

以 e^{At} 为基础的数字仿真方法

黄 柯 棣

提 要 本文所叙述的以 e^{At} 为基础的数字仿真方法,是将被仿真系统中的各个连续线性定常部分看作子系统,利用计算机先求出每个子系统的离散状态方程,然后根据各子系统的相互联接、其间的非线性或变系数特性,再进行数字仿真。这种仿真方法计算速度快、精度高、有较强的适应性。

文章中着重介绍了用解析法求解子系统离散状态方程的系数阵。解析法的优点是:对线性定常系统而言,仿真前的计算量及仿真精度与仿真步距 T 的选取无关,其缺点是程序较繁。

前 言

连续系统的数字仿真可采用先将连续系统离散化的方法,常用方法之一是在组成自动控制系统的每一个典型环节之间都加一个虚拟的采样器及保持器,并事先求出各个典型环节的离散状态方程的系数阵 $\Phi(T)$ 、 $\Phi_m(T)$,然后将各典型环节的类型、参数、初始条件以及各环节间的连接表输入给计算机,计算机就可以求出在输入信号作用下各环节输出变化的情况。这种作法的优点是:1)程序简单;2)扩展到非线性系统的模拟方便。主要缺点是:引入的虚拟采样保持器过多。而每引入一个采样保持器,相当在控制回路中引入一个附加的环节,因而造成计算结果的误差,引入的采样保持器越多,带来的误差越严重,要减小此误差,必须缩小步距,从而使占用的机时增加。

本文所采用的数字仿真方法仍是“连续系统离散相似法”,但尽量减少虚拟采样保持器的引入,所以是以系统的某一线性定常部分作为一个基本单元,用程序求出这样单元的离散状态方程的系数阵 $\Phi(T)$ 、 $\Phi_m(T)$,然后采用与前述类似的方法对系统进行仿真。这个方法主要缺点是程序复杂。优点是:1)对线性定常系统仿真,如果系统输入是一个解析函数,则无原理误差,仅有舍入误差;2)可以快速地计算系统的动态响应;3)应用面广,可以用于对变参数、非线性系统及多变量系统的仿真。

本文重点叙述对于任意给定线性定常系统如何求出 $\Phi(T)$ 、 $\Phi_m(T)$,其他问题因有关资料已有详细论述,则从略。

§1 建立在状态转移基础上的数字仿真

在控制系统的数字仿真中,经常采用状态转移的方法,即:以状态方程

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (1)$$

所描述的连续系统离散化后所得的结果,实际上是以 K 步计算所得的结果 $\mathbf{X}(KT)$ 为初始状态,在给定的控制 $\mathbf{u}(t)$ 的作用下,在步长 T 内转移到 $\mathbf{X}((K+1)T)$ 状态。下面进一步说明之。状态方程(1)的解为

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2)$$

对于 K 及 $(K+1)$ 两个依次相邻的采样时刻,分别有

$$\mathbf{X}(KT) = e^{\mathbf{A}(KT-t_0)} \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^{KT} e^{\mathbf{A}(KT-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3)$$

$$\mathbf{X}((K+1)T) = e^{\mathbf{A}((K+1)T-t_0)} \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^{(K+1)T} e^{\mathbf{A}((K+1)T-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (4)$$

以 $e^{\mathbf{A}T}$ 左乘(3)式,然后从(4)式减去此式,得

$$\mathbf{X}((K+1)T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{X}(KT) + \int_{KT}^{(K+1)T} e^{\mathbf{A}((K+1)T-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5)$$

将(5)式右边积分进行变量代换,即令 $\tau = KT + t$,则得

$$\mathbf{X}((K+1)T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{X}(KT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-t)} \mathbf{B}\mathbf{u}(KT+t) dt \quad (6)$$

若 $\mathbf{u}(t)$ 已知,(6)式为(1)式所示系统离散化后由 K 步向 $(K+1)$ 步转移的表达式。在实际数仿真中,此局部系统的输入是彼局部系统的输出,则 $\mathbf{u}(t)$ 成为未知,此时可以近似地认为相邻两采样时刻之间控制信号为常数,即令

$$\mathbf{u}(KT+t) = \mathbf{u}(KT) \quad KT \leq t < (K+1)T$$

则(6)式变为

$$\mathbf{X}((K+1)T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{X}(KT) + \left[\left(\int_0^T e^{\mathbf{A}(T-t)} dt \right) \mathbf{B} \right] \mathbf{u}(KT) \quad (7)$$

令

$$\Phi(T) = e^{\mathbf{A}T}$$

$$\Phi_m(T) = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}(T-t)} dt \right) \mathbf{B}$$

则有

$$\mathbf{X}((K+1)T) = \Phi(T) \mathbf{X}(KT) + \Phi_m(T) \mathbf{u}(KT) \quad (8)$$

这就是相应连续系统(1)的离散状态方程。下面叙述(1)式所示系统的 $\Phi(T)$ 及 $\Phi_m(T)$ 的求法。

§2 $\Phi(T)$ 、 $\Phi_m(T)$ 的求法

§ 2-1 转移矩阵及其求法

1) 转移矩阵的定义

齐次状态方程式

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t)$$

这里 \mathbf{X} 为 n 维矢量, \mathbf{A} 为 $n \times n$ 矩阵, 分别以初始条件为

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2(t_0) = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{X}_n(t_0) = \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求得的解矢量为

$$\Phi_1(t, t_0), \Phi_2(t, t_0), \dots, \Phi_n(t, t_0)$$

把这些解矢量排起来作一个 $n \times n$ 矩阵

$$\Phi(t, t_0) = [\Phi_1(t, t_0), \Phi_2(t, t_0), \dots, \Phi_n(t, t_0)] \quad (9)$$

称为转移矩阵, 当 $t_0=0$ 时, 转移矩阵可记作 $\Phi(t)$, 同时, 当 $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$ (常数矩阵) 时, $\Phi(t) = e^{At}$.

2) 转移矩阵的求法

线性时变系统转移矩阵的求得是困难的, 但对于定常系统可以计算其转移矩阵。下面简单介绍 $\Phi(t) = e^{At}$ 的计算方法。 e^{At} 的算法可分两类:

一类是以

$$e^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^K t^K}{K!} + \dots$$

为基础的各种数值计算方法。另一类是解析的计算方法, 其中有

(一) 拉氏变换法

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathbf{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \quad (10)$$

其中 $\mathbf{L}^{-1}[\cdot]$ 表示拉氏逆变换。

(二) Sylvester 补插值多项式法

设矩阵 \mathbf{A} 有不重的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $f(\mathbf{A})$ 为 $(n-1)$ 次的矩阵多项式, 则 $f(\mathbf{A})$ 能表示成下式

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \frac{(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \dots (\mathbf{A} - \lambda_{i-1} \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_{i+1} \mathbf{I}) \dots (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I})}{(\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) \dots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \dots (\lambda_i - \lambda_n)} \quad (11)$$

这个式子叫做 Sylvester 补插值多项式, 利用它可以直接求出转移矩阵。

为了计算程序有更广泛的应用范围, 我们采用后面叙述的第三种方法, 对此作重点

当 A 有重特征值时, 此重特征值对应的约旦块到底为上例的何种形式呢? 我们按如下方法判断:

如 A 有特征值 λ_i 且 $J = P^{-1}AP$, 则

$$J - I\lambda_i = P^{-1}(A - I\lambda_i)P$$

证:

因为

$$J = P^{-1}AP$$

所以

$$\begin{aligned} J - \lambda_i I &= P^{-1}AP - \lambda_i I \\ &= P^{-1}AP - \lambda_i P^{-1}P \\ &= P^{-1}(A - \lambda_i I)P \end{aligned}$$

又因为相似矩阵的秩相等, 如 λ_i 为 A 的重特征值, 相应的 $(J - \lambda_i I)$ 的秩依 J_i 的形式而定, 从上例可见这是显然的。

设 $n \times n$ 实系数阵 A 有特征值 λ_i , 其重数为 u_i , 且求得 $\text{rank}(A - \lambda_i I) = n - \alpha_i$, 从 (13) 式可知

$$\alpha_i = u_i - n_i + 1$$

可见如果已求得 A 的 l 个特征值, 且对于重根 λ_i 而言求出 α_i , 则可方便地作出对应于 A 的约旦标准型。从上面的分析也可以知道, 对角标准型只是约旦标准型的一个特例。

c) 已作出 J 阵, 就可以求得 e^{Jt} 的解析表达式。又因为当

$$J = P^{-1}AP \quad \text{或} \quad A = PJP^{-1}$$

时, 则

$$\begin{aligned} Pe^{Jt}P^{-1} &= Pe^{P^{-1}APt}P^{-1} \\ &= P \left[I + P^{-1}APt + \frac{1}{2!}(P^{-1}AP)^2 t^2 + \dots \right] P^{-1} \\ &= PP^{-1} + PP^{-1}APP^{-1}t + \frac{1}{2!}P(P^{-1}AP)^2 P^{-1}t^2 + \dots \\ &= I + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \dots \\ &= e^{At} \end{aligned} \tag{14}$$

这样就可以求得 e^{At} 的解析表达式。

§ 2-2 $\Phi(T)$ 、 $\Phi_m(T)$ 的计算方法

对于式 (1) 所给定的系统, 令

$$X = Pz, \quad \text{则} \quad \dot{X} = P\dot{z}$$

将 (1) 式变换为

$$\dot{z} = Jz + P^{-1}Bu, \quad z(t_0) = P^{-1}X(t_0) \tag{15}$$

其中

$$J = P^{-1}AP$$

(15) 式离散化以后的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{z}((K+1)T) &= e^{\mathbf{J}T} \mathbf{z}(KT) + \left[\int_0^T e^{\mathbf{J}(T-t)} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} dt \right] \mathbf{u}(KT) \\ &= e^{\mathbf{J}T} \mathbf{z}(KT) + \left[\int_0^T e^{\mathbf{J}(T-t)} dt \right] \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(KT) \end{aligned} \quad (16)$$

将(16)式变换为以 \mathbf{X} 为状态变量的表达式

$$\mathbf{X}((K+1)T) = \mathbf{P} e^{\mathbf{J}T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}(KT) + \left\{ \mathbf{P} \left[\int_0^T e^{\mathbf{J}(T-t)} dt \right] \mathbf{P}^{-1} \right\} \mathbf{B} \mathbf{u}(KT) \quad (17)$$

根据(14)式有

$$\mathbf{P} e^{\mathbf{J}T} \mathbf{P}^{-1} = e^{\mathbf{A}T} = \Phi(T)$$

同理有

$$\mathbf{P} \left[\int_0^T e^{\mathbf{J}(T-t)} dt \right] \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} = \left[\int_0^T e^{\mathbf{A}(T-t)} dt \right] \mathbf{B} = \Phi_m(T)$$

所以求 $\Phi(T)$ 及 $\Phi_m(T)$ 的计算步骤是:

- i) 求 \mathbf{A} 的特征值,而后作出相应于 \mathbf{A} 的 \mathbf{J} ;
- ii) 求出 $e^{\mathbf{J}t}$ 及 $\int_0^t e^{\mathbf{J}(t-\tau)} d\tau$ 的解析表达式;
- iii) 令 $t=T$, 求出 $e^{\mathbf{J}T}$ 及 $\int_0^T e^{\mathbf{J}(T-t)} dt$ 数值矩阵,经相似变换求得 $\Phi(T)$ 及 $\Phi_m(T)$.

下面分别叙之。

1) 求 \mathbf{A} 的特征值

求 \mathbf{A} 的特征值方法很多,在这里我们是采用了双步QR法。这是目前较有效的方法。此法的基本理论及编程步骤见参考文献[1]有关部分。

2) $e^{\mathbf{J}T}$ 及 $\int_0^T e^{\mathbf{J}(T-t)} dt$ 的求法

$n \times n$ 实数矩阵 \mathbf{A} 的特征值有四种可能的形式:

- i) 是单实根;
- ii) 是重实根;
- iii) 是单的共轭复根对;
- iv) 是重的共轭复根对。

求 $e^{\mathbf{J}T}$ 及 $\int_0^T e^{\mathbf{J}(T-t)} dt$ 要考虑到根的不同形式。对应单实根 $e^{\mathbf{J}T}$ 及 $\int_0^T e^{\mathbf{J}(T-t)} dt$ 阵的对应元素的求得很简单,这里不介绍;单共轭复根对的情况后面专门讲述;本程序暂未考虑重共轭复根对的情况,所以亦不介绍;下面着重介绍重实根对应的 $e^{\mathbf{J}T}$ 及 $\int_0^T e^{\mathbf{J}(T-t)} dt$ 阵的诸元素的求法。

例如给定方程为:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{J}_K \mathbf{Y} \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0 \quad (18)$$

其中

$$\mathbf{J}_K = \begin{pmatrix} \lambda_K & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_K & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_K \end{pmatrix}$$

先求转移函数 $e^{\mathbf{J}_K t}$, 解方程 (18) 得

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_K t} & te^{\lambda_K t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_K t} & \frac{t^3}{3!} e^{\lambda_K t} \\ 0 & e^{\lambda_K t} & te^{\lambda_K t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_K t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_K t} & te^{\lambda_K t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_K t} \end{pmatrix} \mathbf{Y}_0$$

转移函数以 T_K 表示, 则

$$\begin{aligned} T_K &= \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ 0 & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ 0 & 0 & T_{33} & T_{34} \\ 0 & 0 & 0 & T_{44} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_K t} & te^{\lambda_K t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_K t} & \frac{t^3}{3!} e^{\lambda_K t} \\ 0 & e^{\lambda_K t} & te^{\lambda_K t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_K t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_K t} & te^{\lambda_K t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_K t} \end{pmatrix} \\ &= e^{\mathbf{J}_K t} \end{aligned}$$

从上式可以看出如下一般规律:

i) $e^{\mathbf{J}_K t}$ 阵为上三角的 $n_K \times n_K$ 阵, 其中 n_K 为 λ_K 的重数或如式 (13) 所示, 上例中 $n_K = 4$ 。

$$\text{ii) } T_K(1, j) = T_K(1+l, j+l) = \frac{t^{(j-1)}}{(j-1)!} e^{\lambda_K t}$$

其中

$$j = 1, 2, \dots, n_K$$

$$l = 1, 2, \dots, (n_K - j)$$

当取 $t = T$ 时, 则得 $\Phi_K(T) = T_K(T)$. 由于 T_K 阵每个元素的计算有上述规律, 这为程序编排提供了极大的方便。

$$\text{再求 } \int_0^T e^{\mathbf{J}_K(T-t)} dt$$

由于 $e^{J_K t}$ 阵已求出, $\int_0^T e^{J_K(T-t)} dt$ 阵的各个元素利用下面积分公式求得

$$\frac{1}{n!} \int_0^T (T-t)^n e^{\lambda_K(T-t)} dt = \frac{1}{n!} \int_0^T u^n e^{\lambda_K u} du \quad (19)$$

对 (19) 式逐步进行分部积分, 以 Q_K 阵表示式

$\int_0^T e^{J_K(T-t)} dt$ 阵, 则 Q_K 阵各元素有如下规律:

i) Q_K 阵亦为上三角阵, 并有

$$Q_K(1, j) = Q_K(1+l, j+l)$$

其中

$$j = 1, 2, \dots, n_K$$

$$l = 1, 2, \dots, (n_K - j)$$

ii) 第一行元素的计算通式为

$$Q(1, j) = \frac{e^{\lambda_K T}}{\lambda_K} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \frac{T^{j-1-i}}{(j-1-i)!} \cdot \frac{1}{\lambda_K^i} + (-1)^j \frac{1}{\lambda_K^j}$$

这样 Q_K 阵求得的程序也是简单的。

若式 (13) 中 $u_i - n_i \neq 0$, 该式右端矩阵的左上角块所对应的转移函数与单实根的情况求法相同。

求出 $n \times n$ 实数矩阵 A 各特征值所对应的 $e^{J_K T}$ 及 $\int_0^T e^{J_K(T-t)} dt$ 阵各元素, 通过程序组成此两阵是轻而易举的, 下面举一个例子说明。

例 1 设 (1) 式所描述的系统, 其系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 3 & -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \lambda^6 - 3\lambda^5 + 6\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda - 1)^3 (\lambda - 2) (\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

因此 A 的特征值可列举如下

$\lambda_1 = 1$, 重复次数为 3, 即 $n_1 = 3$

$\lambda_2 = 2$, 重复次数为 1, 即 $n_2 = 1$

$\lambda_3 = -1$, 重复次数为 2, 即 $n_3 = 2$

A 的 6×6 约旦标准型矩阵由下式给出

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

这个 6×6 的 J 矩阵由 J_1, J_2, J_3 三个约旦块沿对角线排列组成。其中:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = [2], \quad J_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

可见

$$e^{J_1 T} = \begin{pmatrix} e^T & T e^T & \frac{T^2}{2!} e^T \\ 0 & e^T & T e^T \\ 0 & 0 & e^T \end{pmatrix}$$

$$e^{J_2 T} = e^{2T}$$

$$e^{J_3 T} = \begin{pmatrix} e^{-T} & T e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix}$$

所以

$$e^{J T} = \begin{pmatrix} e^T & T e^T & \frac{T^2}{2!} e^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^T & T e^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-T} & T e^{-T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-T} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^T e^{J(T-t)} dt = \begin{pmatrix} e^T - 1 & e^T(T-1) & e^T\left(\frac{T^2}{2} - T + 1\right) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^T - 1 & e^T(T-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{T-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(e^{2T} - 1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-T} + 1 & -e^{-T}(T+1) & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-T} + 1 & 0 \end{pmatrix}$$

T 取定值, e^{JT} 与 $\int_0^T e^{J(T-t)} dt$ 为两个数值矩阵, 它们经过相似变换可得 e^{AT} 及 $\int_0^T e^{A(T-t)} dt$ 两阵。

3) 求相似变换矩阵 P

确定 P 的方法不是唯一的, 我们仅介绍两种方法。方法一是当系统的系数矩阵是可控标准型时, 可以找到 P 的显式方程。方法二是求 A 所有特征值对应的特征向量 (或广义特征向量) 来组成 P 阵。

先介绍方法之一, 下面叙述有关的结论。

一、 A 为 $n \times n$ 可控标准型矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (20)$$

其中 $a_i [i=0, 1, 2, \dots, (n-1)]$ 为 A 的特征多项式系数。 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互不相同, Λ 为相应于 A 的对角线矩阵, 则实现相似变换的矩阵 P 就是所谓的范达蒙矩阵, 如下式所示

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

二、设 A 为 (20) 式所示的可控标准型矩阵, 并设 A 只具有重复次数为 n 的一个特征值 λ (λ 须是实数), 即

$$\det(sI - A) = (s - \lambda)^n$$

则

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

并且实现相似变换的矩阵 P 如下式所示

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 & 4\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 & 10\lambda^2 & 5\lambda & 1 & 0 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \lambda^6 & 6\lambda^5 & 15\lambda^4 & 20\lambda^3 & 15\lambda^2 & 6\lambda & 1 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \lambda^7 & 7\lambda^6 & 21\lambda^5 & 35\lambda^4 & 35\lambda^3 & 21\lambda^2 & 7\lambda & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda^{n-1} & \cdot \cdots \cdots 1 \end{pmatrix}$$

细心观察上式可得下列结果： P 的第 i 行是将下列二项式展开而构成的

$$(\lambda + 1)^{i-1} \quad [i=1, 2, \dots, (n-1), n]$$

三、设 A 是一个 $n \times n$ 实数可控标准型矩阵，令其特征值为 $\lambda_k, k=1, 2, \dots, l$ ，它们的重复次数是 u_1, u_2, \dots, u_l ，用 J 表示相应于 A 的约旦的标准型矩阵，则实现相似变换的 $n \times n$ 非奇异矩阵 P 给出如下

$$P = [P_1 : P_2 : \cdots : P_l]$$

式中每个子矩阵 $P_k, k=1, 2, \dots, l$ ，是一个 $n \times u_k$ 矩阵， u_k 是特征值 λ_k 的重复次数。

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \lambda_k & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \lambda_k^2 & 2\lambda_k & 1 & 0 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \lambda_k^3 & 3\lambda_k^2 & 3\lambda_k & 1 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \lambda_k^4 & 4\lambda_k^3 & 6\lambda_k^2 & 4\lambda_k & 1 \cdots \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_k^{u_k-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdots \cdots 1 \\ \lambda_k^{u_k} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdots \cdots u_k \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_k^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdots \cdots \cdot \end{pmatrix}$$

例 2 例 1 中实现相似变换

$J = P^{-1}AP$ 的 6×6 矩阵 P 是

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 8 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 16 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 10 & 32 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{P_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{P_2} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{P_3}$

由于可控标准型 \mathbf{A} 与相应的约旦标准型 \mathbf{J} 之间的相似变换关系有显式方程 (21), 所以如果 (1) 式所示的系统的系数矩阵 \mathbf{A} 为可控标准型, 则求 \mathbf{P} 的程序很简单; 而实际系统中 \mathbf{A} 往往不是可控标准型, 但只要系统是可控的, 经相似变换把系统的系数矩阵变换为可控标准型 \mathbf{A}^1

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} \quad (21)'$$

其中 \mathbf{V} 为把 \mathbf{A} 变换为可控标准型 \mathbf{A}^1 的变换矩阵。

这样, 当我们求得 $e^{\mathbf{J}T}$ 及 $\int_0^T e^{\mathbf{J}(T-t)} dt$ 阵后, 如果 \mathbf{A} 不是可控标准型, 则先利用变换式 (21) 求得 $e^{\mathbf{A}^1 T}$ 及 $\int_0^T e^{\mathbf{A}^1(T-t)} dt$ 阵, 再以式 (21)' 中的 \mathbf{V} 为相似变换阵将 $e^{\mathbf{A}^1 T}$ 及 $\int_0^T e^{\mathbf{A}^1(T-t)} dt$ 阵变换为 $e^{\mathbf{A}T}$ 及 $\int_0^T e^{\mathbf{A}(T-t)} dt$ 阵。

方法二

依据 n 阶 \mathbf{A} 阵全部特征值求出 n 个各相独立的特征向量 (或广义特征向量) 组成变换阵 \mathbf{P} 。在程序编排中必须考虑到特征值的不同形式, 对于共轭复根, 后面专述, 这里不涉及, 这里只对实根, 特别是实重根进行讨论。

一、设 λ_i 为 \mathbf{A} 的单实特征值, 以特征矩阵 $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})$ 为系数矩阵作线性齐次方程组 $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{P}_i = 0$, 即

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \begin{pmatrix} P(1,i) \\ P(2,i) \\ \vdots \\ P(n,i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

由于 $\det(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, 所以方程 (23) 有非零解, 我们把方程组 (23) 的解所构成的解向量, 称为矩阵 \mathbf{A} 的属于特征值 λ_i 的特征向量。解方程 (23) 就可以得到对应 λ_i 的特征向量 \mathbf{P}_i 。

二、 λ_i 为 n 维实矩阵 \mathbf{A} 的实特征值, 其重数为 u_i , λ_i 所对应的约旦块 \mathbf{J}_i 为何种形式, 依 $\text{rank}(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})$ 而确定。下面讨论由广义特征向量构成的 $\mathbf{P}_i^{n \times u_i}$ 阵的求法。由于

$$\mathbf{P} \mathbf{J} = \mathbf{A} \mathbf{P}$$

且

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{J}_l \end{pmatrix} \quad (24)$$

则

$$[P_1 | P_2 | \dots | P_l] \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_l \end{pmatrix} = A[P_1 | P_2 | \dots | P_l] \quad (25)$$

即

$$[P_1 J_1 | P_2 J_2 | \dots | P_l J_l] = [AP_1 | AP_2 | \dots | AP_l] \quad (26)$$

所以有

$$P_K J_K = AP_K \quad (k=1, 2, \dots, l) \quad (26)'$$

由于 J_i 为 λ_i 重复次数为 u_i 所对应的约旦块, 与之对应的 $P_i^{n \times u_i}$ 阵如何求得呢? 考虑到 (26)' 式, 有

$$[P_{i,1} | P_{i,2} | \dots | P_{i,u_i}] J_i = A[P_{i,1} | P_{i,2} | \dots | P_{i,u_i}] \quad (28)$$

注意 J_i 如 (13) 式所示, 将 J_i 代入 (28) 式并比较方程式两边, 我们可以得到方程组

$$\begin{cases} (\lambda_i I - A) P_{i,1} = 0 \\ (\lambda_i I - A) P_{i,2} = 0 \\ \vdots \\ (\lambda_i I - A) P_{i,\alpha_i-1} = 0 \\ (\lambda_i I - A) P_{i,\alpha_i} = 0 \\ (\lambda_i I - A) P_{i,\alpha_i+1} = -P_{i,\alpha_i} \\ \vdots \\ (\lambda_i I - A) P_{i,u_i} = -P_{i,u_i-1} \end{cases} \quad (29)$$

上式中 $\alpha_i = n - \text{rank}(\lambda_i I - A) = u_i - n_i + 1$.

从齐次方程组解的理论可知: 具有 n 个未知量的线性齐次方程组的系数矩阵 $(\lambda_i I - A)$ 的秩为 $R (= \text{rank}(\lambda_i I - A))$; 则此齐次线性方程组有基础解系存在, 在基础解系中所含的解向量共有 $\alpha_i (= n - R)$ 个。所以式 (29) 中, $P_{i,j} (j=1, 2, \dots, \alpha_i)$ 向量是 A 阵属于特征值 λ_i 的特征向量系, 把它选为方程

$$(\lambda_i I - A) \xi_i = 0 \quad (30)$$

的基础解系, 共有 α_i 个向量。其余的 $P_{i,\alpha_i+1}, P_{i,\alpha_i+2}, \dots, P_{i,u_i}$ 向量, 由于 P_{i,α_i} 已确定, 可由式 (29) 后面的 $(u_i - \alpha_i)$ 个线性非齐次方程组成的方程组来确定。因为 P 是存在的, 上述方程组一定有解, 从而求得 A 阵的 u_i 次重特征值 λ_i 所对应的 u_i 个广义特征向量。

以上是求 λ_i 所对应的变换阵 P_i 各列向量的一般方法。这在理论上是完全正确的, 但在实际计算上, 计算量可能很大。这是因为当用方程式 (30) 求出其基础解系 $P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{i\alpha_i}$ 以后, 必须用递推公式

$$(A - \lambda_i I) P_{ij} = P_{i,j-1} \quad (31)$$

$$\alpha_i + 1 \leq j \leq u_i$$

逐个地求出 λ_i 所对应的各高级根向量 P_{ij} 。因而必须步步考虑非齐次方程 (31) 有解的充要条件。这就大大增加了计算量 (详见蒋尔雄等编“线性代数”, PP. 387—393)。

本文采用倒推的算法,使计算量减小很多。此算法是以下面的命题为依据的。

命题 设 f 是 N 维线性空间 V 中的线性变换,其秩为 $r(f)=r$, 零度为 $n(f)=N-r=n$ 。对 $\forall \xi \in V$, 如果有 $k \leq r+1$, 使得 $f^{k-1}(\xi) \neq 0$, 而 $f^k(\xi)=0$, 则向量 $\xi, f(\xi), f^2(\xi), \dots, f^{k-1}(\xi)$ 线性无关。并与核空间 $N(f)$ 中的任何向量, $\forall \eta \in N(f)$, 线性无关。当 $k=r+1$ 时, $\xi, f(\xi), f^2(\xi), \dots, f^{r-1}(\xi)$, 构成 $R(f)$ 的一组基; 与 $N(f)$ 的一组基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, 一起构成 V 的一组基。

证 设有 $c_0\xi + c_1f(\xi) + c_2f^2(\xi) + \dots + c_{k-1}f^{k-1}(\xi) = 0$, 用 f^{k-1} 作用于等式两端, 则有

$$c_0f^{k-1}(\xi) = 0$$

因为

$$f^{k-1}(\xi) \neq 0$$

所以

$$c_0 = 0$$

用 f^{k-2} 作用于等式两端, 则有

$$c_1f^{k-1}(\xi) = 0$$

故

$$c_1 = 0$$

依此类推, 有

$$c_2 = 0, \dots, c_{k-1} = 0$$

即

$$c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{k-1} = 0$$

说明 $\xi, f(\xi), f^2(\xi), \dots, f^{k-1}(\xi)$ 线性无关。又因

$$f^k(\xi) = 0, \text{ 即 } f(f^{k-1}(\xi)) = 0$$

$$f^{k-1}(\xi) \in N(f)$$

当 $k=r+1$ 时, $f^r(\xi) \neq 0$, 从而 $f^{r-1}(\xi) \in R(f)$, 所以, $\xi, f(\xi), \dots, f^{r-1}(\xi) \in R(f)$, 正好是 r 个线性无关的向量。因为

$$\dim R(f) = r(f) = r$$

所以 $\xi, f(\xi), f^2(\xi), \dots, f^{r-1}(\xi)$ 构成 $R(f)$ 的一组基。

设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \in N(f)$ 是 f 的核空间的一组基。假定 $f^l(\eta_j) = 0, 0 \leq l \leq k-2$, 与 $\eta_j, 1 \leq j \leq n$ 线性相关, 则必有

$$f^l(\xi) = \sum_{j=1}^n c_{jl}\eta_j \quad 0 \leq l \leq k-2$$

c_{jl} 不全为零。用 f 作用于等式两端, 有

$$f^{l+1}(\xi) = \sum_{j=1}^n c_{jl}f(\eta_j) = 0 \quad 0 \leq l \leq k-2$$

从而推得:

$$f^{k-1}(\xi) = 0$$

与 $f^{k-1}(\xi) \neq 0$ 相矛盾, 所以, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \xi, f(\xi), f^2(\xi), \dots, f^{k-2}(\xi)$ 线性无关。

当 $k=r+1$ 时, 上述 N 个列向量正好构成 V 的一组基。

证毕。

根据上述命题, 把矩阵 $(A - \lambda_i I)$ 看成线性变换 f 的矩阵表示。考虑 (13) 式所示之约旦块 J_i , 显然有

$$\text{rank}(A - \lambda_i I) = r$$

其零度

$$\begin{aligned} n((A - \lambda_i I)) &= \alpha_i \\ \alpha_i &= \dim(\mathbf{V}) - r = u_i - n_i + 1 \end{aligned}$$

由 (29) 式知:

$$(A - \lambda_i I)^{n_i} P_i u_i = 0$$

因为

$$\det((A - \lambda_i I)^{n_i}) = 0$$

所以

$$P_i u_i \text{ 一定存在且 } P_i u_i \neq 0$$

我们任取方程

$$(A - \lambda_i I)^{n_i} \xi = 0$$

的一个非零解, 作为 $P_i u_i$, 再利用递推公式 (31) 从 $j = u_i$ 开始一直倒推到 $j = \alpha_i + 1$, 逐次算出:

$$P_i u_i, P_i u_{i-1}, \dots, P_i \alpha_{i+1}, P_i \alpha_i$$

由上述命题知, 这 n_i 个列向量是线性独立的。并且

$$P_i \alpha_i \in N(A - \lambda_i I)$$

$$P_i u_i, P_i u_{i-1}, \dots, P_i \alpha_{i+1} \in R(A - \lambda_i I)$$

再考虑齐次方程(30)

$$(A - \lambda_i I) \xi = 0$$

因为 $\text{rank}(A - \lambda_i I) = r$, 所以必有 r 阶子式 $|B_r| \neq 0$, 于是齐次方程(30)可写成

$$(B_r \mid C_{n-r}) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = 0$$

$$B_r \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_r \end{pmatrix} + C_{n-r} \begin{pmatrix} \eta_{r+1} \\ \eta_{r+2} \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_r \end{pmatrix} = -B_r^{-1} C_{n-r} \begin{pmatrix} \eta_{r+1} \\ \eta_{r+2} \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

得解:

$$\xi = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_r \\ \eta_{r+1} \\ \eta_{r+2} \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_r C_{n-r} \begin{pmatrix} \eta_{r+1} \\ \eta_{r+2} \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \\ \eta_{r+1} \\ \eta_{r+2} \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

显然方程(30)的齐次解含有 $n-r=\alpha_i$ 个自由常数。

令 $\xi = P_i \alpha_i$ ($P_i \alpha_i$ 已被递推出) 来确定 $\eta_{r+1}, \eta_{r+2}, \dots, \eta_n$, 进而求出 α_i 个线性无关解: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\alpha_i} = P_i \alpha_i$ 。

从上述命题可知, $\xi_l (1 \leq l \leq \alpha_i)$ 与 $P_{ij} (\alpha_i + 1 \leq j \leq u_i)$ 是线性无关的。命 $\xi_l = P_{il} (1 \leq l \leq \alpha_i)$

则 $P_i = (P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{iu_i})$

即为所求。它满足 $AP_i = P_i J_i$

这里的 J_i 即为 (13) 式所示之约旦块。

4. 避免复数运算

为了推导过程方便, 设 n 维方阵 A 仅有一对共轭复根为: $\lambda_1 = \sigma_1 + j\omega_1, \lambda_2 = \sigma_1 - j\omega_1$ 其余为单实根 $\lambda_i (i=3, \dots, n)$ 。如果把约旦阵作成如下形式

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (35)$$

由于 λ_1, λ_2 是复数, 实现相似变换 $J = P^{-1}AP$ 的变换阵 P 对应的列为复数, e^{Jt} 及 $\int_0^t e^{J(t-\tau)} d\tau$ 阵的相应元素亦为复数, 这就引入了复杂的复数运算。为了避免复数运算, 我们把第 i 对共轭复根对应的约旦块改作为

$$J_i = \begin{bmatrix} \sigma_i & \omega_i \\ -\omega_i & \sigma_i \end{bmatrix}$$

其中 σ_i 为共轭复根的实部, ω_i 为共轭复根的虚部。则 (35) 式可简写为

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

根据前述

$$J_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \sigma_1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

下面叙述 P_1 的求法:

令

$$P_1 = [X \ Y]$$

根据 (36) 式及 $P_1 J_1 = A P_1$ 关系式得

$$[X \ Y] \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \sigma_1 \end{bmatrix} = A [X \ Y] \quad (37)$$

从上式得:

$$\begin{cases} (\sigma_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \omega_1 \mathbf{I}\mathbf{Y} \\ (\sigma_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{Y} = -\omega_1 \mathbf{I}\mathbf{X} \end{cases} \quad \begin{matrix} (39) \\ (40) \end{matrix}$$

从(39)式得

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\omega_1} [\sigma_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X} \quad (41)$$

将(41)代入(40)式整理得

$$[(\sigma_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})^2 + \omega_1^2 \mathbf{I}]\mathbf{X} = 0 \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \text{因} \quad [(\sigma_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})^2 + \omega_1^2 \mathbf{I}] &= [(\mathbf{A} - \sigma_1 \mathbf{I}) - j\mathbf{I}\omega_1][(\mathbf{A} - \sigma_1 \mathbf{I}) + j\mathbf{I}\omega_1] \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_1)(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_2) \end{aligned}$$

$$\text{又因} \quad \det[(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_1)(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_2)] = 0$$

$$\text{故} \quad \det[(\sigma_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})^2 + \omega_1^2 \mathbf{I}] = 0$$

所以从(42)式可以得到 \mathbf{X} 的非零解,利用(41)式可以求得 \mathbf{Y} ,则 \mathbf{P}_1 已求得。

例 3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

其特征值为

$$\lambda_1 = 1 + j2, \lambda_2 = 1 - j2, \lambda_3 = 1$$

$$(\sigma \mathbf{I} - \mathbf{A})^2 + \omega^2 \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = 0 \quad (43)$$

解(43)式得

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \mathbf{Y} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \\ \therefore \mathbf{P}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 5/2 \\ -5 & 5/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

可以验证此结果是正确的。

下面简单介绍对应 $\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \sigma_i & \omega_i \\ -\omega_i & \sigma_i \end{bmatrix}$ 的 $\Phi_i(T)$ 及 $\Phi_{m_i}(T)$ 的求法

$$\begin{aligned}\Phi_i(t) &= e^{J_i t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{J}_i)^{-1}] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - \sigma_i)^2 + \omega_i^2} \begin{bmatrix} s - \sigma_i & \omega_i \\ -\omega_i & s - \sigma_i \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\sigma_i t} \cos \omega_i t & e^{\sigma_i t} \sin \omega_i t \\ -e^{\sigma_i t} \sin \omega_i t & e^{\sigma_i t} \cos \omega_i t \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\Phi_i(T) = \Phi_i(t) \Big|_{t=T}$$

$$\text{令 } \Phi_{mi}(T) = \begin{bmatrix} Q_i(1, 1) & Q_i(1, 2) \\ Q_i(2, 1) & Q_i(2, 2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Q_i(1, 1) = \frac{\sigma_i}{\omega_i^2 + \sigma_i^2} \left[e^{\sigma_i T} \left(\cos \omega_i T + \frac{\omega_i}{\sigma_i} \sin \omega_i T \right) - 1 \right] \\ Q_i(1, 2) = \frac{\omega_i}{\omega_i^2 + \sigma_i^2} \left[1 + \left(\frac{\sigma_i}{\omega_i} \sin \omega_i T - \cos \omega_i T \right) \right] \\ Q_i(2, 2) = Q_i(1, 1) \\ Q_i(2, 1) = -Q_i(1, 2) \end{cases}$$

§3 系统模拟

§3-1 线性系统的模拟

一、在对系统进行模拟时，为了使数字模拟的结果与模拟机上进行模拟的结果有对应关系，我们先作出系统的模拟结构图。此模拟结构图各运算器的传递系数按间比例尺取1，所有变量的幅度比例尺取得相等进行标注。将此结构图输入给计算机得出状态方程，而后进行求解。

例如给定系统为图1(a)所示，作出按上述规定的模拟结构图，如图1(b)所示，积分器实现典型环节 $\frac{1}{s}$ 的模拟。积分器及其他运算器的传递系数置于典型环节间的连接矩阵中（此时的连接矩阵就是状态方程的系数矩阵）。

图1(b)中以积分器输出为状态变量，则可写出状态方程。令积分器输出为 $x_i (i=1, 2, 3)$ ，其输入为 $V_i (i=1, 2, 3)$ ，则

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = V_1 \\ \dot{X}_2 = V_2 \\ \dot{X}_3 = V_3 \end{cases} \quad (44)$$

而

$$\begin{cases} V_1 = -59X_1 - 1.239X_3 + 59V_0 \\ V_2 = 44.441X_1 - 0.0901X_2 \\ V_3 = 98.02X_1 + 14.5X_2 - 0.667X_3 \end{cases} \quad (45)$$

将 (45) 代入 (44) 式并写成向量的形式为:

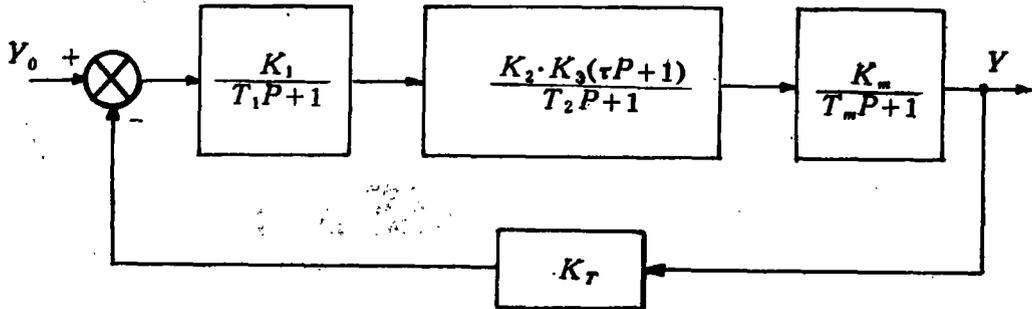
$$\dot{X} = AX + BY \quad (46)$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -59 & 0 & -1.239 \\ 44.441 & -0.0901 & 0 \\ 98.02 & 14.5 & -0.667 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 59 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

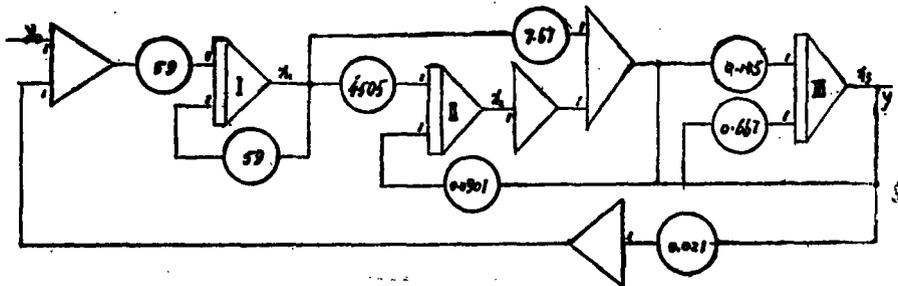
系统输出方程为

$$Y = CX \quad \text{其中 } C = [0 \ 0 \ 1] \quad (47)$$



$T_1 = 0.017$ (秒), $K_1 = 1$ (伏/伏), $K_2 = 10$ (伏/伏), $\tau = 0.15$ (秒),
 $T_2 = 11.1$ (秒), $K_T = 0.021$ (伏/转/分), $K_3 = 50$ (伏/伏),
 $K_m = 21.8$ (转/分/伏), $T_m = 1.5$ (秒), $Y_0 = 10$ (伏)

(a)



(b)
图 1

二、(46)式为系统状态方程, 利用第二节中给出的算法可以求出该系统离散状态方程的系数矩阵 $\Phi(T)$, $\Phi_m(T)$, 然后根据式 (8) 及输出方程 (47) 可以对系统进行动态模拟。

§ 3-2 非线性系统的模拟

设给定系统如图 2 所示

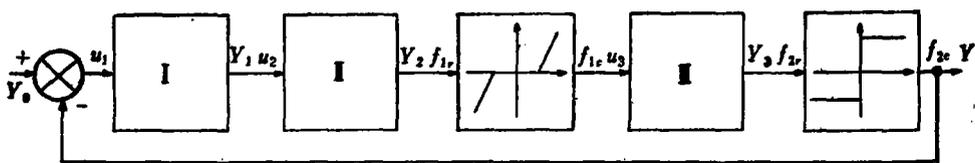


图 2

图中标有 I、II、III 字样的为物理可实现的线性定常系统，其中 I 为系统待定参数的校正部分。其余两个为非线性环节。

对于一个给定的系统适当地进行分块，有利于该数字模拟方法精度与速度的一致，分块原则是：

(一) 将待定参数的校正部分独立为一个子系统，因系统校正部分的参数往往要通过模拟来选定，每选一组参数，要求计算一次该子系统离散化状态方程的系数矩阵 $\Phi(T)$ 、 $\Phi_m(T)$ ，这样作有利于减小机器的工作量。

(二) 将非线性环节“孤立”出来。

对系统进行适当分块以后，在每个子系统前加一个虚拟的采样器及保持器。子系统仍然按模拟结构图输入给计算机，计算机分别求出各子系统离散状态方程的系数阵 $\Phi_i(T)$ 及 $\Phi_{mi}(T)$ 。

子系统的输出方程也已知，如果各子系统间的连接关系知道，就能对系统进行模拟计算。下面介绍子系统间的连接关系。

图 2 中，I、II、III 这三个线性定常子系统，其输入用 u_i 表示，输出用 y_i 表示。其余两个非线性环节，输入用 f_{1r} 表示，输出用 f_{1c} 表示。各子系统之间的连接，由连接矩阵给出，在写连接矩阵时不考虑非线性环节的存在。现写出图 2 所示系统的连接矩阵：

$$\begin{cases} u_1 = y_0 - y_3 \\ u_2 = y_1 \\ u_3 = y_2 \end{cases}$$

将其写成矩阵形式为

$$U = WY + W_0Y_0$$

其中

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

W 为连接矩阵，表示各子系统之间的连接关系； W_0 表示干扰与各子系统之间的连接关系。

当考虑到非线性环节时，上述连接矩阵不变，只是在算出 $u_2 = y_2$ 后，应将 u_2 看作是 f_{1r} ，然后通过 F_1 求出 f_{1c} ，再令 $u_2 = f_{1c}$ 即可。同样算出 y_3 后，将 y_3 看作 f_{2r} ，然后通过 F_2 求出 f_{2c} ，再令 $y_3 = f_{2c}$ ，用此 y_3 去求 u_1 （即 $u_1 = y_0 - y_3$ ）。

求出了每个子系统的 $\Phi_i(T)$ 、 $\Phi_{mi}(T)$ ，给出子系统之间的连接关系和每个子系统的输入或输出端存在非线性环节的特性曲线，根据 (8) 式和各个子系统的输出方程就可求出系统在干扰作用下各变量变化的情况，实现非线性系统的数字模拟。

结 束 语

本文论述的数字仿真方法,在求离散状态方程的 $\Phi(T)$ 、 $\Phi_m(T)$ 阵所采用的解析法中,有两点要进一步讨论:

1. 用双步 QR 法求任意实数矩阵 A 的特征值时,对于重特征值的求得,在程序中待采取措施。
2. 在有重复特征值的情况下,在程序中为避免复数运算,算法上有待进一步研究。

参 考 文 献

- [1] 冯康等编著,数值计算方法,国防工业出版社,1978年。
- [2] 杨篪引、马正午、孙宇等编,电子计算机应用数学,冶金工业出版社,1979年。
- [3] 熊光楞编,控制系统的数字仿真,清华大学自动化系,1980年。
- [4] 绪方胜彦著,卢伯英等译,现代控制工程,科学出版社,1976年。
- [5] 须田信英、野玉慎三,池田雅夫著,曹长修译,自动控制中的矩阵理论,科学出版社,1979年。
- [6] Thomas E. Fortman, Konrad L. Hitz, An Introduction to Linear Control Systems, Marcel Dekker, Inc., 1977年。
- [7] Chi-Tsong Chen, Introduction to linear System Theory, 上海交通大学翻印。

Digital Simulation Method on Basis of e^{At}

Huang Ke-di

Abstract

The digital simulation method on basis of e^{At} presented in this paper consists in treating various continuous, linear, constant parts of the system simulated as subsystems which are described by systems of discrete state equations. Then, these subsystems and various non-linear or time-varying parts are interconnected and thus digital simulation of the whole system is implemented. This method of simulation possesses the merits of fast computing rate, high accuracy and versatility.

The main point described in this paper is concerning the computation of the coefficient matrixes of the subsystems using analytic method which has the merit in the amount of computation and accuracy of simulation independent of the step size chosen with the (somewhat laboursome) program.