铁电体斜交式爆—电换能器的理论分析

于　万　瑞

提　要　本文叙述了斜交式爆——电换能器的基本原理；导出了求解方程；并对几个问题做了讨论。

一、引　　言

所谓爆——电换能器，是指在炸药的爆炸冲击作用下，极化的铁电陶瓷释放出电荷，并向外电路中提供电流或电压的装置。它可以做为脉冲电流源或脉冲电压源的初级能源。

目前，就已经掌握的知识看，陶瓷鋯鈦酸铅($PbZrO_3+PbTiO_3$)在鋯鈦比是 95/5时，，具有优良的机电特性。通常将其写为 95/5 的PZT.

一般说来，沒有极化的铁电陶瓷对冲击波不呈现电响应。假如在 95/5 的 PZT 陶瓷上装上电极并加上强电場，则其原始电畴的取向会转向电場方向。撤去电場后，剩余极化强度 P_0 大于零，样品垂直 P_0 方向的外表面上聚集着束缚着的电荷。这样的样品中贮存着能量，其能量密度为

$$W=\frac{P_0^2}{2\in}$$

其中 $\in$ 为极化的铁电体陶瓷静态介电常数。此时，PZT 为铁电相。

在已极化的 PZT 电极处外接负载时，以脉冲式冲击力作用于 PZT 样品，使样品在微秒量级的时间內去极化，发生相变，由铁电相又变到原始状态，同时，释放预先因极化而附在电极上的电荷，产生强的电流脉冲（低阻抗负载时）或电压脉冲（高阻抗负载时），放出能量。由于负载反作用于样品，产生阻止去极化过程的电場，因而冲击波作功。显然，炸药爆炸作用是促使已贮于 PZT 中的能量释放的手段。

根据在材料中运动的冲击波方向与初始剩余极化方向的不同，爆—电换能器有轴向模式、正交模式和斜交模式之分。所谓轴向模式，是指冲击波运动方向与初始剩余极化方向平行（反向）。而正交模式，是指冲击波运动方向垂直于初始剩余极化方向。至于斜交模式，则是指冲击波运动方向与初始剩余极化方向成某一角度。由于这种模式可期望把铁电材料做成较好的工作形状，提高输出效率，改善输出特性，因此它具有实用的意义。

本文1982年11月4日收到

极化的铁电体材料在冲击力作用下的电响应和力学响应是很复杂的。直到目前，还有不少特性、现象沒有被满意地解释和处理。但由于采用这种能源具有体积小、重量轻等优点，因此对它的研究正不断深入。

在以下的研究中，假定：

1. 冲击波强度适中，能使波后材料完全去极化，沒有漏电和击穿现象。

2. 在材料中，冲击力維持一段时间，使相变弛豫过程完成。同时，沒有重新极化的现象发生。

3. 冲击波前后的材料都是均匀的，不计及冲击波的压缩效应。冲击波是稳定的。

4. 非铁电相时，材料內的电位移与电場强度成线性关系；铁电相时，为非线性关系。

5. 负载L、R、C为集中参量，且不随时间变化。

根据需要的不同，外电路中的负载可有纯电感，纯电阻、短路（低阻抗负载情况）及开路（高阻抗负载情况）之分。在这里，我们视负载为串联的L、R、C. 铁电体陶瓷的形状为圆环柱状，中心放置炸药柱。圆环柱的两个截面上装有电极，外接负载，如图1所示。

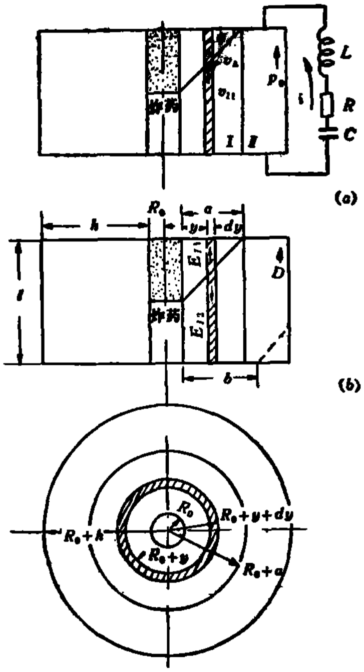

图 1 斜交式爆一电换能器计算用图

二、基 本 方 程

理论研究爆一电换能问题，就是要弄清楚爆一电换能时各量之间的关系。在这里，我们在前述假设的条件下，研究电路中电学参量的变化规律，主要是电流随时间的变化规律。

1. 电学状态方程

研究去极化释能，需要掌握去极化前后陶瓷材料的$D\sim E$关系，即电学状态方程。由假设知，在已去极化的非铁电相材料中，$D\sim E$呈线性关系，未去极化的铁电相材料中，它们呈非线性关系，写成关系式为：

非铁电相，

$$D_1=\in E_1 \tag{1}$$

其中$\in$是已去极化材料的介电常数。

铁电相，

$$\left(\frac{D_2}{P_0}\right)^n\mp\left(\pm\frac{E_2}{E_c}\right)^n=1 \tag{2}$$

其中n为非线性指数，P_0为初始剩余极化强度，E_c为矫顽場强。圆括号中，当$E_2>0$时取"+"号；当$E_2\leqslant 0$时取"-"号。对正交模式，E_2可正可负，故"±"号都有选用的可能。对轴向模式，取$E_2\leqslant 0$，故只用"-"号，它们在电滞迴线上的工作范围如图2.

在两种模式中，$-E_c\leqslant E_2\leqslant E_c$.应该指出，在电感负载下，$E_2\leqslant -E_c$的情况也可出现，此时可不限定$E_2$的取值范围。

在(2)式中，当$n\geqslant 2$时，$D\sim E$关系基本上能反映出极化的铁电体材料的电滞迴线关系。

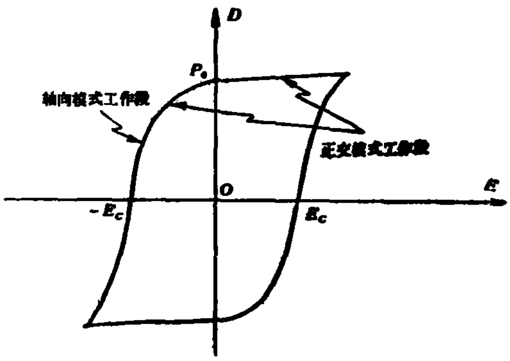

图 2 正交、轴向模式在电滞迴线上的工作段

2. 电路方程

对斜交式爆—电换能器，由于陶瓷内冲击波运动方向与初始剩余极化方向成某一角度，因此，它比正交模式和轴向模式复杂。但后两种模式仍可做为讨论的基础。

(1) 正交模式

图1中，设$t=0$时刻全部炸药瞬时爆炸，则在$t>0$时，陶瓷中的冲击波运动方向垂直于初始剩余极化方向。令$v_\perp$表示陶瓷中冲击波速度的大小，则电路方程如下：

$$lE+L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}(q-q_0)=0 \tag{3}$$

其中

$$q=\pi v_\perp t(2R_0+v_\perp t)D_1+[2\pi R_0(h-v_\perp t)+\pi(h^2-v_\perp^2t^2)]D_2 \tag{4}$$

这里，区域Ⅰ和Ⅱ的对应电极面上的电位相同，故

$$E_{\text{I}}=E_{\text{II}}=E \tag{5}$$

在公式中，l、h分别为陶瓷圆环柱的轴向厚度和径向厚度；R_0为炸药柱的半径；D_1、D_2分别为区域Ⅰ、Ⅱ的电位移；E_{I}、E_{II}分别为区域Ⅰ、Ⅱ中的电場强度；q_0为初始总电量。

(2) 轴向模式

如果图1中，在$t=0$时冲击波开始沿轴向由上向下传播，冲击波阵面复盖着圆环柱的横截面。这时的模式为轴向模式。令$v_\parallel$为陶瓷中冲击波的速度，则电路方程为

$$E_1v_\parallel t+E_2(l-v_\parallel t)+L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}(q-q_0)=0 \tag{6}$$

其中

$$q=\pi h(2R_0+h)D \tag{7}$$

因为冲击波阵面上无自由电荷，故在冲击波前后有

$$\nabla\cdot\vec{D}=0$$

即

$$D_1=D_2=D \tag{8}$$

在公式中，E_1、E_2 分别为冲击波后和波前的电場强度，D_1、D_2 分别为波后、波前的电位移。

显然，这两种模式的初始条件是相同的，即

$$\begin{cases} t=0 \\ q=q_0=\pi h(2R_0+h)P_0 \\ \dfrac{dq}{dt}=0 \end{cases} \tag{9}$$

现在讨论斜交式的电路方程。

以通过轴的平面截取圆环柱的剖面。冲击波阵面与垂直于轴的横截面夹角为 ϕ，冲击波速度的轴向分量与径向分量分别为 $v_{\parallel}$ 和 $v_{\perp}$. 令炸药起爆时刻为 $t=0$，并令 $T_1=h/v_{\perp}$，$T_2=l/v_{\parallel}$，T_3 为冲击波完全扫过下截面的时间。这样，我们讨论问题的时间范围为 $0\leqslant t\leqslant T_3$。显然，$T_3=T_1+T_2$. 为了不失一般性，假定在 $0<t<T_1$ 的某时刻，冲击波移动的径向距离为 $v_{\perp}t$. 以 $v_{\perp}t$ 为距离作平行于轴的直线，将陶瓷的右半剖面分成区域Ⅰ和区域Ⅱ，如图 1.

如果 $T_1<T_2$，则：

(1) $0\leqslant t\leqslant T_1$

在此时间范围内，某时刻 t 冲击波扫过了上电极面的部分面积，即区域Ⅰ对应的上电极面的面积。根据电极面为等位面知，此时有 $E_{\text{I}}=E_{\text{II}}=E$. 这样，对整个铁电陶瓷可列出如下方程：

$$lE+L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}(q-q_0)=0 \tag{10}$$

其中

$$q(t)=\int_0^a D_{\text{I}}(y,t)\cdot 2\pi(R_0+y)dy+\pi(h-a)[2R_0+(h+a)]D_{\text{II}} \tag{11}$$

y 表示从 R_0 算起的沿径向变化的空间坐标，dy 为 y 的变化量。在 t 时刻，y 的最大变化范围为 $0-a$，其中

$$a=\frac{t}{T_1}h \tag{12}$$

显然，由于冲击波运动方向与初始剩余极化方向成某一角度，因此，在Ⅰ区对应的上电极面中，y 不同，电位移也不同，即 $D_{\text{I}}=D_{\text{I}}(y,t)$. 在Ⅱ区，由于还未受到冲击波的作用，因此电位移的空间分布是均匀的，即 $D_{\text{II}}=D_{\text{II}}(t)$.

另外，因电极面为等位面，故

$$lE=lE_{\text{II}}=lE_{12}+(E_{11}-E_{12})\left(v_{\parallel}t-\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}y\right) \tag{13}$$

在Ⅰ区，下标“1”表示冲击波扫过的区域，“2”表示冲击波还沒有作用的区域。这样，由(1)式有

$$E_{11}=D_{\text{I}}/\in \tag{14}$$

由(2)式有

$$E_{12}=\pm E_c\left\{\mp\left[1-\left(\frac{D_I}{P_0}\right)^n\right]\right\}^{1/n} \tag{15}$$

这里已用了(8)式。由(13)、(14)、(15)及(2)式，并用轴向模式$E_2\leqslant 0$的条件，得

$$(P_0^n-D_{\mathrm{I}}^n)^{1/n}=-\frac{D_I P_0}{l\in E_c}\left(v_\parallel t-\frac{v_\parallel}{v_\perp}y\right)+(P_0^n-D_{\mathrm{I}}^n)^{1/n}\left[1-\left(\frac{t}{T_2}-\frac{T_1}{T_2}\cdot\frac{y}{h}\right)\right] \tag{16}$$

将(16)式代入(11)式得

$$\begin{aligned}q(t)=&\int_0^a D_I(y,t)\cdot 2\pi(R_0+y)dy\\&+\pi h(h-a)[2R_0+(h+a)]\cdot\left[P_0^n-\left\{-\frac{D_I P_0}{l\in E_c}\left(v_\parallel t-\frac{v_\parallel}{v_\perp}y\right)\right.\right.\\&\left.\left.+(P_0^n-D_{\mathrm{I}}^{n1})^{1/n}\left[1+\left(\frac{t}{T_2}-\frac{T_1}{T_2}\cdot\frac{y}{h}\right)\right]\right\}^n\right]^{1/n}\end{aligned} \tag{17}$$

将 (13)、(14)、(15) 及 (17) 式代入 (10) 式，得到关于 $D_I(y,t)$ 的方程。解之，即得 $D_I(y,t)$. 将$D_I(y,t)$用于

$$D_{\mathrm{I}}(t)=D_I(y,t)\,|_{y=a} \tag{18}$$

得 $D_{\mathrm{I}}(t)$；用于(17)式得 $q=q(t)$. 这样，t 时刻的总电流为

$$i(t)=-\frac{dq(t)}{dt} \tag{19}$$

其初始条件为

$$\begin{cases}t=0\\D=P_0,\ q=q_0=\pi h(2R_0+h)P_0\\\dfrac{dD}{dt}=0\end{cases} \tag{20}$$

(19)式中，“-”表示电荷的变化是随时间减少的。

这里需指出，求解方程(10)时，为消除增根，还应有附加条件：

$$\frac{dD_{\mathrm{I}}(t)}{dy}=\frac{d}{dy}f[D_I(y,t),y,t]=0$$

其中

$$f[D_I(y,t),y,t]=\frac{q(t)-\int_0^a D_I(y,t)2\pi(R_0+y)dy}{\pi(h-a)[2R_0+(h+a)]}$$

(2) $T_1<t\leqslant T_2$

这时的整体电路方程仍为(10)式，只是$q(t)$为

$$q(t)=\int_0^h D_I(y,t)\cdot 2\pi(R_0+y)dy \tag{21}$$

y 的变化范围为 $0-h$. 这样，由(1)、(2)、(21)和(10)式以及

$$lE=lE_{\mathrm{I}}=E_{11}\cdot\left[\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}(h-y)+v_{\parallel}(t-T_1)\right]$$

$$+E_{12}\left\{l-\left[\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}(h-y)+v_{\parallel}(t-T_1)\right]\right\},\quad(0<y\leqslant h)$$

再利用前时刻获得的 $D(y,T_1)$、$i(T_1)$就可求解 $D_{\mathrm{I}}(y,t)$，将其代入(21)式，得 $q(t)$. 最后有

$$i(t)=-\frac{dq}{dt}$$

(3) $T_2<t\leqslant T_3$

在这段时间里，冲击波正在通过的区域仍称为Ⅰ区，冲击波在整个 l 范围内完全扫过的区域称为Ⅲ区。在Ⅲ区中，整个材料完全去极化，方程(10)仍适用，这时的$q(t)$为

$$q(t)=\int_{b}^{h}D_{\mathrm{I}}(y,t)\cdot 2\pi(R_0+y)dy+\pi b(2R_0+b)D_{\mathrm{III}}\tag{22}$$

$$lE=lE_{\mathrm{I}}=E_{11}\left[\frac{l-v_{\parallel}(t-T_1)}{h-b}(h-y)+v_{\parallel}(t-T_1)\right]$$

$$+E_{12}\left\{l-\left[\frac{l-v_{\parallel}(t-T_1)}{h-b}(h-y)+v_{\parallel}(t-T_1)\right]\right\}\tag{23}$$

$$b=\frac{t-T_2}{T_1}h\tag{24}$$

以(22)、(23)、(24)式联立(1),(2)式及前时刻获得的$D(y,T_2)$、$i(T_2)$可求得 $D_{\mathrm{I}}(y,t)$，从而

$$D_{\mathrm{III}}(t)=D_{\mathrm{I}}(y,t)\mid_{y=b}\tag{25}$$

将D_{I}、D_{III}代入(22)式，得$q(t)$，这样，

$$i(t)=-\frac{dq}{dt}$$

如果$T_1>T_2$，则：

(1) $0\leqslant t\leqslant T_2$

在这个时间范围内，求解过程和上述(1)相同。此时，y的变化范围为$0-a$.

(2) $T_2<t\leqslant T_1$

在这段时间中，铁电陶瓷可分为三个状态区域：冲击波正在扫的区域为Ⅰ区，还没受到冲击波作用的区域为Ⅱ区，完全扫过的区域为Ⅲ区。和以前一样，区域的划分是以平行于轴线的线为分离界的。

对整个陶瓷而言，(1)式仍然正确。但此时

$$q(t)=\int_{b}^{a}D_{\mathrm{I}}(y,t)\cdot 2\pi(R_0+y)dy+\pi(h-a)[2R_0+(h+a)]D_{\mathrm{II}}$$
$$+\pi b(2R_0+b)D_{\mathrm{III}}\tag{26}$$

其中

$$a=\frac{t}{T_1}h \qquad b=\frac{t-T_2}{T}h$$

由于电极面是等位面，有

$$E_1=E_{\mathrm{I}}=E_{\mathrm{II}}=E \tag{27}$$

Ⅰ、Ⅱ区域内，D_{I}、D_{II}是空间均匀的，可分别用(2)、(1)式。这样，由

$$lE=lE_{\mathrm{I}}=lE_{\mathrm{II}}=E_{11}\frac{l}{a-b}(a-y)+E_{12}\left[l-\frac{a-t}{a-b}(a-y)\right] \tag{28}$$

和(10)式，可建立关于$D_1(y,t)$的方程，利用前时刻算出的数据，可求得 $D_1(y,t)$,y的变化范围为$b-a$. 而后，由

$$D_{\mathrm{I}}(t)=D_1(y,t)\,|_{y=a}$$
$$D_{\mathrm{II}}(t)=D_1(y,t)\,|_{y=b}$$

可得$D_{\mathrm{I}}(t)$、$D_{\mathrm{II}}(t)$. 这样，就解得了$q(t)$、$i(t)$.

(3) $T_1<t\leqslant T_3$

此时只有Ⅰ、Ⅱ区，求解过程与上述$T_1<T_2$之(3)相同。

三、讨　　论

1. 释能效率

整个系统中，某个时间电极间的电压为

$$V=lE. \tag{29}$$

在算得电流$i(t)$后，可计算负载吸能的量值和释能效率。假定，整个陶瓷的释能时间为t，则释放总能为

$$W_f=-\int_0^t i\cdot V\,dt \tag{30}$$

负号表示放出能量。在负载L、R、C上吸收的能量分别为

$$W_L=L\int_0^t i\cdot\frac{di}{dt}dt \tag{31}$$

$$W_R=R\int_0^t i^2 dt \tag{32}$$

$$W_C=\frac{1}{C}\int_0^t i\left(\int_0^t i\,dt\right)dt \tag{33}$$

铁电陶瓷放能的总效率为

$$\eta=\frac{|W_f|}{W_l} \tag{34}$$

其中W_l为陶瓷的贮数量，它为

$$W_l=\frac{P_0^2}{2\epsilon}V_l \tag{35}$$

这里，V_l为陶瓷的总体积，ϵ为其介电常数。

2． 两种极端情况

(1) $T_1 \ll T_2$

在这时，$T_3 \approx T_2$，可把模型近似看成轴向模式，用(1)、(2)及(6)—(9)式求解各量。

(2) $T_1 \gg T_2$

此时，$T_3 \approx T_1$，模型近似为正交模式，用(1)—(5)及(9)式求解各量。

我们知道，在斜交模式中，T_3 总是大于 T_1 或 T_2. 因此，如果三种模式中的陶瓷总体积相同，则斜交模式的电流小些。但是，可利用正交模式和轴向模式初估斜交模式各量的范围。轴向、正交两种模式计算简单，便于研究[1]。

3． 负载的极限情况

(1) 短路[2]

此时的电路方程为

$$E_{11}\left(v_{\parallel}t - \frac{T_1 v_{\parallel}}{h}y\right) + E_{12}\left[l - \left(v_{\parallel}t - \frac{v_{\parallel}T_1}{h}\right)\right] = 0 \tag{36}$$

其中 $0 < t \leqslant \min\{T_1, T_2\}$，$T_2 < t \leqslant T_1$；$y$、$t$ 是独立变量，y 的变化范围随时而变化。用(1)、(2)及(36)式可求得 $D = D(y,t)$. 这样，在 t 时刻的总电流为

$$i(t) = -\frac{d}{dt}\int_{A_{\mathrm{I}}} D(y,t)\,dA - \frac{d(P_0 A_{\mathrm{II}})}{dt} \tag{37}$$

其中 $dA = 2\pi(R_0 + y)dy$；A_{I} 为处于非均匀区的一块电极面的面积；A_{II} 表示Ⅱ区的电极面积。对于 $T_1 > T_2$，则有 y 随 t 的变化范围为

$$\begin{array}{ccc} 0 \leqslant t \leqslant T_2, & T_2 \leqslant t \leqslant T_1, & T_1 \leqslant t \leqslant T_3 \\ 0 - a, & b - a, & b - h \end{array}$$

其中

$$a = \frac{t}{T_1}h, \quad b = \frac{t - T_2}{T_1}h$$

(2) 开路

仅就 $T_1 < T_2$ 情况，考虑 $0 \leqslant t \leqslant T_1$ 中的某时刻 t. 由于开路，有

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = 0$$

所以

$$q = q_0 = AP_0 \tag{38}$$

其中 $A = \pi h(2R_0 + h)$，P_0 为铁电陶瓷的初始剩余极化强度。对整个陶瓷而言，$E_{\mathrm{I}} = E_{\mathrm{II}} = E$，因此，

$$lE = lE_{\mathrm{II}} = E_{11}\left(v_{\parallel}t - \frac{v_{\parallel}T_1}{h}y\right) + E_{12}\left[l - \left(v_{\parallel}t - \frac{v_{\parallel}T_1}{h}y\right)\right] \tag{39}$$

另外，

$$
\begin{aligned}
q &= AP_0 \\
&= \int_0^a D_{\mathrm{I}}(y,t)\cdot 2\pi(R_0+y)dy + [\pi h(2R_0+h) - \pi a(2R_0+a)]D_{\mathrm{II}}
\end{aligned} \tag{40}
$$

联立(39)、(40)式可解得$D_{\mathrm{I}}(y,t)$、$D_{\mathrm{II}}(y,t)$，于是整个陶瓷的极间电压 $V=lE$ 可求得。

对于$t>T_1$及$T_1>T_2$ 情况也可做相应的分析。

应该指出，实际的爆—电换能过程是很复杂的，问题很多。例如，给定铁电陶瓷的电学参量，什么样的尺寸输出特性最好；陶瓷在冲击波作用下的力学响应与输出的关系是什么；柱形冲击波逐渐发散过程中逐渐减弱，怎样影响输出特性；如果有漏电、重新极化及击穿现象，输出是怎样变化的，等等，本文都沒有涉及到。在这里，仅仅研究了斜交式爆—电换能器的基本原理。求解方程使用数值方法，在此略去了。

参考文献

[1] G.W.Anderson, SCTM, 224—57(51),August,23, 1957.

[2] W.J.Halpin, J.Appl.phys.,37(1966),153.

The Theoritical Analysis of the Oblique-mode Explosive-electric Transducers Made of the Ferroelectrics

Yu Wan-rui

Abstract

In this paper, the fundamental principles of the oblique-mode explosive-electric transducers are described. The equations to be solved are derived and some problems are discussed.