

多弹头最优分导程序的选择

薛沛丰

提 要 本文应用极小值原理, 在研究最优推力程序的基础上, 推导了分导速度增量的近似解析解, 提出了用分导图与速度增量极坐标图初步选择分导程序。包括选择分导推力的最优方向角, 确定所需的速度增量值和推进剂消耗量, 以及选定攻击多目标的最好次序等。文中还列举了计算数据。

所用分析方法, 适用于容许散开距离中的任意分布的多目标, 便于初步工程设计与分导过程的分析。所得结果可作数字模拟的参考。

一种分导式多弹头导弹是按预定制导程序, 分别投射多个弹头的弹道导弹。本文采用称之为母舱分导式的多弹头分导方案。即携带多个子弹头的母舱在 t_k 与运载火箭分离后(如图1), 由自身的末助推控制系统, 按一定的分导程序, 如从 t_{A1} 起, 首先控制姿态发动机, 以调转母舱的姿态(即推力方向), 并在适当时刻 t_A 开启主发动机, 母舱沿 AB 变轨。当达到分导所需的速度增量时, 于 t_B 关闭主发动机, 并投放子弹头, 使子弹头沿不同的弹道自由飞行, 以攻击不同的目标或相同的目标。其分导程序的选择是指根据给定的目标分布(e_L, e_H), 选择攻击多目标的次序、确定分导开始点 t_A 、选定分导段 AB 的推力程序并计算所需速度增量与推进剂消耗量等。

下面先开始导出最优分导推力方向的变化规律。

一、最优推力程序

1. 分导模型及其最优解

对于弹道导弹, 通常分导后的弹道相对于分导前的弹道的变化并不大, 所以, 可以应用摄动分导法。

在发射惯性坐标 $oxyz$ 中, AB 分导段对分导前基准弹道的相对运动方程为

$$\begin{bmatrix} \vec{e} \\ \dot{\vec{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ B(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{u} \end{bmatrix} + A(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\eta}(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: $\vec{e} = \vec{r}' - \vec{r}$, $\vec{u} = \vec{v}' - \vec{v}$ 为分导位置、速度增量;

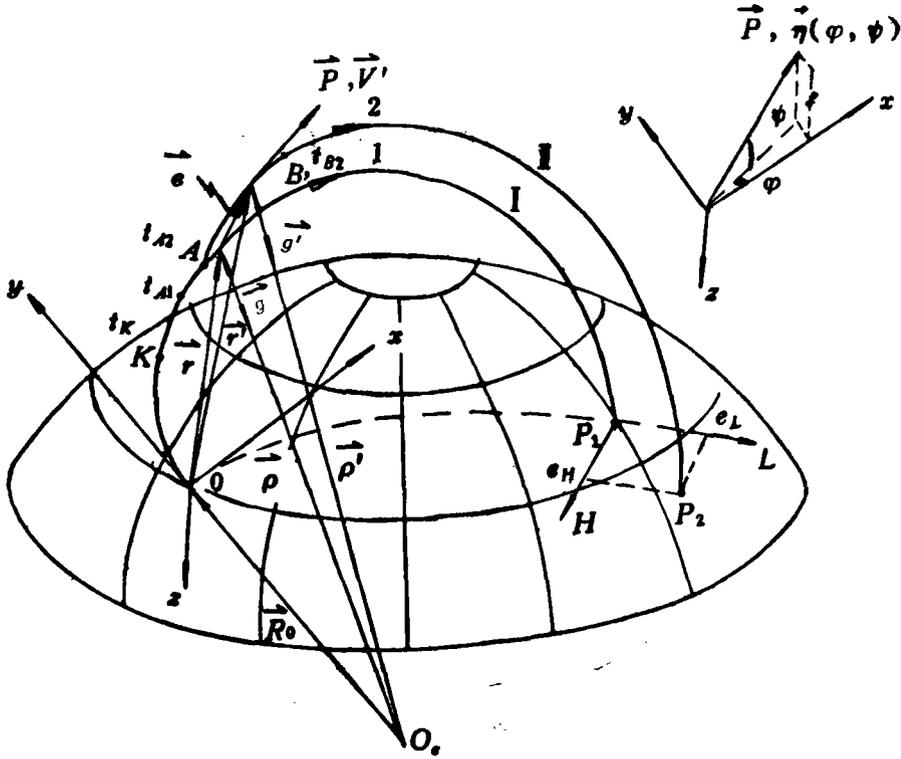


图 1 分导弹道

$$B(t)\vec{e} = \frac{fM}{\rho^3} \left[3 \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}^T}{\rho^2} - \mathbf{I} \right] \vec{e}$$

为引力误差; $A(t)\vec{\eta} = \frac{P\vec{\eta}}{m} = \frac{p_b g}{T_A - (t - t_A)} \vec{\eta}(t)$

为分导推力 P 产生的加速度(即母舱的视加速度)。这里, $T_A = \frac{m_A}{\dot{m}}$, 而 m_A 为 t_A 时母舱(包括舱内的子弹头)的质量, \dot{m} 为推进剂质量秒消耗量, p_b 为发动机比推力,

$$\vec{\eta} = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\varphi \\ \cos\psi \sin\varphi \\ -\sin\psi \end{bmatrix}$$

为推力单位向量。对推力大小不可调的发动机, p_b 、 \dot{m} 一定, 所以分导推力方向 $\vec{\eta}$ (φ, ψ) 可以选为动力学模型(1)的控制向量。

在理想情况下, 初始条件为

$$\vec{e}(t_A) = 0, \quad \vec{u}(t_A) = 0 \tag{2}$$

且满足分导的终端条件

$$\begin{bmatrix} \vec{\lambda}_r^T & \vec{\lambda}_v^T \\ \vec{v}_r^T & \vec{v}_v^T \end{bmatrix}_{t_B} \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{u} \end{bmatrix}_{t_B} - \begin{bmatrix} e_L \\ e_{II} \end{bmatrix} = 0 \tag{3}$$

式中 e_L 、 e_H 为前后两个子弹头攻击目标的纵侧向散开距离； λ 、 ν 为前一个子弹头的标准弹道在 t_B 时的弹道偏导数。

今取分导所需的最少推进剂消耗量(即最短的分导段时间 $t_B - t_A$)作为最优控制的性能指标。于是，当分导开始点 t_A 选定后，最优分导问题就是通过确定动力学系统(1)的控制量 $\eta = \vec{\eta}^*(t)$ ，在满足初终端条件(2)、(3)下的、一个终端时间 t_B 待定的、使性能指标

$$J(\vec{\eta}) = t_B - t_A \quad (4)$$

为最小的极值控制问题。所确定的控制量 $\vec{\eta}^*(t)$ 就是最优推力程序。它可以应用极小值原理求得。

为此，引进伴随向量 $\vec{h}^T = [\vec{h}_r^T \ \vec{h}_v^T]$ ，它满足伴随方程

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{h}}_r \\ \dot{\vec{h}}_v \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & B(t) \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_r \\ \vec{h}_v \end{bmatrix} \quad (5)$$

并作出被称为哈密顿函数的辅助函数

$$H = 1 + \vec{h}_r^T \vec{u} + \vec{h}_v^T B(t) \vec{e} + A(t) \vec{h}_v^T \vec{\eta}(t) \quad (6)$$

则有极小值原理： $\vec{\eta}^*(t)$ 应使

$$H[\vec{e}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{h}_r^*(t), \vec{h}_v^*(t), \vec{\eta}^*(t), t] = \min_{\vec{\eta}} H[\vec{e}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{h}_r^*(t), \vec{h}_v^*(t), \vec{\eta}(t), t]$$

由(6)可见， H 取极小值的必要条件是

$$\vec{\eta}^*(t) = - \frac{\vec{h}_v^*(t)}{\vec{h}_v^*(t)} \quad (7)$$

为了求出 $\vec{h}_v^*(t)$ ，只要把上式代入(1)、(2)、(3)、(5)。而(5)应满足横截条件

$$\begin{bmatrix} \vec{h}_r^* \\ \vec{h}_v^* \end{bmatrix}_{t_B} = \begin{bmatrix} \mu_1 \vec{\lambda}_r + \mu_2 \vec{\nu}_r \\ \mu_1 \vec{\lambda}_v + \mu_2 \vec{\nu}_v \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[1 + \vec{h}_r^* \vec{u}^* + \vec{h}_v^* B(t) \vec{e}^* + A(t) \vec{h}_v^* \vec{\eta}^*(t)]_{t_B} = 0 \quad (9)$$

至此，联立求解(1)、(2)、(3)、(5)、(7)、(8)、(9)，便可求出最优推力程序 $\vec{\eta}^*(t)$ 了，引自文献[1]。对这样一个两点边值问题，目前虽有多种算法用数字机求解，但还是比较麻烦的。而且计算后也难以找到分导过程中各参数之间的相互关系。下面从分导的实际情况出发，对数学模型作一定的简化，可导出 $\vec{\eta}^*(t)$ 的近似解析解，并自然地引出常方向分导。由此便于进一步分析设计。

2. 最优推力程序的解析解

在分导段，因为母舱的机动范围与到地心之距相比是个小量： $x, z \ll \rho$, $R_0 + y \approx \rho$, $\rho \approx \rho(t_A)$ ，故

$$B(t) \approx \frac{fM}{\rho^3(t_A)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \triangleq B$$

由(5)、(8)直接得到

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \vec{h}_r^*(t) \\ \vec{h}_v^*(t) \end{bmatrix} &= e^{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B} \\ I & 0 \end{bmatrix} (t_B - t)} \begin{bmatrix} \vec{h}_r^*(t_B) \\ \vec{h}_v^*(t_B) \end{bmatrix} \\ &= \left\{ I + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B} \\ I & 0 \end{bmatrix} (t_B - t) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} (t_B - t)^2 + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}^2 \\ \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} (t_B - t)^3 \right. \\ &\quad \left. + \dots \right\} \begin{bmatrix} \vec{\mu}_1 \vec{\lambda}_r + \vec{\mu}_2 \vec{v}_r \\ \vec{\mu}_1 \vec{\lambda}_v + \vec{\mu}_2 \vec{v}_v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} \vec{\eta}^*(t) &= - \frac{\vec{\mu}_1 \vec{\lambda}_v + \vec{\mu}_2 \vec{v}_v + (\vec{\mu}_1 \vec{\lambda}_r + \vec{\mu}_2 \vec{v}_r) (t_B - t)}{|\vec{\mu}_1 \vec{\lambda}_v + \vec{\mu}_2 \vec{v}_v + (\vec{\mu}_1 \vec{\lambda}_r + \vec{\mu}_2 \vec{v}_r) (t_B - t)|} \\ &\quad + \frac{\mathbf{B}(\vec{\mu}_1 \vec{\lambda}_v + \vec{\mu}_2 \vec{v}_v)(t_B - t)^2 + \frac{\mathbf{B}}{6}(\vec{\mu}_1 \vec{\lambda}_r + \vec{\mu}_2 \vec{v}_r)(t_B - t)^3 + \dots}{\dots} \\ &\quad + \frac{\mathbf{B}(\vec{\mu}_1 \vec{\lambda}_v + \vec{\mu}_2 \vec{v}_v)(t_B - t)^2 + \frac{\mathbf{B}}{6}(\vec{\mu}_1 \vec{\lambda}_r + \vec{\mu}_2 \vec{v}_r)(t_B - t)^3 + \dots}{\dots} \end{aligned} \quad (10)$$

可见, 最优分导推力方向 $\vec{\eta}^*(t)$ 在分导过程中按上式的规律而变化。其中二阶项是引力偏差引起的最优推力方向的变化; 一阶项是考虑了分导中位置增量引起的最优推力方向的变化。实际上, \mathbf{B} 中系数 $fM/\rho^3(t_A) < fM/R_0^3 = 1.54 \times 10^{-6} \text{ 1/米}^2\text{秒}^2$ 很小; 且对弹道导弹 $\lambda_r \ll \lambda_v$ 、 $v_r \ll v_v$, 故展开式中高阶项的影响更小, 由此引起的 $\vec{\eta}^*(t)$ 的变化是很缓慢的, 在暂短的分导过程 (通常 $t_B - t_A < \text{几十秒}$) 中, 可以把 $\vec{\eta}^*(t)$ 用常向量 $\vec{\eta}^*$ 近似。它与最优的变向量足够接近, 并实现简便, 而且分析时物理概念清楚。所以, 下面着重研究常方向分导。其最优常方向由(10)得到

$$\begin{aligned} \vec{\eta}^* &= - \frac{\vec{\mu}_1 \vec{\lambda}_v + \vec{\mu}_2 \vec{v}_v}{|\vec{\mu}_1 \vec{\lambda}_v + \vec{\mu}_2 \vec{v}_v|} \\ &= \begin{cases} \frac{\vec{\lambda}_v + \frac{\mu_2 \vec{v}_v}{\mu_1}}{|\vec{\lambda}_v + \frac{\mu_2 \vec{v}_v}{\mu_1}|} & \mu_1 < 0 \text{ 时, 取} + \\ \pm \frac{\vec{\lambda}_v + \frac{\mu_2 \vec{v}_v}{\mu_1}}{|\vec{\lambda}_v + \frac{\mu_2 \vec{v}_v}{\mu_1}|} & \mu_1 > 0 \text{ 时, 取} - \\ \pm \frac{\vec{v}_v}{v_v} & \mu_1 = 0, \text{ 且 } \begin{cases} \mu_2 < 0 \text{ 时取} + \\ \mu_2 > 0 \text{ 时取} - \end{cases} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

式中待定常数 μ_1 、 μ_2 可根据终端条件, 运用布里斯公式求出。由(1)、(2)、(3)、(5)和(11), 当取 $\vec{h}_r^*(t_B) = \vec{\lambda}_r(t_B)$ 、 $\vec{h}_v^*(t_B) = \vec{\lambda}_v(t_B)$ 和 $\vec{h}_r^*(t_B) = \vec{v}_r(t_B)$ 、 $\vec{h}_v^*(t_B) = \vec{v}_v(t_B)$ 时, 得到

$$e_L = - \Delta W(t_B) \vec{\lambda}_v^* \frac{\vec{\mu}_1 \vec{\lambda}_v + \vec{\mu}_2 \vec{v}_v}{|\vec{\mu}_1 \vec{\lambda}_v + \vec{\mu}_2 \vec{v}_v|} \quad (12)$$

和

$$e_H = -\Delta W(t_B) \frac{\vec{\lambda}_v + \vec{\mu}_2 \vec{v}_v}{|\vec{\lambda}_v + \vec{\mu}_2 \vec{v}_v|} \quad (13)$$

式中 $\Delta W(t_B) = \int_{t_A}^{t_B} A(t) dt$ 为分导推力产生的视速度增量。今在不计引力偏差时，即为母舱所获得的速度增量 $u(t_B) = \Delta W(t_B)$ 。

从(11)式可见，为了确定 η^* ，毋需具体求出 μ_1, μ_2 ，而只要求出 μ_2 与 μ_1 的比值，并判定 μ_1 的正负：

由(12)、(13)知，其比值

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{e_L \vec{\lambda}_v \vec{v}_v - \lambda_v^2}{\vec{\lambda}_v \vec{v}_v - \frac{e_L v_v^2}{e_H}} \quad (14)$$

而 μ_1 的正负可由(12)、(14)式决定。因为主发动机提供速度增量的大小

$$\Delta W(t_B) = -\frac{|\mu_1|}{\mu_1} \frac{e_H |\vec{\lambda}_v + \frac{\mu_2 \vec{v}_v}{\mu_1}|}{\lambda_v^2 v_v^2 - (\vec{\lambda}_v \vec{v}_v)^2} \left(\frac{e_L v_v^2}{e_H} - \vec{\lambda}_v \vec{v}_v \right)$$

总是正的，所以当 $e_L/e_H > \vec{\lambda}_v \vec{v}_v / v_v^2$ 时， μ_1 必与 e_H 反号；反之同号。

于是，由(11)式，确定了常推力方向，在理想情况下，就是速度增量的方向：

$$\vec{\eta}^* = \begin{cases} \pm \frac{\vec{\lambda}_v + \frac{\mu_2 \vec{v}_v}{\mu_1}}{|\vec{\lambda}_v + \frac{\mu_2 \vec{v}_v}{\mu_1}|} & \text{当 } \frac{e_L}{e_H} \geq \frac{\vec{\lambda}_v \vec{v}_v}{v_v^2}, \text{ 且 } e_H \geq 0 \text{ 时, 取 } + \\ \pm \frac{\vec{\lambda}_v + \frac{\mu_2 \vec{v}_v}{\mu_1}}{|\vec{\lambda}_v + \frac{\mu_2 \vec{v}_v}{\mu_1}|} & \text{当 } \frac{e_L}{e_H} \geq \frac{\vec{\lambda}_v \vec{v}_v}{v_v^2}, \text{ 且 } e_H \leq 0 \text{ 时, 取 } - \\ \pm \frac{\vec{v}_v}{v_v} & \text{当 } \frac{e_L}{e_H} = \frac{\vec{\lambda}_v \vec{v}_v}{v_v^2}, \text{ 且 } e_H > 0 \text{ 时, 取 } + \\ \pm \frac{\vec{v}_v}{v_v} & \text{当 } \frac{e_L}{e_H} = \frac{\vec{\lambda}_v \vec{v}_v}{v_v^2}, \text{ 且 } e_H < 0 \text{ 时, 取 } - \end{cases} \quad (11)'$$

由(12)、(13)确定了所需分导速度增量的大小：

$$u(t_B) \approx \Delta W(t_B) = \frac{|e_L| \left| \vec{\lambda}_v + \frac{\mu_2 \vec{v}_v}{\mu_1} \right|}{\lambda_v^2 + \frac{\mu_2 \vec{\lambda}_v \vec{v}_v}{\mu_1}}, \text{ 或 } \frac{|e_H| \left| \vec{\lambda}_v + \frac{\mu_2 \vec{v}_v}{\mu_1} \right|}{\frac{\mu_2}{\mu_1} v_v^2 + \vec{\lambda}_v \vec{v}_v} \quad (15)$$

二、常方向分导图

我们以 e_L/e_H 作为自变量、 e_H (或 e_L) 作为参变量，可以用图解法求出速度增量大小、方向与它们之间的相互关系。这种分导所需速度增量与目标散开距离之间的关系曲线图，我们称为分导图。它在选择最优分导程序时，是很有用的工具。

1. 速度增量方向与目标散开距离的关系

速度增量方向即 η ，用 φ, ψ 表示更方便。其中 φ 角的大小和正负由 η_x, η_y 确定。为了使推力方向以小角度 ($|\varphi| \leq 180^\circ$) 尽快调到所要求的方向上，我们规定

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta_y^*}{\eta_x^*} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\lambda_5 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \nu_5}{\lambda_4 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \nu_4} \triangleq \varphi_0 & \text{当 } \eta_x > 0 \text{ 时} \\ \begin{cases} -\pi + \varphi_0 \\ \pi + \varphi_0 \end{cases} & \begin{array}{l} \text{当 } \eta_x < 0, \eta_y < 0 \text{ 时} \\ \text{当 } \eta_x < 0, \eta_y > 0 \text{ 时} \end{array} \end{cases} \quad (16)$$

而 ψ 角的大小与正负只决定于 η_x ，且与 η_x 相反

$$\psi = -\sin^{-1} \eta_x^* = \begin{cases} \sin^{-1} \frac{\lambda_6 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \nu_6}{|\lambda_v + \frac{\mu_2}{\mu_1} \nu_v|} \triangleq \psi_0 & \text{当 } \frac{e_L}{e_H} \geq \frac{\vec{\lambda}_v^T \vec{\nu}_v}{\nu_v^2}, e_H \leq 0 \text{ 时} \\ -\psi_0 & \text{当 } \frac{e_L}{e_H} \geq \frac{\vec{\lambda}_v^T \vec{\nu}_v}{\nu_v^2}, e_H \geq 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (17)$$

由(14)和(16)式可见，式中的 μ_2/μ_1 与 e_L/e_H 和 η_y^*/η_x^* 与 μ_2/μ_1 都成等轴双曲线。由作出的曲线 μ_2/μ_1 和 η_y^*/η_x^* ，再通过反正切曲线 $\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \eta_y^*/\eta_x^*$ 便画出 φ 与 e_L/e_H 的关系曲线——分导图1。

照样，由(17)式令

$$W = -\left(\nu_v \frac{\mu_2}{\mu_1} + \lambda_6 \right)$$

它与 μ_2/μ_1 成线性关系：

$$|Q| = \left| \vec{\nu}_v \frac{\mu_2}{\mu_1} + \vec{\lambda}_v \right|$$

即

$$Q^2 = \nu_v^2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 + 2 \vec{\lambda}_v^T \vec{\nu}_v \frac{\mu_2}{\mu_1} + \lambda_v^2$$

为一双曲线，其顶点 E 、 F 为

$$\left(-\frac{\vec{\lambda}_v^T \vec{\nu}_v}{\nu_v^2}, \pm \sqrt{\lambda_v^2 - \frac{(\vec{\lambda}_v^T \vec{\nu}_v)^2}{\nu_v^2}} \right)$$

渐近线为

$$Q = \pm \nu_v \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{\vec{\lambda}_v^T \vec{\nu}_v}{\nu_v^2} \right)$$

由曲线 W 、 $|Q|$ ，可作出曲线 $\pm \frac{W}{|Q|}$ ，再通过反正弦曲线，便可得到

$$\psi = \begin{cases} \sin^{-1} \frac{W}{|Q|} & \mu_1 < 0 \\ -\sin^{-1} \frac{W}{|Q|} & \mu_1 > 0 \end{cases}$$

与 e_L/e_H 的关系曲线——分导图2了。

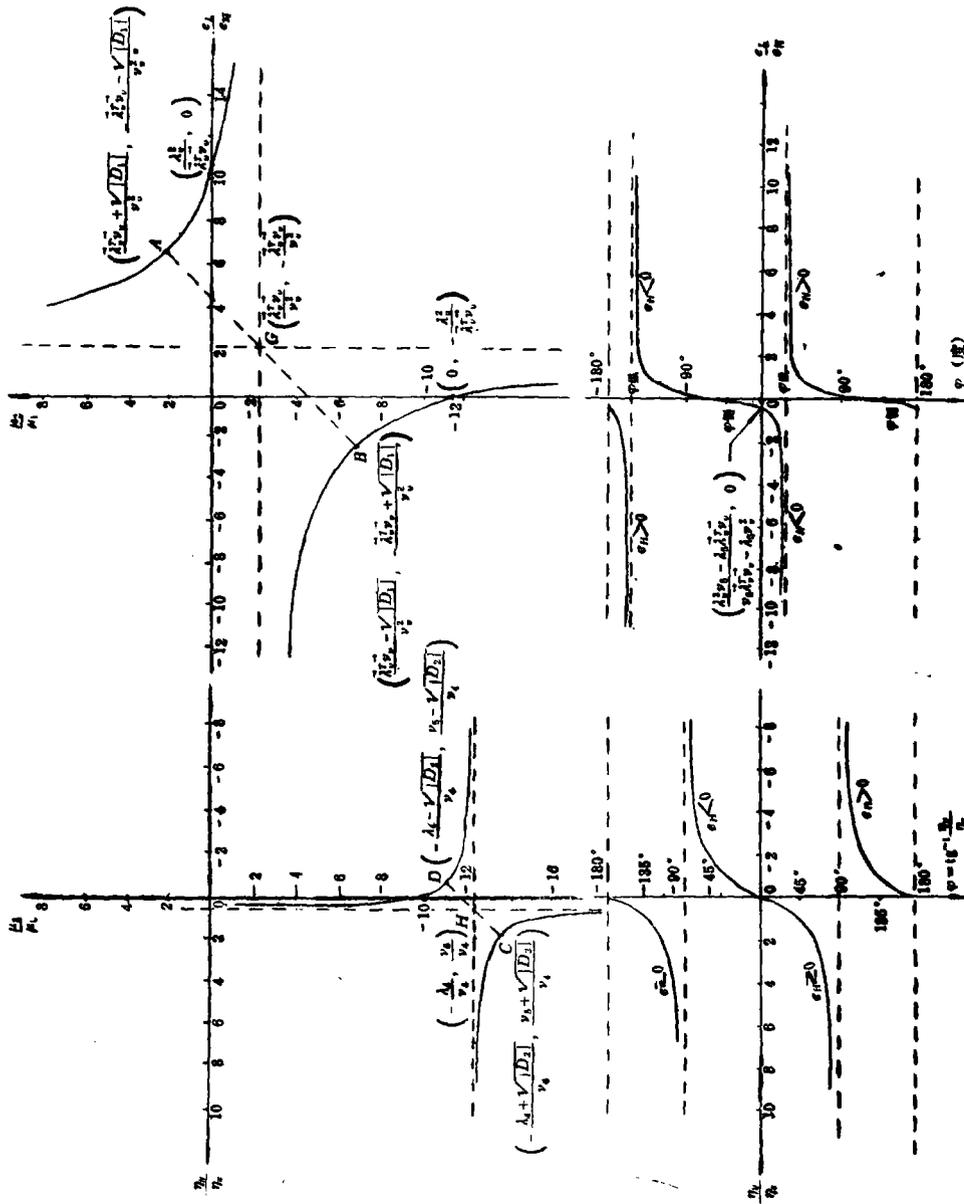


图 2 分导图 1— φ 与 e_L/e_H 的关系

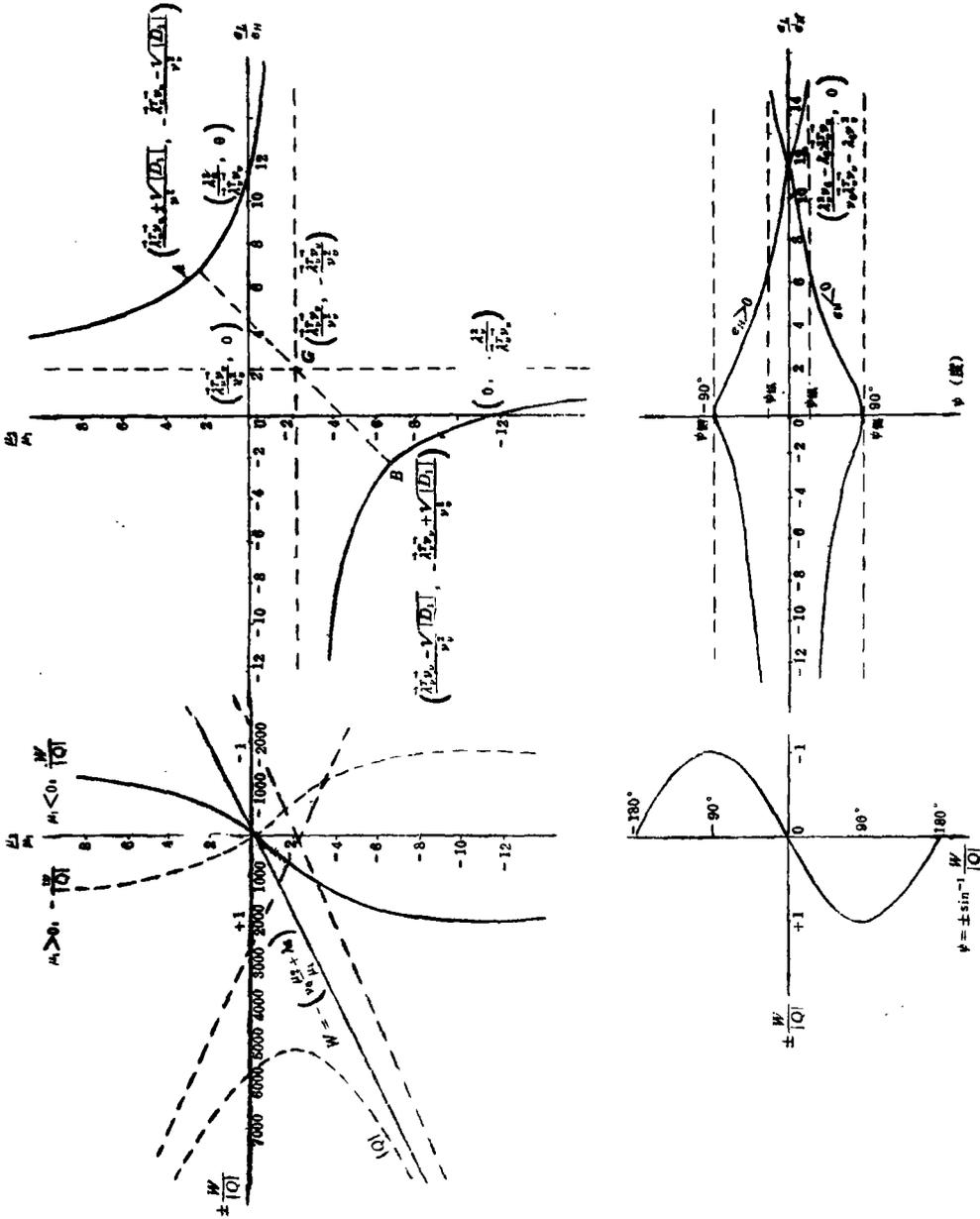
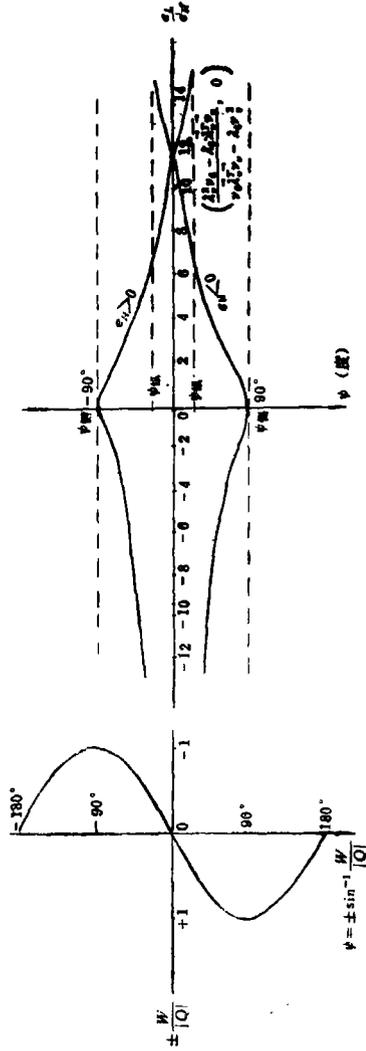


图 3 分导图 2— ψ 与 e_T/e_H 的关系



2. 速度增量大小与目标散开距离的关系

将(14)式代入(15)，直接得到

$$u^2(t_B) = a \left(\frac{e_L}{e_H} \right)^2 + b \frac{e_L}{e_H} + c \quad (18)$$

式中

$$a = \frac{v_v^2}{\lambda_v^2 v_v^2 - (\vec{\lambda}_v^T \vec{v}_v)^2} e_H^2$$

$$b = - \frac{2 \vec{\lambda}_v^T \vec{v}_v}{\lambda_v^2 v_v^2 - (\vec{\lambda}_v^T \vec{v}_v)^2} e_H^2$$

$$c = \frac{\lambda_v^2}{\lambda_v^2 v_v^2 - (\vec{\lambda}_v^T \vec{v}_v)^2} e_H^2$$

上式是 $u(t_B)$ 对于 e_L/e_H 的二次曲线方程。对弹道导弹分导问题，必有 $a > 0$ ， $4ac - b^2 > 0$ ，所以它是对称于 e_L/e_H 轴的双曲线。如图 4 所示。详见分导图 3。

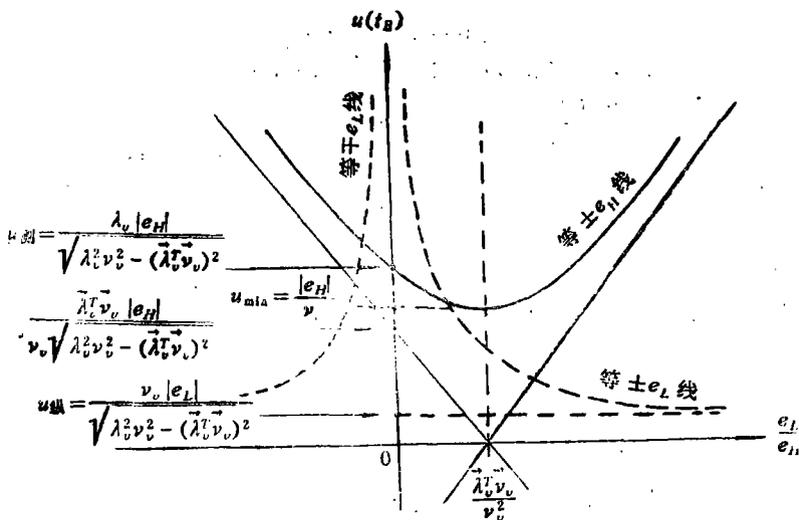


图 4 $u(t_B)$ 与 e_L/e_H 的关系

由分导图可见：

(1) 速度增量的方向与分导点的弹道偏导数和比值 e_L/e_H 有关，而其大小还与 e_H (或 e_L) 的大小有关。

(2) 当 $e_L/e_H = 0$ 时，即 $e_L = 0$ 。这是落点垂直于射面的侧向分导情况。其

$$u_{\text{侧}}(t_B) = \frac{\lambda_v}{\sqrt{\lambda_v^2 v_v^2 - (\vec{\lambda}_v^T \vec{v}_v)^2}} |e_H|$$

与 $|e_H|$ 成正比，并且为了使侧向分导效果尽量好，分导推力方向应垂直于射面。但由于纵侧向间相互有影响，所以

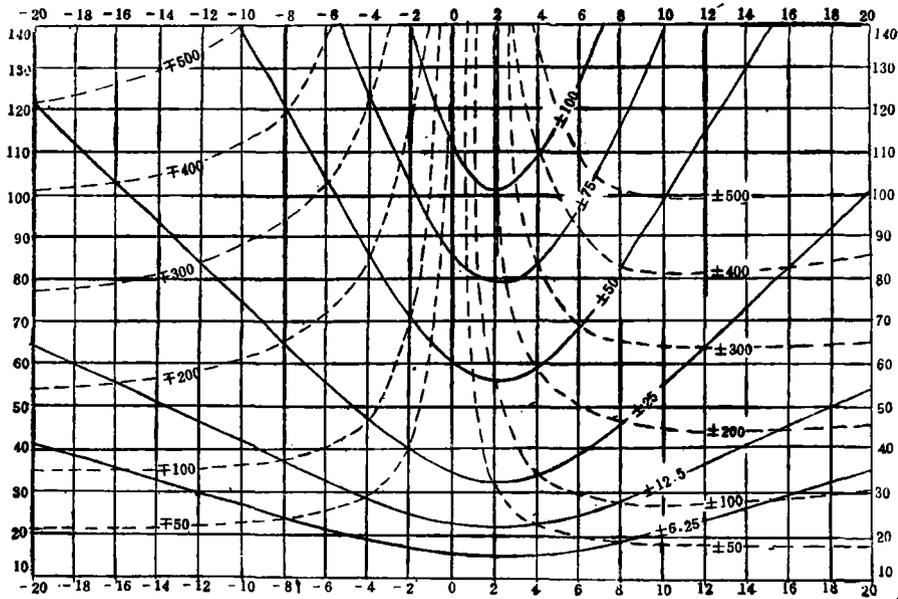


图 5 分导图 3— $u(t_B)$ 与 e_L/e_H 的关系
 横轴— e_L/e_H 纵轴— $u(t_B)$ (米/秒) 实线—等 e_H 线 (公里) 虚线—等 e_L 线 (公里)

$$\psi_{\text{侧}} = \pm \sin^{-1} \frac{\lambda_6 - \frac{\lambda_v^2}{\lambda_v^T} \nu_6}{\lambda_v \left[\frac{\lambda_v^2 \nu_v^2}{(\lambda_v^T \nu_v)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \approx \pm 90^\circ$$

$e_H < 0$ 时取 +
 $e_H > 0$ 时取 -

而

$$\varphi_{\text{侧}} = \begin{cases} \text{tg}^{-1} \frac{\lambda_5 - \frac{\lambda_v^2}{\lambda_v^T} \nu_5}{\lambda_4 - \frac{\lambda_v^2}{\lambda_v^T} \nu_4} \triangleq \varphi_{0\text{侧}} & e_H < 0 \\ \pi + \varphi_{0\text{侧}} & e_H > 0 \end{cases}$$

这样，分导速度增量的三个分量

$$\begin{bmatrix} u_x(t_B) \\ u_y(t_B) \\ u_z(t_B) \end{bmatrix} = u_{\text{侧}}(t_B) \begin{bmatrix} \cos \psi_{\text{侧}} \cos \varphi_{\text{侧}} \\ \cos \psi_{\text{侧}} \sin \varphi_{\text{侧}} \\ -\sin \psi_{\text{侧}} \end{bmatrix}$$

各自引起的纵向分导值才能相互抵消，而使 $e_L = 0$ 。

(3) 当 $e_L/e_H \rightarrow \infty$ 时，表示若 $e_H = 0$ ，则这是落点在射面内的纵向分导情况。其

$$u_{\text{纵}}(t_B) = \frac{\nu_v}{\sqrt{\lambda_v^2 \nu_v^2 - (\lambda_v^T \nu_v)^2}} |e_L|$$

与 $|e_L|$ 成正比。与侧向分导相比，由于 $\lambda_v > \nu_v$ ，所以，在速度增量 $u_{\text{纵}}(t_B)$ 、 $u_{\text{侧}}(t_B)$ 相同的条件下，纵向散开距离 $|e_L|$ 总大于侧向散开距离 $|e_H|$ 。其

$$\varphi_{\text{纵}} = \begin{cases} \text{tg}^{-1} \frac{\lambda_5 - \frac{\vec{\lambda}_v^T \vec{v}_v}{v_v^2} v_5}{\lambda_4 - \frac{\vec{\lambda}_v^T \vec{v}_v}{v_v^2} v_4} \triangleq \varphi_{0\text{纵}} & e_L > 0 \\ -\pi + \varphi_{0\text{纵}} & e_L < 0 \end{cases}$$

同理

$$\psi_{\text{纵}} = \pm \sin^{-1} \frac{\lambda_6 - \frac{\vec{\lambda}_v^T \vec{v}_v}{v_v^2} v_6}{\lambda_v \left[1 - \left(\frac{\vec{\lambda}_v^T \vec{v}_v}{\lambda_v^2 v_v^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \begin{matrix} e_L > 0 \text{ 取} + \\ e_L < 0 \text{ 取} - \end{matrix}$$

$$\neq 0$$

即分导推力所以要偏离射面，也是为了使由此形成的三个速度增量分量产生的 $e_H = 0$ 。

本情况也表示了若 $e_H \neq 0$ ，则 $e_L \rightarrow \infty$ 。即当 e_L 比 e_H 越来越大时，所需的速度增量 $u(t_B)$ 也越来越大； φ 越接近于最佳弹道倾角，

$$\varphi \rightarrow \varphi_{\text{纵}} \approx \text{tg}^{-1} \frac{\lambda_5}{\lambda_4} = \varphi_{OPT}$$

(4) 当 e_L/e_H 由 $0 \rightarrow \infty$ 增加时， φ 由 $\varphi_{\text{侧}} \rightarrow \varphi_{\text{纵}}$ ， ψ 由 $\psi_{\text{侧}} \rightarrow \psi_{\text{纵}}$ ，并且， φ 在 $|e_L/e_H| < 1$ 中有很大改变；在 $|e_L/e_H| > 2$ 中，改变就很小了，基本接近于最佳弹道倾角 φ_{OPT} 。而 ψ 随 e_L/e_H 的改变比较均匀。

又当 $e_L/e_H = \vec{\lambda}_v^T \vec{v}_v / v_v^2$ 时， $u(t_B)$ 出现极小值：

$$u(t_B)_{\min} = \frac{|e_H|}{v_v} = \frac{v_v}{\vec{\lambda}_v^T \vec{v}_v} |e_L|$$

这意味着纵向与侧向散开距离 e_L 、 e_H 的比例关系，在此值最恰当，该值与 e_H 或 e_L 成正比。

三、攻击多目标的最好次序

多弹头导弹在发射前，需要进行射击准备的模拟计算。其主要目的是：根据目标分布情况和导弹具有的分导能力，

- (1) 选定发射一枚导弹所能攻击的目标；
- (2) 选择攻击多目标的最好次序；
- (3) 确定最优分导程序，并给出母舱和子弹头的最优轨道；
- (4) 确定对所有目标的攻击方案。

当然，这要用数字机反复核算。这里，提出初步估算方法。

1. 子弹头容许散开距离的估算

一个导弹的分导能力，通常用分导多弹头落点之间的容许散开距离来衡量。其容许散开距离除取决于子弹头投放点的位置（或即下面将提到的分导开始点的选择）外，主

要取决于母舱末助推系统所产生的总冲量, 即所能提供的速度增量值 $u_{\text{总}}$

$$\begin{aligned} u_{\text{总}}(t_B) &= \int_0^{\frac{m_{\text{剂}}}{m}} \frac{P}{m_{\text{母子}} - mt} dt \\ &= -p_b g \ln\left(1 - \frac{m_{\text{剂}}g}{m_{\text{母子}}g}\right) \\ &\approx p_b g \frac{m_{\text{剂}}g}{m_{\text{母子}}g} \quad (\text{因通常 } \frac{m_{\text{剂}}}{m_{\text{母子}}} \text{ 足够小}) \end{aligned} \quad (19)$$

式中 $m_{\text{母子}}g$ 为分导前母舱 (包括舱内的子弹头) 的总重量; 其中推进剂重量为 $m_{\text{剂}}g$; 如果平均地把 $\vec{u}_{\text{总}}$ 的方向 φ 、 ψ 取为 45° , 那么, 容易估算出子弹头的容许散开距离:

$$\text{纵向为} \quad |e_{L\text{总}}| \approx \left| \frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_5 - 1.41\lambda_6)u_{\text{总}} \right|$$

$$\text{横向为} \quad |e_{H\text{总}}| \approx \left| \frac{1}{2}(\nu_4 + \nu_5 - 1.41\nu_6)u_{\text{总}} \right|$$

对远程导弹, 通常

$$\begin{aligned} |e_{L\text{总}}| &\approx (4000 \sim 5000)u_{\text{总}} \\ |e_{H\text{总}}| &\approx \left(\frac{1}{10} \sim \frac{1}{5}\right)|e_{L\text{总}}| \end{aligned} \quad (20)$$

再根据目标的分布位置和攻击目标的次序 (详见下面), 按来回程计算出各目标间散开距离的绝对值之和。显然, 只有满足

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n |e_{Li}| &\leq |e_{L\text{总}}| \\ \sum_{i=2}^n |e_{Hi}| &\leq |e_{H\text{总}}| \end{aligned} \quad (21)$$

中的目标, 才有可能被一枚多弹头导弹击中。

2. 分导开始点的选定

上述最优分导速度增量的大小和方向是在一定的弹道偏导数值 λ_i 、 ν_i 下计算出来的。实际上, λ_i 、 ν_i 将随着分导开始点的推迟而减小。于是达到同一 e_L 、 e_H 所需的分导速度增量 $u(t_B)$ 将增加。为了减少所需的推进剂量, 相应的 $u(t_B)$ 应小, 故分导开始点应尽量选得提前。通常在到达弹道最高点之前, 要将所有子弹头全部投放完毕。实际上, 考虑到由于母舱主发动机推力和姿态小发动机提供的控制力有一定的限度、母舱结构过载也不能太大等原因, 各发子弹头投放之间要留有一定的时间间隔, 以满足母舱姿态调转和加速变轨的要求。一般姿态调整段时间约为 $10 \sim 30$ 秒, 分导段时间约为 $10 \sim 50$ 秒, 其总时间约为 100 秒左右。

3. 选择攻击多目标的最好次序

本小节通过举例引出一般的结论。假设在推进剂消耗量不超过 35 公斤的条件下, 投放三个子弹头, 攻击如下分布的目标 F_1 、 P_2 、 P_3 ; 其 $m_{\text{母子}}g = 907$ 公斤, $m_i g = 160$ 公斤, $P = 136$ 公斤, $p_b = 285$ 秒。如果 $t_k = 300$ 秒, 第 1 个子弹头投放时刻 $t_1 = t_{A1} = 450$ 秒,

第2个子弹头分导开始时刻 $t_{A2}=500$ 秒, 第3个子弹头的 $t_{A3}=600$ 秒, 且为了说明简单起见, 统一取

$$\begin{bmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 & 2500 & 100 \\ 400 & 250 & 1000 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{米} \\ \text{米/秒} \end{matrix}$$

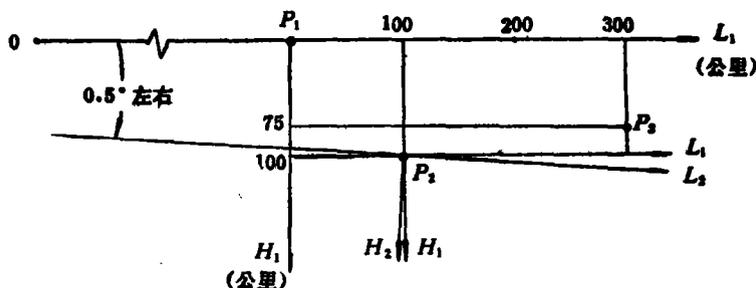


图6 目标分布图

对三个目标可有六种不同的攻击次序。如果第1个目标选定 F_1 , 则 P_2 、 P_3 的散开距离就是目标坐标系 $L_1P_1H_1$ 中的坐标值之差。同样, 如果第1个目标选定 P_2 , 则 P_1 、 P_3 的散开距离就是在 $L_2P_2H_2$ 中的坐标值之差。事实上, 由于 $|e_{H总}| \approx (1\sim 2)\%$ 全射程, 所以, $L_2P_2H_2$ 可以近似用 $L_1P_2H_1$ 表示。

对于每一种攻击次序:

(1) 由 e_{Li} 、 e_{Hi} , 利用公式(19)~(21)估算是否满足散开距离的许可范围;

(2) 由分导图3查出所需速度增量的大小 $u_i(t_B)$, 并按下面的公式计算分导段时间和推进剂消耗量:

因为导弹直接瞄准第1个目标, 第1个子弹头($i=1$)不再需要母舱提供速度增量, 即 $u_1=0$, $t_{B1}-t_{A1}=t_1-t_1=0$, 而第 i ($i \geq 2$) 个子弹头在分导段 $t_{Bi}-t_{Ai}$ 中, 由于在这之前已消耗了一部分推进剂, 并且从母舱里已投放掉 $(i-1)$ 个子弹头, 所以, 分导推力产生的速度增量为

$$\begin{aligned} u_i(t_B) &= \int_{t_{Ai}}^{t_{Bi}} \frac{p_b g}{m_{\text{母子}} - (i-1)m_{\text{子}} - \dot{m} \sum_{j=2}^{i-1} (t_{Bj} - t_{Aj})} dt \\ &= -p_b g \ln \frac{m_{\text{母子}} - (i-1)m_{\text{子}} - \dot{m} \sum_{j=2}^i (t_{Bj} - t_{Aj})}{m_{\text{母子}} - (i-1)m_{\text{子}} - \dot{m} \sum_{j=2}^{i-1} (t_{Bj} - t_{Aj})} \end{aligned} \quad (22)$$

于是, 第 i 个子弹头要达到 $u_i(t_B)$ 所需要的分导段时间为

$$t_{Bi} - t_{Ai} = \frac{m_{\text{母子}} g - (i-1)m_{\text{子}} g - \frac{P}{p_b} \sum_{j=2}^{i-1} (t_{Bj} - t_{Aj})}{P g} \left[u_i(t_B) - \frac{1}{2} \frac{u_i^2(t_B)}{p_b g} \right] \quad (23)$$

所消耗的推进剂重量为

$$\Delta m_{剂i} g = \frac{P}{p_b} (t_{Bi} - t_{Ai})$$

故分导 n 个子弹头所消耗的推进剂总量为

$$\begin{aligned} \Delta m_{剂总} g &= \sum_{i=2}^n \frac{P}{p_b} (t_{Bi} - t_{Ai}) \\ &= \frac{1}{p_b g} \sum_{i=2}^n \left\{ \left[m_{母子} g - (i-1) m_{子} g - \frac{P}{p_b} \sum_{j=2}^{i-1} (t_{Bj} - t_{Aj}) \right] \left[u_i(t_B) - \frac{1}{2} \frac{u_i^2(t_B)}{p_b g} \right] \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

(3) 由分导图 1、2 查出 φ 、 ψ 。

经过计算, 下面仅画出 $F_1 P_3 P_2$ 、 $P_2 P_3 P_1$ 和 $P_1 P_2 P_3$ 三种攻击次序所需速度增量随时间变化的曲线, 如图 7 所示。也可用图 8 所示的速度增量极坐标图形象表示。图中极轴为 $u(t_B)$, 极角为 φ 或 ψ 。且第 1 个子弹头投放角 $\varphi_1 = 23^\circ$, $\psi_1 = 0^\circ$ 。

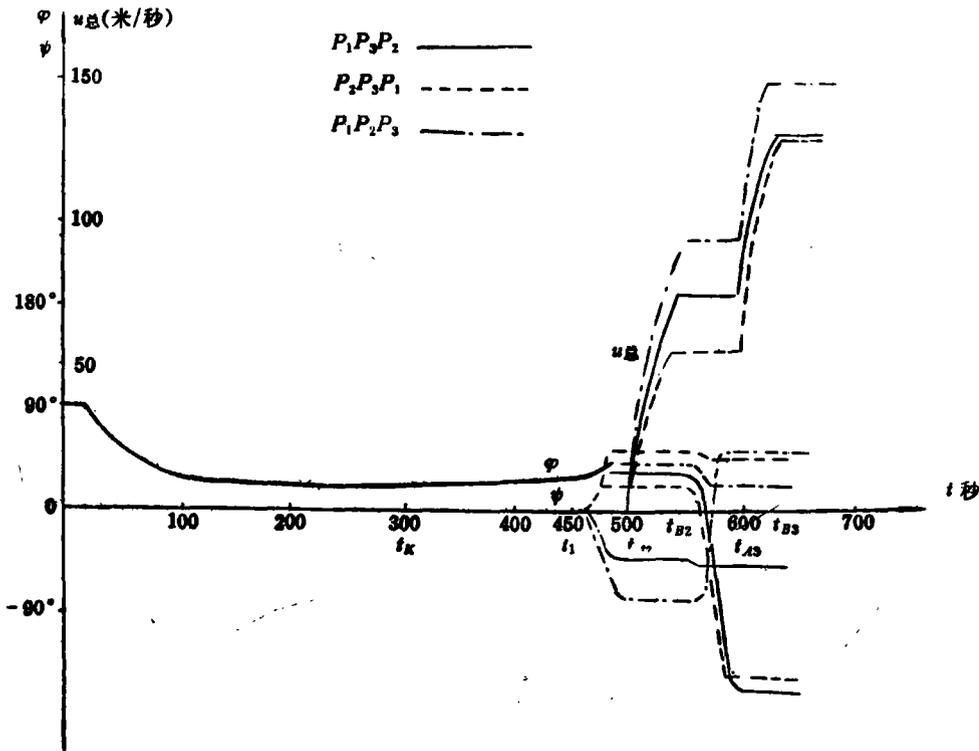


图 7 三种攻击方案的速度增量比较

对 $P_2 P_3 P_1$ 而言, 其所需的 $u(t_B)$ 最小, 相应只需要推进剂量 29.5 公斤。其 $\varphi_2 = 20^\circ$, $\varphi_3 = -150^\circ$; $\psi_2 = 50^\circ$, $\psi_3 = 45^\circ$ 。即 φ 角单向转动 -173° , ψ 角双向转动 55° , 与其他攻击次序相比, φ 、 ψ 的调转也不大, 所以本攻击次序是比较好的一种方案。

对 $P_1 P_3 P_2$ 而言, 所需推进剂量为 30.6 公斤, 略多于 $P_2 P_3 P_1$ 方案。其 $\varphi_2 = 30^\circ$, $\varphi_3 = -160^\circ$; $\psi_2 = -45^\circ$, $\psi_3 = -50^\circ$ 。即 φ 角单向转动 $+177^\circ$, ψ 单向转动 -50° , 都比较小。故也是较好的方案之一。

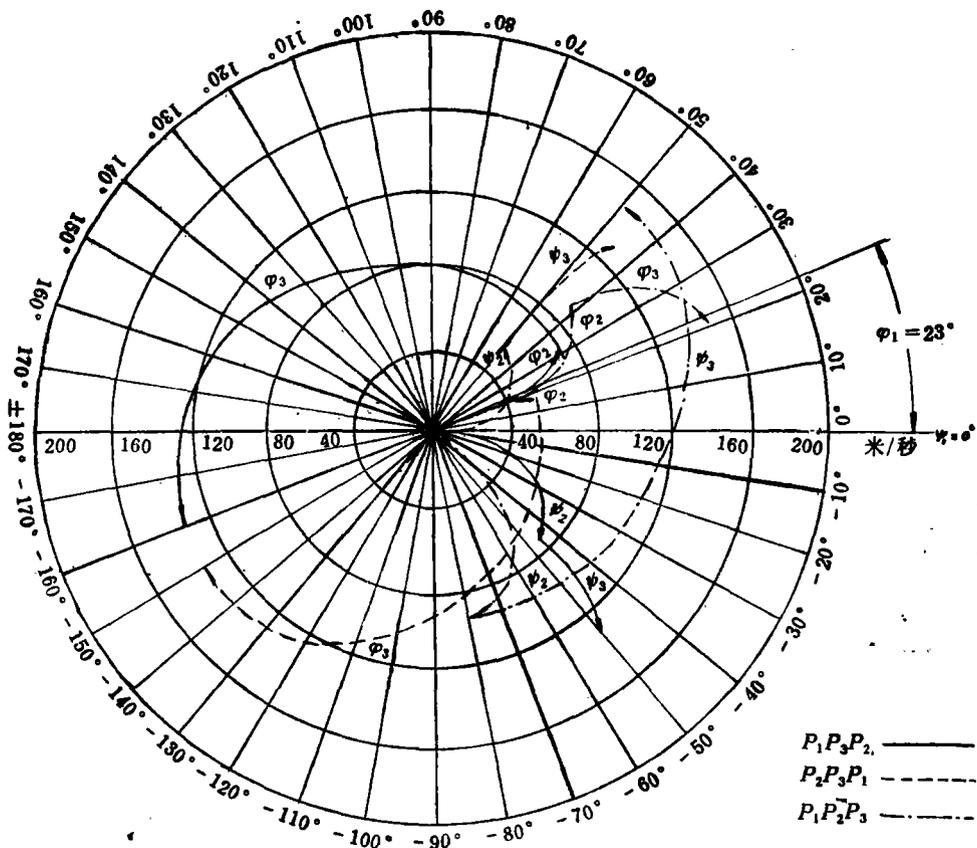


图 8 速度增量极坐标图

对 $P_1P_2P_3$ ，其 $\varphi_2 = 42^\circ$ ， $\varphi_3 = 20^\circ$ ； $\psi_2 = -80^\circ$ ， $\psi_3 = 50^\circ$ 。即 φ 角双向转动 41° ， ψ 角双向转动达 210° ，相应推进剂量增加为 35.4 公斤，超过了允许值，故不能选用。

对其余三种攻击次序，由于左右前后来回地攻击目标，增加了分导散开距离，而且 ψ 和 φ 均要双向大角度调转，致使推进剂量增加，故更不宜采用。

由此得出，一个好的分导攻击次序，应该是所需的 $u(t_B)$ 要小，即推进剂量要少， φ 、 ψ 的调转角度要尽量小，尤其侧向调转角 ψ 要小，而且最好单方向调转。一般地说，按目标的侧向分布由右到左（或由左到右）和纵向分布由近到远的次序，折衷地选出两、三种较好的攻击方案（如本例中初步选出 $P_2P_3P_1$ 和 $P_1P_3P_2$ 两种）。然后，用数字机计算精确的原方程，以正确决定所采取的攻击方案。

四、选定最优分导程序的一般步骤

选择前已知：弹道参数（如射程、各段飞行时间、 λ_i 、 ν_i 等），母舱结构参数（ $m_{\text{母子}g}$ 、 $m_{\text{子}g}$ 等）母舱助推系统参数（ P 、 P_0 、 $m_{\text{剂总}g}$ 等）和要求的目标分布（ e_L 、 e_H ）等。

其大致步骤如下：

- (1) 根据目标分布, 由(19)~(21)式估算子弹头的容许散开距离, 初步确定一枚多弹头导弹所能攻击的目标;
- (2) 选择分导开始点;
- (3) 由分导开始点的弹道偏导数, 画出各分导开始点的分导图 1、2、3;
- (4) 按各种可能攻击次序由给定的目标之间的相对散开距离, 利用分导图查出所需速度增量的大小和方向, 画出其速度增量极坐标图, 并计算各分导段时间和所需推进剂量;
- (5) 综合分析所得结果, 初步选出比较好的攻击目标的次序;
- (6) 数字机模拟。可选取不同的分导开始点, 不同的攻击次序, 不同的推力程序等, 对精确的原方程(1)、(2)、(3)、(5)、(7)、(8)、(9) 等进行分析计算, 以最后确定分导程序;
- (7) 计算最优分导轨道;
- (8) 以上方法推广到确定对所有目标(目标总数多于每枚导弹所携带的子弹头数)的攻击方案。用以确定各导弹相应攻击的目标点及其各自的最优分导程序和最优分导轨道。

在此, 谨对陈蓼芳、王枚之和孙越等同志的帮助, 深表谢意。

本文对最优分导程序作了一些分析计算, 所提出的方法和结论仅供参考, 错误不当之处欢迎批评指正。

参 考 文 献

- [1] 张最良, 多弹头分导的摄动制导问题, 制导与控制, 1980, No. 2.
- [2] A. E. Bryson, Jr., Yu-chi Ho, Applied Optimal Control, 1975.
中译本: A. E. 布赖森, 何琦毓 著, 钱洁文等译, 张良起校, 应用最优控制, 国防工业出版社, 1982. 2.
- [3] 凌德海, 多弹头分导的制导方程, 国防科技大学学报, 1980, No. 1.

Choice of Optimal Multiple Independently Targeted Programming

Xue Pei-feng

Abstract

In this paper, on the basis of studying into optimal thrust-direction program, the minimum principle is used to derive approximate analytic solution of the velocity increments of independently targeted warhead. Independently targeting graphs and velocity increment polar plots are proposed to be applied

for selecting independently targeting program, including the choicing optimal thrust direction angles, determination of required velocity increment and fuel consumption together with the selection of optimal sequence of hitting multiple targets chosen and so forth. Computed data are provided for illustration of purpose.

Method of analysis used is applicable to arbitrary distributed multiple targets within a certain range of distribution and convenient for primary engineering design and the analysis of the process of independent targeting. The results obtained can be used as a guidance for digital simulation.