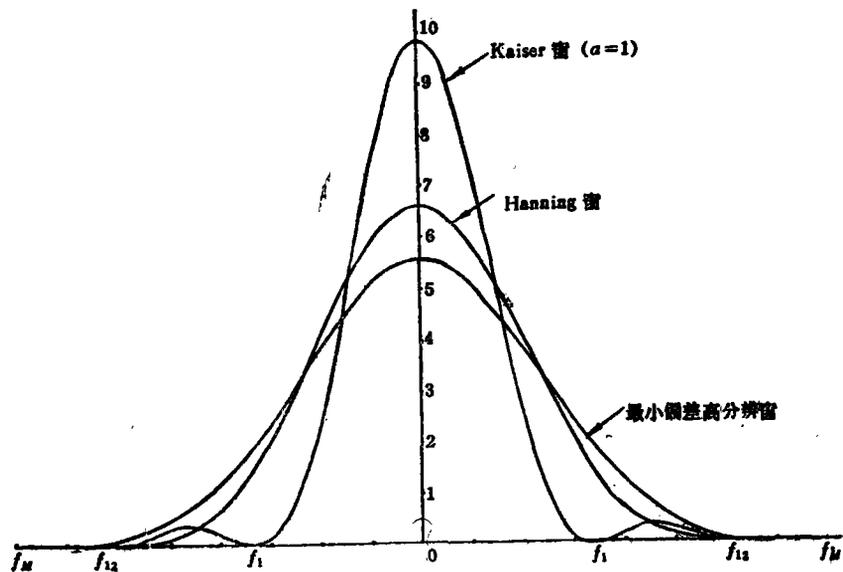
附表

几种时窗函数对应的参数 λ 、 β 、 γ 值

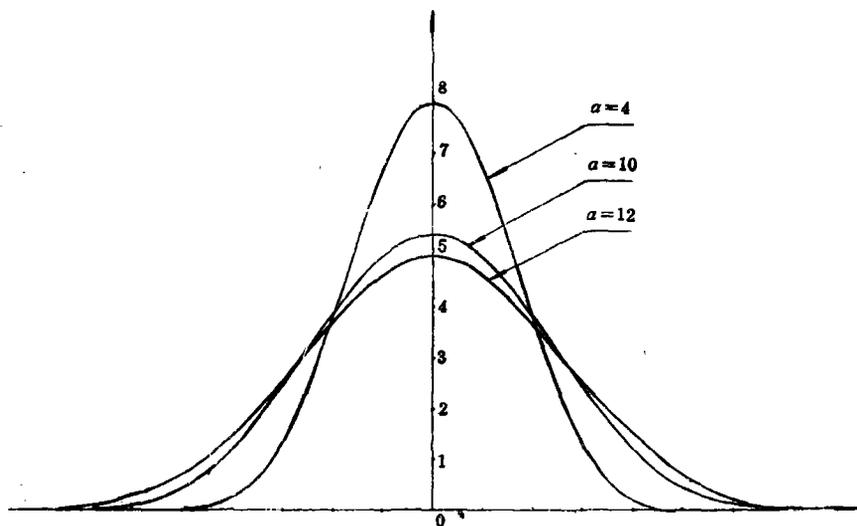
	λ	β	γ
最大能量比时窗	0.981	0.005	$\left(-\frac{1.375}{N\Delta}, \frac{1.625}{N\Delta}\right)$
矩形时窗	0.946792	0.04711	$\left(-\frac{1}{N\Delta}, \frac{1}{N\Delta}\right)$
最小偏差高分瓣窗	0.8466543	0.005	$\left(-\frac{2.9375}{N\Delta}, \frac{2.9375}{N\Delta}\right)$
Hamming 窗	0.896376	0.0006	$\left(-\frac{3.2}{N\Delta}, \frac{3.2}{N\Delta}\right)$
Hanning 窗	0.9176552	0.0266814	$\left(-\frac{2}{N\Delta}, \frac{2}{N\Delta}\right)$

续表

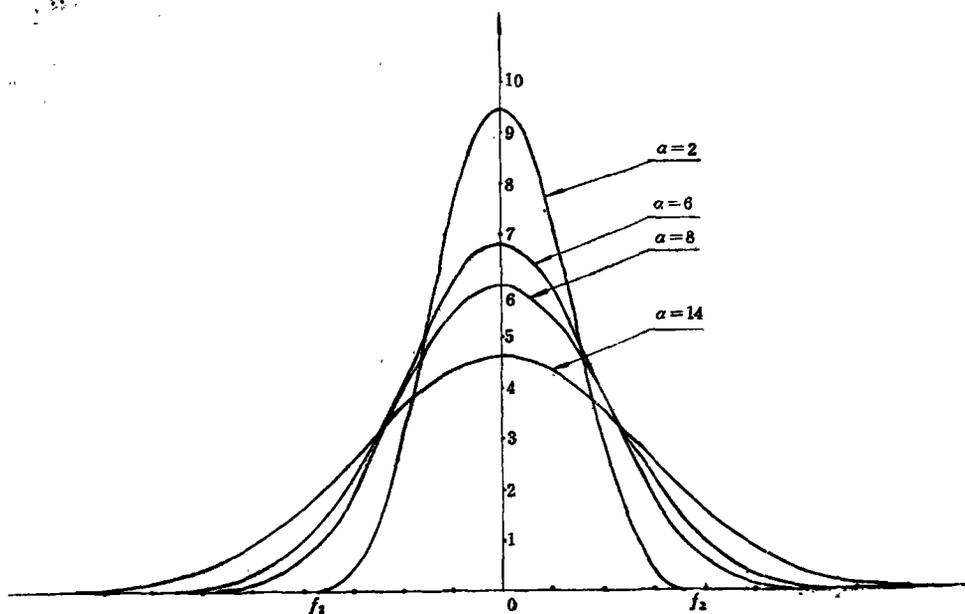
	λ	β	γ
Kaiser 窗($\alpha=1$)	0.9307418	0.1840885	$\left(-\frac{1.06}{N\Delta}, \frac{1.06}{N\Delta}\right)$
Kaiser 窗($\alpha=2$)	0.9704806	0.1199536	$\left(-\frac{1.1875}{N\Delta}, \frac{1.1875}{N\Delta}\right)$
Kaiser 窗($\alpha=4$)	0.9677385	0.0318451	$\left(-\frac{1.625}{N\Delta}, \frac{1.625}{N\Delta}\right)$
Kaiser 窗($\alpha=6$)	0.9222812	0.0064544	$\left(-\frac{2.1875}{N\Delta}, \frac{2.1875}{N\Delta}\right)$
Kaiser 窗($\alpha=8$)	0.8744567	0.0010798	$\left(-\frac{2.75}{N\Delta}, \frac{2.75}{N\Delta}\right)$
Kaiser 窗($\alpha=10$)	0.8305639	0.0004075	$\left(-\frac{3.25}{N\Delta}, \frac{3.25}{N\Delta}\right)$
Kaiser 窗($\alpha=14$)	0.7565805	0.0001394	$\left(-\frac{4.125}{N\Delta}, \frac{4.125}{N\Delta}\right)$



附图 1 几种时窗函数频谱曲线



附图 2(a) Kaiser 时窗函数取不同参数时的频谱曲线



附图 2(b) Kaiser 时窗函数取不同参数时的频谱曲线

参 考 文 献

- [1] 程乾生, 信号数字处理的数学理论, 石油工业出版社, 1980.
- [2] 程乾生, 谱估计中的最佳高分辨时窗函数, 应用数学学报, 第二卷第二期, 1979年。
- [3] 王維忠, 时窗函数的谱特性, 电子学报, 1982年第五期, pp70~74.
- [4] 王維忠, FFT 及其时间序列的谱分析, 国防科大, kz-7-001, 1979.
- [5] Kaiser, "Nonrecursive digital filter design using the Io-Sh window function", in *proc, 1974 IEEE Int. symp. circuits syst.* Apr. 1974, pp20~23.
- [6] Kaiser, "On the use of the Io-Sh windows for spectrum analysis", *IEEE Assp-28:1*, 1980, pp 105-107.

Analysis On the Spectrum Characteristics of the Kaiser Window Function

Xiao Lin Wu Meng-da

Abstract

This paper discussed the Kaiser window function for following purposes; (1) briefly introduce the Kaiser window function and some of its fundamental properties; (2) proceeding from the spectrum characteristics of the Kaiser window obtained by calculation, carry out preliminary discussion and analysis on the spectrum characteristics of the Kaiser window. In this paper is given the derivation of Kaiser window formula and some parameter formulas, moreover, taking the different parameters of the Kaiser window are obtained the ratios of the energy of the function's spectra, the width of the main-lobe and the peak-values of the side-lofes, are traced the spectrum curves,