

多弹头导弹攻击地面目标的研究

孙 越

提 要 本文将多弹头分导化为一维显式导引问题来讨论, 然后讨论攻击地面目标问题。

本文主要有两部分内容: 其一是化为一维导引问题, 以旋转着的对称球形地球为模型, 在一般条件下讨论了 Mayer 型最优导引律、实时导引、导引与关机的实现等问题。其二, 将显式导引与冲量式投放子弹头相结合, 讨论了攻击母弹落点附近地面上的多目标问题, 导出了相应的计算公式。

文章提及了全导式分导, 将它归结为子弹的显式导引。

问 题 的 提 出

文献[1]中已得到导弹和目标间当前的纵向落点偏差 ΔL , 横向落点偏差 ΔH 的计算公式如下:

$$\begin{aligned}\Delta L &= R(\phi_M - \phi_P) \\ \Delta H &= R \sin \phi_M \sigma\end{aligned}\quad (1.1)$$

其中 R : 地球半径;

ϕ_M : 目标当前的地心角;

M : 表示目标;

ϕ_P : 导弹当前落点的地心角;

P : 表示导弹;

σ : 轨道面与导弹径矢 \vec{r} , 目标径矢 \vec{R}_M 决定的平面 (\vec{r} , \vec{R}_M) 间的夹角。

导弹相对目标偏差对时间的导数定义为:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{L} &\triangleq \Delta \dot{L}_P - \Delta \dot{L}_M \\ \Delta \dot{H} &\triangleq \Delta \dot{H}_P - \Delta \dot{H}_M\end{aligned}$$

算出一阶近似表示式为^[1]:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{L} &= (P_L \cos \varphi + Q_L \sin \varphi) \cos \psi + R_L \sin \psi \\ \Delta \dot{H} &= (P_H \cos \varphi + Q_H \sin \varphi) \cos \psi + R_H \sin \psi\end{aligned}\quad (1.2)$$

(1.1), (1.2) 就是状态方程组, 式中 ΔL , ΔH 为状态变量, φ , ψ 是推力姿态角, 选 φ 及 ψ 为控制变量, P , Q , R 是时间的函数, 主要是由于推进剂变化 (\dot{m}) 所致, 这样就将六维问题化成两维问题, 这项工作文献[1]已经作了。

本文将在上述已化成两维问题的基础上, 进一步将两维问题化为一维问题, 并讨论其 Mayer 型最优控制、实时导引, 然后以一维问题为基础, 研究攻击地面的多目标问题。

§1 Mayer 型问题及其解法

我们采用 Mayer 型最优控制问题解法, 所谓 Mayer 问题是指终值优化问题。这类问题的特点是: 最优指标并不影响哈密顿函数 H 的构成。对于这类问题可以先作一般讨论, 再确定端点条件。

一、状态方程及端点条件

我们采用相对落点偏差 ΔD 作为状态变量, ΔD 的定义如下:

$$\Delta D = \sqrt{\Delta L^2 + \Delta H^2} = f \quad (1.3)$$

对时间求导得:

$$\Delta \dot{D} = \frac{\partial \Delta D}{\partial \Delta L} \Delta \dot{L} + \frac{\partial \Delta D}{\partial \Delta H} \Delta \dot{H}$$

将(1.2)式代入, 可得下述形式的状态导数方程:

$$\Delta \dot{D} = (P_D \cos \varphi + Q_D \sin \varphi) \cos \psi + R_D \sin \psi \quad (1.4)$$

其中 φ , ψ 为推力姿态角, P_D 、 Q_D 、 R_D 是随时间缓慢变化的函数。称 $A = [P_D, Q_D, -R_D]^T$ 为特征矢。

末端条件: $\Delta D_1(t_f) = 0$

二、 H 函数

$$\begin{aligned} H &= \lambda_D (P_D \cos \varphi \cos \psi + Q_D \sin \varphi \cos \psi + R_D \sin \psi) \\ &= \lambda_D [P_D, Q_D, -R_D] \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix} \\ &= \lambda_D [P_D, Q_D, -R_D] \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\vec{e}^T = [e_x, e_y, e_z],$$

\vec{e} 是助推力姿态矢。

三、共轭方程

$$\dot{\lambda}_D = \frac{\partial H}{\partial (\Delta D)} = 0, \text{ 故 } \lambda_D = \text{常数。} \quad (1.6)$$

四、最优姿态角

我们应当选助推力矢, 使 H 函数取极小值, 这样就必须选 \vec{e} 与 $[P_D, Q_D, -R_D]^T$ 反向 (假定 $\lambda_D > 0$), 也就是:

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \cos\varphi^* \cos\psi^* = \frac{-P_D}{\sqrt{P_D^2 + Q_D^2 + R_D^2}} \\ e_y &= \sin\varphi^* \cos\psi^* = \frac{-Q_D}{\sqrt{P_D^2 + Q_D^2 + R_D^2}} \\ e_z &= -\sin\psi^* = \frac{R_D}{\sqrt{P_D^2 + Q_D^2 + R_D^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

解出 φ^* 及 ψ^* 来:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi^* &= \frac{Q_D}{P_D} \\ \sin\psi^* &= \frac{-R_D}{\sqrt{P_D^2 + Q_D^2 + R_D^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

由所得公式比较, 一维问题公式的形式比二维问题的简单且规律性强。

我们要求选 \vec{e} 与 $[P_D, Q_D, -R_D]^T$ 反向, 而 P_D, Q_D, R_D 又是时间的函数, 故按(1.8)式规律给出推力姿态角, 就是最佳程序角了。但为了实时导引的需要, 仍要推导出 P_D, Q_D, R_D 的实时计算公式。

五、终值指标的影响

1. 设指标函数为:

$$J = \frac{\Delta D_f^2}{2} \quad (1.9)$$

式中, ΔD_f 是最大允许误差。

$$\lambda_D = \frac{\partial J}{\partial \Delta D_f} = \Delta D_f \quad (1.10)$$

其中“ f ”表示终了。

按这个指标, 到了落地点, 还要有 ΔD_f 的误差。这实际上提供了关机方程, 即测得的偏差达到了指标的要求, 当然可以关机了。

2. 最短时间问题

$H = \lambda_D \Delta \dot{D}$, 应当选 \vec{e} 产生 $\Delta \dot{D}$ 使 H 取最小值, 显然因 λ_D 为正常数, 必须选 \vec{e} 使 $\Delta \dot{D}$ 取最小值, 即要求选 \vec{e} 以最快的速度减小击中目标的误差。

对于终值最佳问题来说, 由于 λ_D 并没有在控制量 φ, ψ 中出现, 因而它并不影响最佳程序, 所以不论取什么终值指标, 解法都一样。例如, 使误差减小的时间最短问题, 末端条件是 $\Delta D_f = 0$, 但关机还得有一个允许的偏差, 所以实际上两者是相同的。

§2 导引和关机的实现

一、 P, Q, R 的实时计算公式

我们来计算同一个计算周期的 $n, n-1, n-2$ 三个时刻的 \dot{D} , 有

$$\begin{aligned} \dot{D}_n &= P_n \cos\varphi_n \cos\psi_n + Q_n \sin\varphi_n \cos\psi_n + R_n \sin\psi_n \\ \dot{D}_{n-1} &= P_{n-1} \cos\varphi_{n-1} \cos\psi_{n-1} + Q_{n-1} \sin\varphi_{n-1} \cos\psi_{n-1} + R_{n-1} \sin\psi_{n-1} \end{aligned}$$

$$\dot{D}_{n-2} = P_{n-2} \cos \varphi_{n-2} \cos \psi_{n-2} + Q_{n-2} \sin \varphi_{n-2} \cos \psi_{n-2} + R_{n-2} \sin \psi_{n-2}$$

如前面所说的理由, P, Q, R 变化不快, 在一个周期内可以看成常数, 将 P_n, P_{n-1}, P_{n-2} 用 P_D 代, Q_n, Q_{n-1}, Q_{n-2} 用 Q_D 代, S_n, S_{n-1}, S_{n-2} 用 S_D 代, 则上式化为:

$$\dot{D}_n = P_D \cos \varphi_n \cos \psi_n + Q_D \sin \varphi_n \cos \psi_n + R_D \sin \psi_n$$

$$\dot{D}_{n-1} = P_D \cos \varphi_{n-1} \cos \psi_{n-1} + Q_D \sin \varphi_{n-1} \cos \psi_{n-1} + R_D \sin \psi_{n-1}$$

$$\dot{D}_{n-2} = P_D \cos \varphi_{n-2} \cos \psi_{n-2} + Q_D \sin \varphi_{n-2} \cos \psi_{n-2} + R_D \sin \psi_{n-2}$$

写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \dot{D}_n \\ \dot{D}_{n-1} \\ \dot{D}_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_D \cos \varphi_n \cos \psi_n + Q_D \sin \varphi_n \cos \psi_n + S_D \sin \psi_n \\ P_D \cos \varphi_{n-1} \cos \psi_{n-1} + Q_D \sin \varphi_{n-1} \cos \psi_{n-1} + S_D \sin \psi_{n-1} \\ P_D \cos \varphi_{n-2} \cos \psi_{n-2} + Q_D \sin \varphi_{n-2} \cos \psi_{n-2} + S_D \sin \psi_{n-2} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \varphi_n \cos \psi_n & \sin \varphi_n \cos \psi_n & -\sin \psi_n \\ \cos \varphi_{n-1} \cos \psi_{n-1} & \sin \varphi_{n-1} \cos \psi_{n-1} & -\sin \psi_{n-1} \\ \cos \varphi_{n-2} \cos \psi_{n-2} & \sin \varphi_{n-2} \cos \psi_{n-2} & -\sin \psi_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_D \\ Q_D \\ -R_D \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{pmatrix} P_D \\ Q_D \\ -R_D \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(n, n-1, n-2) \begin{pmatrix} \Delta \dot{D}_n \\ \Delta \dot{D}_{n-1} \\ \Delta \dot{D}_{n-2} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\text{其中 } \Delta \dot{D}_n = \frac{\Delta D_n - \Delta D_{n-1}}{\tau} \quad \Delta D_n = \sqrt{\Delta L_n^2 + \Delta H_n^2}$$

而 τ 是计算周期, φ_n, ψ_n 由姿态敏感器测得。

二、导引的实现

将上述(2.2)代入(1.8)式 $\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{Q_D}{P_D}$

$$\sin \psi^* = \frac{-R_D}{\sqrt{P_D^2 + Q_D^2 + R_D^2}} \quad (2.3)$$

就得到了以落点距离偏差为导引量的实时导引姿态角的计算公式。

三、关机

在导引过程中进行实时计算, 当 $\Delta D_n \leq \Delta$, 以后的 ΔD 小于这个距离, 可忽略时, 停止计算, 由 \dot{D}_n 预报关机时间。

由于 $\Delta D_k = \Delta D_n + \Delta \dot{D}_n(t_k - t_n)$, $k > n$, $\Delta \dot{D}_n < 0$ 忽略 ΔD_k , 则解得:

$$t_k = t_n + \frac{\Delta D_n}{\Delta \dot{D}_n} \quad (2.4)$$

当 $t = t_k$ 时关机。

由这个关机方程看, 选用 ΔD 作为状态变量是方便的。

这个关机方程在文献[1]中已经有了。

四、初始导引指令的确定

在开始自动导引之前,地面设备将母弹导引至一已知空域的一个“飞行走廊”中,而地面目标是“飞行走廊”终端的运动点,这样母弹依靠自身装置(主要有导航系统,姿态控制系统,弹上计算机等)便可根据事先安排的初始导引指令,开机以开始自动导引。为此我们来讨论初始导引指令的确定。上面我们已求得实时计算的导引公式。还必须确定初始导引指令,这要在地面导引站提供初始数据进行。如果地面导引站可提供前三组火箭的最佳姿态角(非最佳但可行的姿态角也是可以的),及前四个偏差,便可决定下一步 φ_i 、 ψ_i ,设工作的计算週期为 τ ,测出的偏差为 ΔD_{i-1} ,则按当前的状态,确定下一循环的最佳姿态角 φ_i 、 ψ_i ,按 φ_i 、 ψ_i 调整好火箭推力姿态角, φ_i 及 ψ_i 的计算公式如下:

$$\operatorname{tg} \varphi_i^* = Q_i / P_i, \quad \sin \psi_i = -R_i / \sqrt{P_i^2 + Q_i^2 + R_i^2} \quad (2.5)$$

其中

$$\begin{bmatrix} P_i \\ Q_i \\ -R_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{i-3}^* \cos \psi_{i-3}^* & \sin \varphi_{i-3}^* \cos \psi_{i-3}^* & -\sin \psi_{i-3}^* \\ \cos \varphi_{i-2}^* \cos \psi_{i-2}^* & \sin \varphi_{i-2}^* \cos \psi_{i-2}^* & -\sin \psi_{i-2}^* \\ \cos \varphi_{i-1}^* \cos \psi_{i-1}^* & \sin \varphi_{i-1}^* \cos \psi_{i-1}^* & -\sin \psi_{i-1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\Delta D_{i-3} - \Delta D_{i-4}) / \tau \\ (\Delta D_{i-2} - \Delta D_{i-3}) / \tau \\ (\Delta D_{i-1} - \Delta D_{i-2}) / \tau \end{bmatrix} \quad i=1, 2 \dots n \quad (2.6)$$

然后测第 i 偏差,递推一次按上法进行实时计算和导引,如此循环下去,直到 $\Delta D_k - \Delta D_n \leq \Delta$, $k > n$ (Δ 是允许的偏差),停止计算,立即关机,便可在允许的误差下命中目标。

§3 子弹头攻击母弹落点附近任意点

上述以落点偏差为导引量的实时导引方法,可直接应用于分放式最佳导引(包括从不同轨道攻击同一目标,及不同空域攻击不同目标)。如果我们把上述显式导引法和“冲量式分导”结合起来,也可以解决“齐射问题”,这样就可以在攻击母弹落点附近的任意一点,包括攻击几个目标,想法如下。

设问题是,地球上选一点(即前面所说目标)称“标准点”。思路如下:我们要攻击标准点附近的任意一点 M_i ,解决此问题用上述显式导引法将母弹落点导向“标准点”(若没有偏差则母弹落地点和“标准点”重合),在关机的同时,给第 i 子弹头以速度增量

$$\Delta \vec{v}_i = \vec{e}_i \Delta v_i$$

\vec{e}_i 是速度增量方向的单位矢。以 Δv_i 及 \vec{e}_i 为控制变量,使第 i 子弹击中标准点附近的的目标点 M_i 。

攻击“标准点”问题,即导弹攻击目标问题,前面已讨论过了。现在推出攻击标准点附近点的有关计算公式。

§ 3.1 相对母弹落点射程增量的冲量式公式

一、子弹的纵向射程增量与横向射程增量

选母弹弹道平面弹下点坐标系为参考系, 则有

$$\begin{aligned}\Delta \vec{v} &= e_x \Delta v_i + e_y \Delta v_j + e_z \Delta v_k \\ \Delta L_s &= \frac{\partial L^T}{\Delta \vec{v}} \cdot \Delta \vec{v} = \frac{\partial L_k}{\partial v_{xz}} \Delta v_x + \frac{\partial L_k}{\partial v_{xy}} \Delta v_y \\ &= \left(\frac{\partial L_k}{\partial v_{kx}} e_x + \frac{\partial L_k}{\partial v_{ky}} e_y \right) \Delta v\end{aligned}\quad (3.1)$$

下标“S”表示子弹, ΔL_s 即子弹由于得到速度增量而得到的纵向射程增量。

我们来求在子弹得到冲量 $\Delta \vec{v}$ 时, 所得到的横向射程增量。为此要算子弹轨道面与母弹轨道面的夹角 $\Delta \alpha$, 为此求

$$\begin{aligned}\sin \Delta \alpha &= \vec{k} \times [\vec{r}_k \times (\vec{v}_k + \Delta \vec{v}_k)] / h', \quad h' \approx h_k = r_k v_k \cos \theta_k \\ \vec{r}_k \times \vec{v}_k &\text{与 } \vec{k} \text{ 同向, 故有} \\ \sin \Delta \alpha &= |\vec{k} \times (\vec{r}_k \times \Delta \vec{v}_k)| \\ \vec{r}_k \times \Delta \vec{v}_k &= \vec{i} (y_k \Delta v_{kz} - z_k \Delta v_{ky}) + \vec{j} (z_k \Delta v_{kx} - x_k \Delta v_{kz}) + \vec{k} (x_k \Delta v_{ky} - y_k \Delta v_{kx}) \\ &= \vec{i} y_k \Delta v_{kz} - \vec{j} x_k \Delta v_{ky} + \vec{k} (x_k \Delta v_{ky} - y_k \Delta v_{kx})\end{aligned}$$

代入上式

$$\sin \Delta \alpha = \frac{|\vec{j} y_k \Delta v_{kz} + \vec{i} x_k \Delta v_{kx}|}{r_k v_k \cos \theta_k} = \frac{\sqrt{x_k^2 + y_k^2} \Delta v_{kz}}{r_k v_k \cos \theta_k} = \frac{\Delta v_k e_z}{v_k \cos \theta_k}$$

由于 $\Delta \alpha$ 很小, 故

$$\Delta \alpha \approx \frac{\Delta v_k e_z}{v_k \cos \theta_k}$$

子弹 S 的横向射程增量为:

$$\begin{aligned}\Delta H_s &= R \sin \beta_k \Delta \alpha \\ &= R \sin \beta_k \frac{\Delta v_k e_z}{v_k \cos \theta_k}\end{aligned}\quad (3.2)$$

β_k 是母弹的射程角。

两个方向的射程增量写在一起:

$$\Delta L_s = R \left(\frac{\partial \beta_k}{\partial v_{kx}} e_x + \frac{\partial \beta_k}{\partial v_{ky}} e_y \right) \Delta v_k \quad (3.1)$$

$$\Delta H_s = R \sin \beta_k (e_z \Delta v_k / v_k \cos \theta_k) \quad (3.2)$$

这就是子弹相对母弹落点的纵向射程与横向射程增量公式。

二、射程偏导数 $\frac{\partial L_p}{\partial v}$ 的实时计算

按前面的方法可得:

$$\begin{pmatrix} \Delta L_p(n) \\ \Delta L_p(n-1) \\ \Delta L_p(n-2) \\ \Delta L_p(n-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_{n,x} & \Delta v_{n,y} & \Delta x_n & \Delta y_n \\ \Delta v_{n-1,x} & \Delta v_{n-1,y} & \Delta x_{n-1} & \Delta y_{n-1} \\ \Delta v_{n-2,x} & \Delta v_{n-2,y} & \Delta x_{n-2} & \Delta y_{n-2} \\ \Delta v_{n-3,x} & \Delta v_{n-3,y} & \Delta x_{n-3} & \Delta y_{n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial L_p}{\partial v_{kx}} \\ \frac{\partial L_p}{\partial v_{ky}} \\ \frac{\partial L_p}{\partial x_k} \\ \frac{\partial L_p}{\partial y_k} \end{pmatrix}$$

在上式右边的方阵为非奇异阵时，便可求得：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial L_p}{\partial v_{kx}} \\ \frac{\partial L_p}{\partial v_{ky}} \\ \frac{\partial L_p}{\partial x_k} \\ \frac{\partial L_p}{\partial y_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_{n,x} & \Delta v_{n,y} & \Delta x_n & \Delta y_n \\ \Delta v_{n-1,x} & \Delta v_{n-1,y} & \Delta x_{n-1} & \Delta y_{n-1} \\ \Delta v_{n-2,x} & \Delta v_{n-2,y} & \Delta x_{n-2} & \Delta y_{n-2} \\ \Delta v_{n-3,x} & \Delta v_{n-3,y} & \Delta x_{n-3} & \Delta y_{n-3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta L_p(n) \\ \Delta L_p(n-1) \\ \Delta L_p(n-2) \\ \Delta L_p(n-3) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

实际上我们只需要前两个偏导数值。后两个偏导数弃去不用。

三、 $\frac{\partial t_M}{\partial v}$ 的实时计算公式

在讨论进攻之前，再把后面要用到的飞行时间对速度的偏导数的实时计算公式推导一下。同上法可得：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial t_M}{\partial v_{kx}} \\ \frac{\partial t_M}{\partial v_{ky}} \\ \frac{\partial t_M}{\partial x_k} \\ \frac{\partial t_M}{\partial y_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_{n,x} & \Delta v_{n,y} & \Delta x_n & \Delta y_n \\ \Delta v_{n-1,x} & \Delta v_{n-1,y} & \Delta x_{n-1} & \Delta y_{n-1} \\ \Delta v_{n-2,x} & \Delta v_{n-2,y} & \Delta x_{n-2} & \Delta y_{n-2} \\ \Delta v_{n-3,x} & \Delta v_{n-3,y} & \Delta x_{n-3} & \Delta y_{n-3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta t_M(n) \\ \Delta t_M(n-1) \\ \Delta t_M(n-2) \\ \Delta t_M(n-3) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

其中 $\Delta t_M(n) = t_M(n) - t_M(n-1)$ ， $\Delta t_M(n-1) = t_M(n-1) - t_M(n-2)$ ，等等。(3.3)是纵向射程偏导数的实时计算公式，这里是用关机前的速度差、坐标差及纵向射程差来表示纵向射程偏导数的。(3.4)是飞行时间偏导数实时计算公式，也用关机前的速度差、坐标差，而纵向射程差则换成飞行时间差。

§ 3.2 攻击问题

我们得到了相对母弹落点的纵向射程和横向射程增量公式：

$$\begin{cases} \Delta L_s = (A_L \cos \varphi \cos \psi + B_L \sin \varphi \cos \psi) \Delta v & (3.1) \\ \Delta H_s = -C_H \sin \psi \Delta v & (3.2) \end{cases}$$

其中速度增量姿态角 φ 、 ψ 是控制变量, Δv 是待求的需要的速度增量。以下我们就根据(3.1), (3.2)两式来讨论攻击问题。

一、母弹投射两个子弹攻击弹道平面内同一目标

用显式导引将导弹导向关机点附近, 此时调整好两个子弹的方向, 准备好冲量方式投射两个子弹, 要求两子弹在相隔必要的时间先后击中目标, 在测出 $D_n < D_f = \sqrt{\Delta L_s^2 + \Delta H_s^2}$ 时关闭助推火箭, 与此同时, 将两子弹同时投射出去, 其投射方向, 及所需速度增量根据式(3.1), 计算如下:

按条件要求

$$\Delta L_{M1} = \Delta L_s = (A_L \cos \varphi + B_L \sin \varphi) \cos \psi \Delta v = 0, \quad \cos \psi \neq 0$$

有:
$$A_L \cos \varphi + B_L \sin \varphi = 0$$

写成便于讨论的形式

$$\sqrt{A_L^2 + B_L^2} \cos(\varphi - \alpha) = 0, \quad \alpha = \arctg \frac{A_L}{B_L}$$

设 $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (其他情况类似)

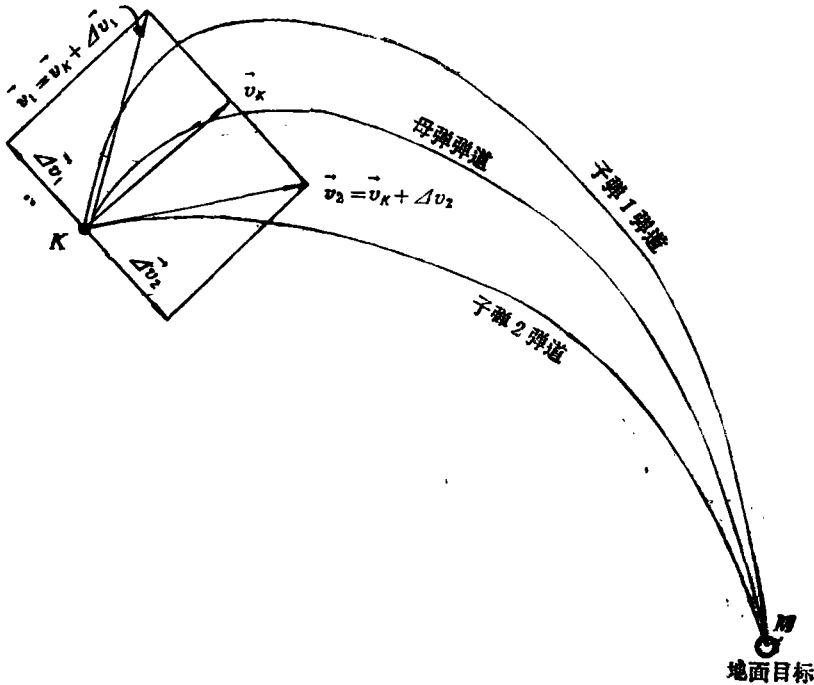


图 1 两个子弹攻击同一目标示意图

有两个解: $\varphi_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2$ 为负

各方向关系作示意图 (图 2)。

$\vec{\Delta v}_1$ 及 $\vec{\Delta v}_2$ 反向。我们使子弹击中目标，按上述方向投出即可。但为了防止互毁，要求两子弹落点时间间隔大于 Δt_I 。这样就提出了对 Δv 大小的要求。我们用 Kapler 方程来求。

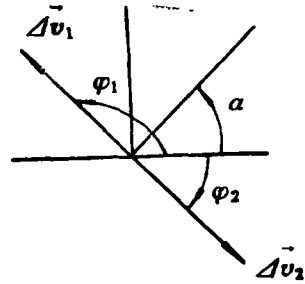


图 2

这是子弹和母弹落点时间差。用于子弹 1

$$(\Delta t_M)_1 = \left(\frac{\partial t_M}{\partial v_K} \right)^T \vec{\Delta v}_1$$

$$\vec{\Delta v}_2 = -\vec{\Delta v}_1 \quad (\text{因两者反向})$$

故

$$(\Delta t_M)_2 = \left(\frac{\partial t_M}{\partial v_K} \right)^T \vec{\Delta v}_2 = - \left(\frac{\partial t_M}{\partial v_K} \right)^T \vec{\Delta v}_1$$

两子弹落地时间差 Δt 为

$$\begin{aligned} \Delta t &= 2\Delta t_M = 2 \left| \frac{\partial t_M}{\partial v_{Kx}} \Delta v_{Kx} + \frac{\partial t_M}{\partial v_{Ky}} \Delta v_{Ky} \right| \\ &= 2 \left| \frac{\partial t_M}{\partial v_{Kx}} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial t_M}{\partial v_{Ky}} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right| \Delta v \\ &= 2 \left| -\frac{\partial t_M}{\partial v_{Kx}} \sin\alpha + \frac{\partial t_M}{\partial v_{Ky}} \cos\alpha \right| \Delta v \\ &= 2 \left| -\frac{\partial t_M}{\partial v_{Kx}} \frac{A_L}{\sqrt{A_L^2 + B_L^2}} + \frac{\partial t_M}{\partial v_{Ky}} \frac{B_L}{\sqrt{A_L^2 + B_L^2}} \right| \Delta v \end{aligned}$$

要求 $\Delta t > \Delta t_I$,

即应选 Δv 使

$$\Delta v > \frac{\Delta t_I}{2 \left| -\frac{\partial t_M}{\partial v_{Kx}} \frac{A_L}{\sqrt{A_L^2 + B_L^2}} + \frac{\partial t_M}{\partial v_{Ky}} \frac{B_L}{\sqrt{A_L^2 + B_L^2}} \right|} \quad (3.5)$$

Δt_I 是要求两子弹的允许的最小时间间隔。故为了增长时间应当增大 Δv ，或者调整参数使分母变小。

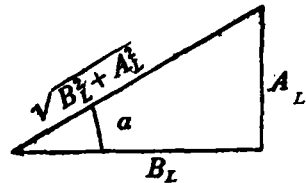


图 3

二、攻击相对母弹落点坐标为 $(0, \Delta H_M)$ 的目标

母弹跟踪标准点，关机时母弹落点重合于标准点，射出子弹头，要求选择 $\vec{\Delta v}$ 的大小方向，以命中相对标准点坐标为 $(0, \Delta H_M)$ 的 M' 点。

击中目标时满足

$$\Delta L_{M'} - \Delta L_s = 0$$

$$\Delta H_{M'} - \Delta H_s = 0$$

由(3.1)，(3.2)式得：

$$0 = \Delta L_s = (A_L \cos \varphi + B_L \sin \varphi) \cos \psi \Delta v$$

$$\Delta H_{M'} = \Delta H_s = -C_H \sin \psi \Delta v$$

此时选 $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$, $\Delta \vec{v}$ 垂直于母弹弹道平面。 C_H 算作正值, 此时:

$$\text{当 } \Delta H_{M'} \text{ 为正时 则选 } \psi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Delta H_{M'} \text{ 为负时 则选 } \psi = \frac{\pi}{2}$$

当 C_H 为负时, ψ 的选取也变号。再来求所需速度增量的大小, 有

$$\Delta H_{M'} = C_H \Delta v$$

故

$$\Delta v = \Delta H_{M'} / C_H$$

落地时间为:

$$t_f = t_M + \frac{\partial t_M}{\partial v_{kx}} \Delta v_x + \frac{\partial t_M}{\partial v_{ky}} \Delta v_y = t_M,$$

因

$$\Delta v_x = \Delta v_y = 0$$

即落地时间和母弹落地时间相同。

三、攻击母弹附近的任意点目标 M'_i

要求击中点相对标准点的坐标为: $(\Delta L_{M'_i}, \Delta H_{M'_i})$, 击中条件为:

$$\Delta L_{M'_i} = \Delta L_{s_i}$$

$$\Delta H_{M'_i} = \Delta H_{s_i}$$

其中 ΔL_{s_i} , ΔH_{s_i} 是子弹 S_i 的纵向射程增量和横向射程增量。

将(3.1), (3.2)代入上式得:

$$\Delta L_{M'_i} = (A_{L_i} \cos \varphi_i + B_{L_i} \sin \varphi_i) \cos \psi_i \Delta v_i$$

$$\Delta H_{M'_i} = -C_{H_i} \sin \psi_i \Delta v_i$$

一共有两个方程, 三个可供选择的量, 若选定其一, 则另外两个量也就定了。因此还可进行一次优化。

为了节省能量, 选 φ_i 使 Δv_i 取最小值, 也就是选择 φ_i 使 $A_{L_i} \cos \varphi_i + B_{L_i} \sin \varphi_i$ 取最大值, 即

$$\operatorname{tg} \varphi_i = B_{L_i} / A_{L_i}$$

并解得:

$$\Delta v_i = \sqrt{\frac{\Delta L_{M'_i}^2}{A_{L_i}^2 + B_{L_i}^2} + \frac{\Delta H_{M'_i}^2}{C_{H_i}^2}} \quad (3.6)$$

$$\operatorname{tg} \psi_i = -\sqrt{A_{L_i}^2 + B_{L_i}^2} \Delta H_{M'_i} / C_{H_i} L_{M'_i}$$

四、齐射

母弹可以同时投射几颗子弹攻击母弹落点附近若干个目标。按本节解出的分式, 就可以直接计算, 例如有三颗子弹, 则 i 分别取 1, 2, 3, 可以击中三个不同目标。

第 i 个子弹落地时间 t_{if} 为:

$$\begin{aligned} t_{if} &= t_M + \Delta t_{i,M} = t_M + \frac{\partial t_M}{\partial v_{ix}} \Delta v_{ix} + \frac{\partial t_M}{\partial v_{iy}} \Delta v_{iy} \\ &= t_M + \left(\frac{\partial t_M}{\partial v_{ix}} \cos \varphi_i + \frac{\partial t_M}{\partial v_{iy}} \sin \varphi_i \right) \cos \psi_i \Delta v_i \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中 φ_i 、 ψ_i 、 Δv_i 按上面的公式代入, 这里不重抄。当然, 也可以根据情况, 作别的优化或符合别的条件。时间偏导数前面已求得公式。

§4 子弹头攻击母弹落点附近地面目标

在 §3 中我们找到了计算子弹攻击母弹落点附近的问题, 母弹落点已考虑了地球自转这一因素, 而子弹攻击点的坐标是对原点为母弹落点, 坐标轴指向不变的惯性参考系的坐标, 也就是没有考虑地球自转的影响。为了解决这一问题, 让我们来作一个分析:

设 $t = t_k + t_M + \Delta t_M$ 时刻母弹落点的惯性参考系 $Mx^A y^A z^A$, 它与地球上的在 $t = t_k$ 时刻的地面坐标系 $Mxyz$ 相重合, 即在 $-(t_M + \Delta t_M)$ 时刻地球上的点, 在 $t = t_k + t_M + \Delta t_M$ 和 $Mx^A y^A z^A$ 相重合。 $t = t_k + t_M$ 惯性参考系 $Mx^A y^A z^A$ 与地面参考系 $Mxyz$ 相重合。此时 B_M 及 A_M 均为地面参考系上的角度。图 4 表示了这种关系。

我们要找这两个坐标系中落点射程的换算关系, 为此, 先求两坐标系间的变换, 然后建立这两个坐标系中相对射程的换算关系。

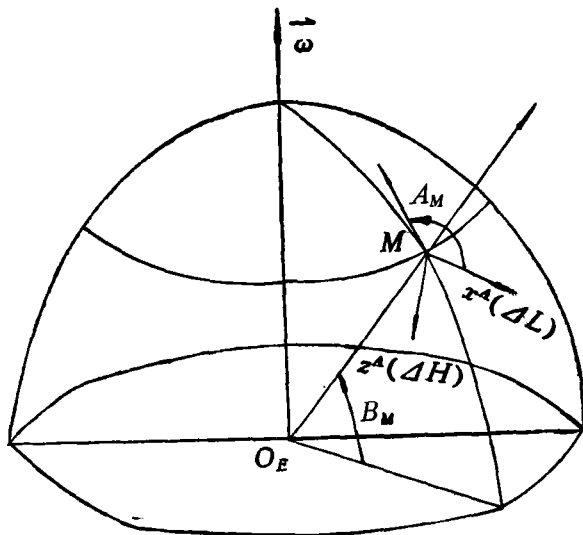


图 4

一、用运动学方法确定惯性坐标系 $Mx^A y^A z^A$ 与地面坐标系 $Mxyz$ 之间的变换关系
地面坐标系随同地球以角速度 $\vec{\omega}$ 转动 (这个角速度是对惯性参考系而言的), 而惯

性参考系在惯性空间轴是不改变方向的。设在 $t=0$ 时两个坐标系完全重合，而在此后因地面坐标在转动，而惯性坐标未转动，我们要求出这两个坐标系之间的转换矩阵 E ，即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x^A \\ y^A \\ z^A \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

以下我们用运动学的方法来确定矩阵 E 。

地球对惯参以均角速度 $\vec{\omega}$ 转动，反之惯参则以 $(-\vec{\omega})$ 对地面坐标系转动。我们考虑惯参上任意点 M_A ， $t=0$ 时地球上的 M 点与之重合， t 时刻两者分开了，由于惯参对地面坐标系以 $(-\vec{\omega})$ 转动， M_A 点对地面坐标系的运动为匀加速度运动，设这个点在惯参中的径矢为 \vec{r}_A ，则相对速度为 $\vec{v} = (-\vec{\omega}) \times \vec{r}_A$ ，而对地的加速度为

$$\vec{a} = (-\vec{\omega}) \times [(-\vec{\omega}) \times \vec{r}_A],$$

故相对位移为 (见图 5)：

$$\Delta \vec{Y} = \vec{r} - \vec{r}_A = \vec{v}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad (4.2)$$

即

$$\vec{Y} = \vec{r}_A + \vec{v}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

为了获得变换关系，我们把速度 \vec{v} 及加速度 \vec{a} 以矩阵形式表示出来：

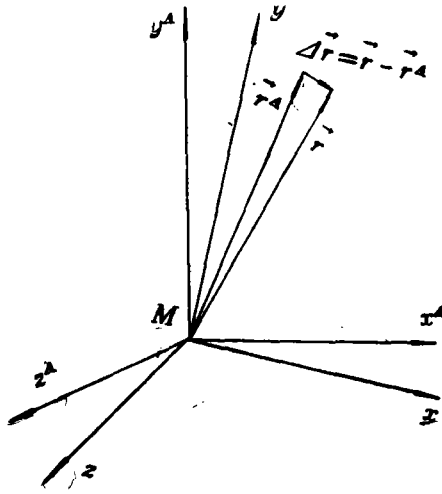


图 5

$$\begin{pmatrix} v_x^A \\ v_y^A \\ v_z^A \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^A \\ y^A \\ z^A \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a_x^A \\ a_y^A \\ a_z^A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^A \\ y^A \\ z^A \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -(\omega_x^2 + \omega_y^2) & \omega_x \omega_y & \omega_x \omega_z \\ \omega_y \omega_x & -(\omega_x^2 + \omega_z^2) & \omega_y \omega_z \\ \omega_z \omega_x & \omega_z \omega_y & -(\omega_y^2 + \omega_z^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^A \\ y^A \\ z^A \end{pmatrix} \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

我们把(4.2)式写成矩阵形式, 并将(4.3), (4.4)式代入:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x^A \\ y^A \\ z^A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x^A \\ v_y^A \\ v_z^A \end{pmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_x^A \\ a_y^A \\ a_z^A \end{pmatrix} t^2 \\
 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \omega_z t & -\omega_y t \\ -\omega_z t & 1 & \omega_x t \\ \omega_y t & -\omega_x t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^A \\ y^A \\ z^A \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)t^2 & \frac{1}{2}\omega_x \omega_y t^2 & \frac{1}{2}\omega_x \omega_z t^2 \\ \frac{1}{2}\omega_y \omega_x t^2 & -\frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_z^2)t^2 & \frac{1}{2}\omega_y \omega_z t^2 \\ \frac{1}{2}\omega_z \omega_x t^2 & \frac{1}{2}\omega_z \omega_y t^2 & -\frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2)t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^A \\ y^A \\ z^A \end{pmatrix} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

注意到:

$$\begin{pmatrix} x^A \\ y^A \\ z^A \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x^A \\ y^A \\ z^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^A \\ y^A \\ z^A \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

(6)代入(5)式, 并用矩阵加法:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)t^2 & \omega_z t + \frac{1}{2}\omega_x \omega_y t^2 & -\omega_y t + \frac{1}{2}\omega_x \omega_z t^2 \\ -\omega_z t + \frac{1}{2}\omega_x \omega_y t^2 & 1 - \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_z^2)t^2 & \omega_x t + \frac{1}{2}\omega_y \omega_z t^2 \\ \omega_y t + \frac{1}{2}\omega_x \omega_z t^2 & -\omega_x t + \frac{1}{2}\omega_y \omega_z t^2 & 1 - \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^A \\ y^A \\ z^A \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

和(1)式比较有:

$$E = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)t^2 & \omega_z t + \frac{1}{2}\omega_x \omega_y t^2 & -\omega_y t + \frac{1}{2}\omega_x \omega_z t^2 \\ -\omega_z t + \frac{1}{2}\omega_x \omega_y t^2 & 1 - \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_z^2)t^2 & \omega_x t + \frac{1}{2}\omega_y \omega_z t^2 \\ \omega_y t + \frac{1}{2}\omega_x \omega_z t^2 & -\omega_x t + \frac{1}{2}\omega_y \omega_z t^2 & 1 - \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)t^2 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

略去二阶小量则得:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \omega_x t & -\omega_y t \\ -\omega_x t & 1 & \omega_z t \\ \omega_y t & -\omega_z t & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega \cos B_M \cos A_M \\ \omega_y &= \omega \sin B_M \\ \omega_z &= \omega \cos B_M \sin A_M \end{aligned} \quad (4.10)$$

二、应用于本问题

攻击母弹落点附近惯性坐标系中之点和地球上之点的关系，将上述变换应用于本问题，则

$$\begin{bmatrix} x^A \\ y^A \\ z^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta L_{Mi} \\ 0 \\ \Delta H_{Mi} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \cos B_E \cos A_E \\ \sin B_M \\ \cos B_E \sin A_E \end{bmatrix}$$

落地时必有：\$y=0\$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta L_{地} \\ 0 \\ \Delta H_{地} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta L_{地} \\ \Delta H_{地} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)t^2 & -\omega_y t + \frac{1}{2}\omega_x \omega_z t^2 \\ \omega_y t + \frac{1}{2}\omega_x \omega_z t^2 & 1 - \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L_{Mi} \\ \Delta H_{Mi} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$t = t_M + \Delta t_M$$

其中 \$t_M\$ 用 Kapler 方程计算。而

$$\Delta t_M = \left[\frac{\partial t_M}{\partial v_k} \right]^T \cdot \Delta \vec{v}_k$$

这里

$$\Delta \vec{v}_k = (e_x \vec{i} + e_y \vec{j} + e_z \vec{k}) \Delta v_k$$

偏导数值取关机点的值。\$\Delta \vec{v}_k\$ 是速度增量。\$(\Delta L_{Mi}, \Delta H_{Mi})\$ 前面已算出，则击中的地球上的相应点为 \$(\Delta L_{地}, \Delta H_{地})\$。

反过来，要求击中地上的 \$(\Delta L_{地}, \Delta H_{地})\$，利用(4.11)式求逆则要求的惯性坐标系中的坐标为

$$\begin{bmatrix} \Delta L_{Mi} \\ \Delta H_{Mi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)t^2 & -\omega_y t + \frac{1}{2}\omega_x \omega_z t^2 \\ \omega_y t + \frac{1}{2}\omega_x \omega_z t^2 & 1 - \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta L_{地} \\ \Delta H_{地} \end{bmatrix}$$

由于 \$\omega = 7.27 \times 10^{-5}\$ 秒，其平方可以略去，则

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta L_{Mi} \\ \Delta H_{Mi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -\omega_y t \\ \omega_x t & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta L_{地} \\ \Delta H_{地} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & \omega_y t \\ -\omega_x t & 1 \end{bmatrix}}{(1 + \omega_x \omega_y t^2)} \begin{bmatrix} \Delta L_{地} \\ \Delta H_{地} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & \omega_y t \\ -\omega_x t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L_{地} \\ \Delta H_{地} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{cases} \Delta L_{Mi} = \Delta L_{地} + \omega_y \Delta H_{地} t \\ \Delta H_{Mi} = \Delta H_{地} - \omega_x \Delta L_{地} t \\ t = t_M + \Delta t_M \\ \Delta t_M = \left(\frac{\partial t_M}{\partial v_k} \right)^T \Delta \vec{v} \end{cases} \quad (4.12)$$

$\frac{\partial t_M}{\partial v_k}$ 及 $\Delta \vec{v}$ 用前面的相应公式代入。

找到了一阶近似的转换公式是对地球自转引起偏差的修正。这个修正项刚好是地球上的矢 ($\Delta L_{地} \vec{i}_E + \Delta H_{地} \vec{j}_E$) 在 0 到 t 时间内对惯性参考系转动的位移。

如果需要, 在换算中就不略去 (ωt) 的二次方项, 这样就完成了子弹头攻击母弹落点附近地面任意目标的计算问题。

§5 全导式子弹攻击地面目标概述

上面讨论了将母弹导引至地面一定点, 再以冲量形式放出子弹攻击母弹落点附近的地面目标。但如果这些地面目标相互间距离不很近, 以至用一次冲量达不到要求, 或其他原因需要全导, 即对每个子弹头来说, 都要自动导引, 这时, 由于种种原因子弹很少可能沿事先计算好的弹道运行, 不过, 不妨认为子弹位于已知的某一空域的“飞行走廊”中, 而地面目标是“飞行走廊”终端的运动点。也就是说, 子弹攻击地面目标的条件与母弹攻击地面目标的条件一样, 因此导引法也相同, 不再重复 (参阅 §2, 四, 初始导引指令的确定)。它和分放式的区别在于: 每个子弹均需导航系统、姿态控制系统、弹上计算机等全套装置。

作者还根据所得公式作了数字模拟计算, 计算结果表明, 这种实时导引方法性能良好, 由于篇幅所限, 从略。

参 考 文 献

- [1] 常文森, 多弹头导弹分导的显式导引问题, (1979年6月全国空间技术控制理论与应用会议上宣读)。

A Study of Attacks on Ground-targets by Multiple Independently Targetable Warheads

Sun Yue

Abstracts

In this article, multiple independently targeting is reduced to a problem of one-dimensional explicit guidance and then problem of making attacks on

ground-targets are discussed.

Our discussion is divided into two parts. The first part is concerning the reduction to problem of one-dimensional guidance. The earth is taken as a symmetrical spinning globe of spherical shape and problems on form of optimal guidance law of Mayer, realtime guidance, implementation of guidance and power cut-off are discussed. In the second part, combining explicit guidance with impulsive discharging of sub-warhead for attacking multiple targets distributed around the point of impact of the loaded missile is discussed and relevant formulas for computation are derived.

Omnibearing independent guidance is briefly mentioned as a special case of explicit guidance of sub-warheads.