

解结构特征值的子结构 子空间综合迭代法

张 仁 述

提 要 本文论证了由结构系统的各子结构在子空间的迭代综合,从而导出系统的子空间特征方程的迭代方法。由此方法我们便可求出大型结构的若干低阶模态。这方法只需在计算机里贮存结构的各子结构的质量矩阵和刚度矩阵,便可按预定精度,简便有效地求解大型结构的特征值问题。

一、引 言

目前,在解大型结构的特征值时,国内外许多研究者常采用子结构模态综合法^{[1][2][3]}。在这类方法中,首先要计算子结构的模态(按各种边界条件)。然后利用各子结构的若干低阶模态,用按各种方式定义的模态变换来近似表示结构的模态,并考虑到子结构间的相容性和平衡条件,导出简化的结构特征方程,从而求得结构的若干低阶模态的近似解。这是一般所谓子结构模态代换的方法。

本文不采用子结构模态代换的概念,而直接由结构的各子结构方程进行子空间迭代。并由各子结构的质量、刚度矩阵的子空间投影矩阵分别综合,而得结构的子空间特征方程,进行迭代计算的方法。这方法,只需要在计算机中贮存各子结构的质量、刚度矩阵。它不仅占用计算机的内存少,其程序也很简单;而且可按预定精度有效地计算结构自由振动的若干低阶频率和振型。

文献[4]于1980年曾介绍过在子空间迭代法中部分地利用子结构的数值方法,但其未能完全利用子结构于整个迭代过程。就一定意义而言,本文的方法可谓文献[4]方法的进一步发展。

二、子空间迭代法的简要回顾

结构的自由振动特征方程为

$$[K][X]=[M][X][A] \quad (1)$$

式中 $[K]$ 、 $[M]$ 分别为 n 自由度离散化结构的 n 阶刚度、质量矩阵, $[A]$ 为以特征值 $\omega_i^2 (i=1, 2, \dots, n)$ 为对角线元素的 n 阶对角矩阵。当 n 不很大时,解方程(1)的广义特征

值问题,可用子空间迭代法有效地求其若干低阶特征值的近似值。

子空间迭代法的实质是同时对一组初始试探向量,反复地使用李芝法和逆迭代之过程^[5],这是一般所知的。若由计算机按一定规则自动形成 p 个 n 维线性无关的初向量 $[X_0]$ (为保证精度,若需求前 q 阶模态,一般取 $p=2q$ 或 $q+8$),便可按以下公式循环迭代:

$$[Y_0] = [M][X_0] \quad (2)$$

$$[K][\bar{X}_1] = [Y_0] \quad (3)$$

$$[\bar{Y}_1] = [M][\bar{X}_1] \quad (4)$$

$$[K_1^*] = [\bar{X}_1]^T [Y_0] \quad (5)$$

$$[M_1^*] = [\bar{X}_1]^T [\bar{Y}_1] \quad (6)$$

$$[K_1^*][Q_1] = [M_1^*][Q_1][A_1] \quad (7)$$

解方程(7)得 $\omega_{1i}^2 (i=1,2,\dots,p)$ 和 $[Q_1]_{(p \times p)}$ 。然后校核前 q 个 $\omega_{1i}^2 (i=1,2,\dots,q)$ 是否收敛。若否,则修正向量为

$$[Y_1] = [\bar{Y}_1][Q_1] \quad (8)$$

以 $[Y_1]$ 代替(3)式中之 $[Y_0]$ 作进一步迭代计算,如此循环直到 k 次迭代,所求诸特征值收敛为止。于是得特征值: $\omega_i^2 \approx \omega_{ki}^2 (i=1,2,\dots,q)$

$$[X_k] = [\bar{X}_k][Q_k] \quad (9)$$

特征向量: $[X] \approx [X_k]$ (取前 q 列 n 维向量)。

三、子结构子空间综合迭代法

当自由度 n 过大时,应用子空间迭代法,则是不适宜的。然而采用子结构子空间迭代过程,可以达到解大型结构特征值的目的。

首先,将方程(1)所描述的结构分割成 L 个子结构,其中第 r 个子结构的方程为

$$[k^r][X^r] = [m^r][\dot{X}^r] + [f^r] \quad (10)$$

($r=1,2,\dots,L$)

式中 $[k^r]$ 、 $[m^r]$ 分别为第 r 个子结构的 n_r 阶刚度、质量矩阵 (式中诸量均以结构坐标系而言)。

现给出一组 p 个 n_r 维初向量 $[X_0^r]$ 就方程(10)进行一次逆迭代。且每个子结构的初向量均取为 p 个。令

$$[Y_0^r] = [m^r][X_0^r] \quad (11)$$

$$[k^r][\bar{X}_1^r] = [Y_0^r] + [f_0^r] \quad (12a)$$

将方程(12a)按子结构的界面自由度 (j) 与非界面自由度 (i) 分割,并注意到 $[f_0^r]$ 仅界面力。于是有

$$\begin{pmatrix} [k_{ii}^r] & [k_{ij}^r] \\ [k_{ji}^r] & [k_{jj}^r] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\bar{X}_{1i}^r] \\ [\bar{X}_{1j}^r] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [Y_{0i}^r] \\ [Y_{0j}^r] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [0] \\ [f_{0j}^r] \end{pmatrix} \quad (12b)$$

由方程(12b)的第一式得

$$[k_{ij}][\bar{X}_{1i}] = [Y_{0i}] - [k_{ij}][\bar{X}_{1i}] \quad (13)$$

将式(13)代入方程(12b)的第二式消去 $[\bar{X}_{1i}]$ 后得

$$[k_{ij}][\bar{X}_{1i}] = [R_{0i}] \quad (14)$$

式中

$$[k_{ij}] = [k_{ij}'] + [k_{ij}'] [G_r] \quad (15)$$

$$[G_r] = -[k_{ij}']^{-1} [k_{ij}'] \quad (16)$$

$$[R_{0i}] = [Y_{0i}] + [f_{0i}] + [G_r]^T [Y_{0i}] \quad (17)$$

(以上 r 均为 $r=1, 2, \dots, L$.)

现以 $[X_j]$ 表示结构在各子结构界面处对应的坐标,而 $[X_r]$ 表示第 r 个子结构的界面坐标,这二者之间的关系可写成矩阵形式 $[X_r] = [a_r][X_j]$,这里 $[a_r]$ 是一长方形矩阵,常称 Boolean 变换矩阵。显然, $[a_r]$ 与 $[X_r]$ 之行数相等,而其列数与 $[X_j]$ 之行数一致。 $[a_r]$ 的每行只有一元素为 1 之外而其余均为零,而为 1 之元素的位置可由具体结构以满足上述变换关系式而定。于是将各子结构的界面坐标的伪静力方程(14)综合,得结构的界面坐标的伪静力方程

$$[K_j][\bar{X}_{1j}] = [R_{0j}] \quad (18)$$

$$[K_j] = \sum_{r=1}^L [a_r]^T [k_{ij}'] [a_r] \quad (19)$$

$$[R_{0j}] = \sum_{r=1}^L [a_r]^T [Y_{0i}] + \sum_{r=1}^L [a_r]^T [G_r]^T [Y_{0i}] \quad (20)$$

注意 $\sum_{r=1}^L [a_r]^T [f_{0i}] = 0$, $[K_j]$ 为结构界面坐标对应的刚度矩阵。解方程(18)得 $[\bar{X}_{1j}]$, 从而可得 $[\bar{X}_{1i}]$ 。再由方程(13)求得 $[\bar{X}_{1i}]$ 。于是得出 $[\bar{X}_1]$ 。($r=1, 2, \dots, L$)

下面可由各子结构的刚度、质量的子空间投影矩阵,分别综合而得结构的刚度、质量在同一子空间的投影矩阵 $[K_1^*]$ 、 $[M_1^*]$ 。

由 $[X^*] = [\beta_r][X]$, 这里 $[X^*]$ 为第 r 个子结构坐标的 p 个 n_r 维向量, $[X]$ 为结构坐标的 p 个 n 维向量, $[\beta_r]$ 即波尔变换矩阵。第 r 个子结构的刚度的子空间投影矩阵为

$$[k_r^*] = [\bar{X}_1]^T [Y_{0i}] \quad (r=1, 2, \dots, L)$$

而由(12a)式 $[Y_{0i}] = [k_r][\bar{X}_1] - [f_{0i}] = [k_r][\beta_r][\bar{X}_1] - [f_{0i}]$ 于是将各子结构的子空间投影矩阵综合便有

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^L [k_r^*] &= \sum_{r=1}^L [\bar{X}_1]^T [Y_{0i}] \\ &= [\bar{X}_1]^T \sum_{r=1}^L [\beta_r]^T [k_r] [\beta_r] [\bar{X}_1] - [\bar{X}_1]^T \sum_{r=1}^L [\beta_r]^T [f_{0i}] \\ &= [\bar{X}_1]^T [K] [\bar{X}_1] = [K_1^*] \end{aligned}$$

这里 $\sum_{r=1}^L [\beta_r]^T [f_{0i}] = 0$, $[K_1^*]$ 为结构刚度的子空间投影矩阵。于是得

$$[K_1^*] = \sum_{r=1}^L [k_r^*] = \sum_{r=1}^L [\bar{X}_1]^T [Y_{0i}] \quad (21)$$

而以 $[M_i^*]$ 表示结构质量的子空间投影矩阵, 第 r 个子结构质量的投影矩阵 $[m_r^*] = [\bar{X}_i]^T [\bar{Y}_i]$, 其中

$$[\bar{Y}_i] = [m_r^*] [\bar{X}_i] \quad (22)$$

同样可得

$$[M_i^*] = \sum_{r=1}^L [m_r^*] = \sum_{r=1}^L [\bar{X}_i]^T [\bar{Y}_i] \quad (23)$$

由此可知结构的质量、刚度的子空间投影矩阵分别等于各子结构的质量、刚度在同一子空间的投影矩阵之和。

从而由方程(7)解出 $[Q_i]$, 则以 $[\bar{Y}_i] = [\bar{Y}_i][Q_i]$ 代替 $[Y_0]$ 进一步迭代综合, 直到 k 次迭代结束为止。最后, 结构振动中, 对应各子结构的振型为

$$[X^r] \approx [X_k^r] = [\bar{X}_k^r][Q_k^r] (r=1, 2, \dots, L), \text{ (仅取前 } q \text{ 列)}.$$

$[X]$ 可由各个 $[X^r]$ 重排而得。而结构的固有频率 $\omega_i \approx \omega_{ki} (i=1, 2, \dots, q)$ 。

四、计 算 步 骤

以上所述子结构子空间综合迭代计算的步骤可归纳如下:

1. 计算结构的各子结构的质量、刚度矩阵: $[m^r]$ 、 $[k^r]$ 。

2. 给出各子结构的初向量组 $[X_0]$ 或 $[Y_0]$, 并分割 $[Y_0] = \begin{Bmatrix} [Y_{0i}] \\ \vdots \\ [Y_{0j}] \end{Bmatrix}$ 。它们可由计

算机按一定规则自动形成。^[5]

3. 由式(16)计算 $[G_r]$ (可用解方程组方式)。然后由式(15)和式(19)计算与结构界面坐标对应的刚度矩阵 $[K_i]$ 。

4. 解方程组(18)得 $[\bar{X}_{1j}]$ (其中 $[R_{0j}]$ 由式(20)计算之), 并得 $[\bar{X}_{1j}] = [\alpha_r][\bar{X}_{1j}]$ 。

5. 解方程组(13)得 $[\bar{X}_{1i}]$, 从而得 $[\bar{X}_i]$ 。

6. 由公式(21)、(22)、(23)分别计算结构的质量、刚度的子空间投影矩阵 $[M_i^*]$ 、 $[K_i^*]$ 。(以上 $r=1, 2, \dots, L$)

7. 解结构的子空间特征方程(7)。

8. 校核特征值的收敛性。若 $|\omega_{1i}^2 - \omega_{0i}^2| / |\omega_{1i}^2|$ 在允许范围内, 则停止迭代计算, 否则, 以 $[Y_i] = [\bar{Y}_i][Q_i]$ 代替 $[Y_0]$ 转入第4步循环迭代计算之。若于 k 次迭代后收敛了, 则结果: $[X_k^r] = [\bar{X}_k^r][Q_k^r] (r=1, 2, \dots, L)$, 取其前 q 列即所求各子结构振型向量组的近似值。结构相应的频率即 $\omega_i = \omega_{ki} (i=1, 2, \dots, q)$ 。

以上计算, 主要是在子结构中进行低阶矩阵的代数运算和解较低元的线性代数方程组。其计算量较小, 程序也很简单。故子结构子空间综合迭代法, 是解大型结构特征值问题的一个十分简便的数值解法。其迭代收敛之快慢与各子结构初向量的选取有关, 这里可采用文献[5]中现有的程序。

五、数值计算例题

为考察这种方法的有效性,以匀质悬臂梁为例,编程序进行数值计算。其中子空间特征值采用两次雅可比法解。原始数据:梁长 $L=450\text{cm}$,直径 $D=10\text{cm}$;弹性模量 $E=7\times 10^8\text{g/cm}^2$,单位体积的重量 $\gamma=2.8\text{g/cm}^3$ 。全梁分成九个等长度单元,单元长 $l=50\text{cm}$ 。将梁分为两个子结构,第一子结构四个单元(自由——自由),第二子结构五个单元(自由——固定)。仅考虑梁的平面弯曲振动,其中取 $p=5$, $q=3$,收敛精度为 10^{-6} 。其频率的计算结果如下表:

阶 数	1	2	3
精 确 解	3.4193Hz	21.4297Hz	60.010Hz
本 文	3.4701Hz	21.7572Hz	60.9653Hz

振型的计算结果和计算程序见文献[6]。计算结果表明本文的方法是有效的。这方法并未引入假定条件,其结果一般应与直接的子空间迭代法的精度基本上相同。但本例计算中,解线性方程组时采用了列主元高斯消去法程序,该程序精度较低,则其计算结果的前三阶频率与精确解比较,相对误差达百分之一点五。本法在迭代运算中,其线性方程组的系数变化大,若精度要求高时,以采用全主元高斯消去法程序为宜。

参 考 文 献

- [1] Craig, R. R. Jr., "Methods of Component Mode Synthesis", The Shock and Vibration Digest, vol. 9, No. 11 (1977).
- [2] Rubin, S., "Improved Component-mode Representation for Structure Dynamic Analysis", AIAA J., vol. 13 (1975).
- [3] 王文亮、杜作润、陈康元, "模态综合技术短评和一种新改进", 航空学报 (1979, 3).
- [4] J. S. Arora and D. T. Ngugen, "Eigensolution for Large Structural Systems with Substructures", Int. J. Num. meth. Engng. vol. 15, No. 3 (1980).
- [5] K. J. Bathe, E. L. Wilson, "Numerical Methods in Finite Element Analysis".
- [6] 国防科技大学 106 教研室科技资料字: 82—002 号。

The Synthetic Iteration of the Substructures in the Subspace for Solving the Eigenvalues of the Structure

Zhang Ren-shu

Abstract

The iteration synthesis of substructures of the structural system in subspace is described and the iteration of the characteristic equation of the system in the subspace is derived. Therefore, a number of the low-order modes of the large structure can be found. According to this method only the mass matrix and stiffness matrix of every substructure of the structure must be stored in the computer. According to the preselective accuracy it is possible to solve the problem of the eigenvalue of the large structure simply and effectively.