

用沃尔什变换解差分方程

汤 国 熙

提 要 本文证明了关于二进时移函数和非二进时移函数的 walsh 变换的几个定理。同时论证了这两种变换之间的关系。

用 walsh 变换方法, 讨论了线性、常系数差分方程在列率(Sequency)域上的解法, 文章给出解的一般表达式。

在控制、信号处理等工程技术中, 我们经常采用 Z 变换方法解差分方程。下面介绍另一种新的方法即用 walsh 变换法解差分方程。

一、时移函数的 walsh 变换

(一) 离散 walsh 变换

这里仅考虑离散(或取样)时间函数和离散 walsh 谱的情况, 取样时间函数用列矢量

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} \quad (1)$$

表示, 其中 $N=2^n$, n 为非负整数。

在列率域上, 离散 walsh 谱用列矢量

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix} \quad (2)$$

表示, 其中 $N=2^n$, n 为非负整数。

(2)式是由(1)式左乘一个固有顺序的方 walsh 矩阵, 然后, 再乘因子 $\frac{1}{N}$ 而得到的, 即定义矩阵形式的 walsh 变换为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{X} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{W}$ 表示 $N \times N$ walsh 矩阵, $\mathbf{F}$ 的元素为

$$F(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Wal}(l, k) X(k) \quad (4)$$

其中 $l=0, 1, 2, \dots, N-1$.

(4) 式称为离散 walsh 变换或离散 walsh 谱。

$\mathbf{W}$ 的行 (或列) 所构成的矢量为列率域上的 walsh 矢量, 其指标的秩序是按照列率增加的次序。

相应于 (3) 式的逆变换为

$$\mathbf{X} = N \mathbf{W}^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{W} \mathbf{F} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{W}^{-1}$ 表示矩阵 $\mathbf{W}$ 的逆矩阵, $\mathbf{X}$ 的元素为

$$X(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \text{Wal}(l, k) F(l) \quad (k=0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (6)$$

(6) 式是相应于 (4) 式的逆变换形式。

(二) 二进群离散时移函数的 walsh 变换

设非负整数 k, m, l 可表示成如下形式的二进制表达式

$$\begin{aligned} k &= \sum_{i=0}^{n-1} k_i 2^i \\ m &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i 2^i \\ l &= \sum_{i=0}^{n-1} l_i 2^i \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $k_i \in \{0, 1\}$, $m_i \in \{0, 1\}$, $l_i \in \{0, 1\}$ ($i=0, 1, 2, \dots, n-1$), 这里 $\{0, 1\}$ 表示由两个元素所组成的集合。

定义 1 设 k, m 由 (7) 式所表示, 定义

$$k \oplus m = \sum_{i=0}^{n-1} (k_i \oplus m_i) 2^i \quad (8)$$

其中 “ $\oplus$ ” 表示模 2 加或逻辑加。

设二进时移 m 个单位的离散时间函数用 $X(k \oplus m)$ 表示, 记为 $X_{\oplus m}(k) = X(k \oplus m)$ ($m \geq 1$)。

在矩阵的表示中, 当 $m=1$ 时, 表示矩阵 X 中的元素, 从上到下, 按顺序, 将相邻元素两两交换一次顺序, 得到 $X_{\oplus 1}$, 例如

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(7) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_{\oplus 1} = \begin{pmatrix} X(1) \\ X(0) \\ X(3) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(7) \\ X(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{\oplus 1}(0) \\ X_{\oplus 1}(1) \\ \vdots \\ X_{\oplus 1}(7) \end{pmatrix}$$

当 $m=2$ 时, 表示在矩阵 X 中, 从上到下, 按顺序, 以每 2^2 个元素为一组 (即把 X 分成上半矩阵和下半矩阵), 将其中上两相邻元素与下两相邻元素按顺序交换一次位置, 得到 $X_{\oplus_2}$, 例如

$$X = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(7) \end{pmatrix} \quad X_{\oplus_2} = \begin{pmatrix} X(2) \\ X(3) \\ X(0) \\ X(1) \\ \cdots \\ X(6) \\ X(7) \\ X(4) \\ X(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{\oplus_2}(0) \\ X_{\oplus_2}(1) \\ \vdots \\ X_{\oplus_2}(7) \end{pmatrix}$$

当 $m=3$ 时, 表示在 $m=2$ 的矩阵 $X_{\oplus_2}$ 中, 按顺序, 从上到下, 将其相邻元素, 两两交换一次顺序, 即得

$$X_{\oplus_3} = \begin{pmatrix} X(3) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(0) \\ \cdots \\ X(7) \\ X(6) \\ X(5) \\ X(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{\oplus_3}(0) \\ X_{\oplus_3}(1) \\ \vdots \\ X_{\oplus_3}(7) \end{pmatrix}$$

定义 2 设 k, m 由 (7) 式所表示, 二进时移 m 个单位的时间函数 $X_{\oplus_m}(k)$ 的 walsh 变换定义为

$$F(l, \oplus m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Wal(l, k) X(k \oplus m) \quad (9)$$

这里 $l=0, 1, 2, \dots, N-1, N=2^n$, 记

$$\left. \begin{aligned} F(l, \oplus m) &= F_{\oplus_m}(l) \\ X(k \oplus m) &= X_{\oplus_m}(k) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(9) 式所对应的矩阵形式为

$$F_{\oplus_m} = \frac{1}{N} W X_{\oplus_m} \quad (11)$$

这里 W 是 $N \times N$ 阶 walsh 矩阵。

定理 1 假设 $F(l)$ 是由 (4) 式所表示, 且 k, m, l 用 (7) 式表示, 则

$$F_{\oplus_m} = Wal(l, m) F(l) \quad (12)$$

证 由 (9) 式可知

$$\begin{aligned}
 F \oplus_m &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Wal(l, k) X(k \oplus m) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Wal(l, k) X(k \oplus m) (Wal(l, m))^2 \\
 &= \frac{1}{N} Wal(l, m) \sum_{k=0}^{N-1} Wal(l, k \oplus m) X(k \oplus m) \\
 &= Wal(l, m) F(l)
 \end{aligned}$$

证毕。

定理 2 设 F 是取样时间函数矩阵 X 的离散 walsh 变换, 则二进时移 m 个单位的取样时间函数 $X \oplus_m(k)$ 的离散 walsh 变换为

$$F \oplus_m = C_m F \quad (13)$$

其中 F 由 (2) 式表示, 而

$$C_m = \begin{pmatrix} Wal(m, 0) & & & \\ & Wal(m, 1) & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & Wal(m, N-1) \end{pmatrix} \quad (14)$$

证 由定理 1 知

$$F \oplus_m = Wal(l, m) F(l) \quad (15)$$

(15) 式所对应的矩阵形式

$$F \oplus_m = \frac{1}{N} C_m W X = C_m F$$

其中 C_m 是用 (14) 式所表示的形式。证毕。

推论 如果 C_m 是由 (14) 式表示, 则

$$C_m C_k = C_{m \oplus k} \quad (16)$$

证 由 (14) 式有

$$\begin{aligned}
 C_m C_k &= diag[Wal(m, 0), Wal(m, 1), \dots, Wal(m, N-1)] \\
 &\quad \cdot diag[Wal(k, 0), Wal(k, 1), \dots, Wal(k, N-1)] \\
 &= diag[Wal(m, 0)Wal(k, 0), Wal(m, 1)Wal(k, 1), \\
 &\quad \dots, Wal(m, N-1)Wal(k, N-1)] \\
 &= diag[Wal(m \oplus k, 0), Wal(m \oplus k, 1), \dots, \\
 &\quad Wal(m \oplus k, N-1)] \\
 &= C_{m \oplus k}
 \end{aligned}$$

证毕。

例 1 设取样时间函数 $X(k)$ 是

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

求二进时移函数 $X(k \oplus 1)$ 的 walsh 变换 $F_{\oplus 1}$.

解 法一, 由(17)式可知, $X(k)$ ($k=0, 1, \dots, 7$) 分别表示为 1, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 从而 $X(k \oplus 1)$ 分别为 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 2. 记为

$$X_{\oplus 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(0 \oplus 1) \\ X(1 \oplus 1) \\ X(2 \oplus 1) \\ \vdots \\ X(7 \oplus 1) \end{pmatrix}$$

由(11)式得

$$F_{\oplus 1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

法二, 利用(13)式求 $F_{\oplus 1}$. 由(3)式知

$$F = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

而

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & \bigcirc & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ \bigcirc & & & & & -1 \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

根据(13)式得

$$F_{\oplus 1} = C_1 F = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & \bigcirc & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ \bigcirc & & & & & -1 \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (18)$$

这两种方法的结果相一致。

(三) 非二进群的离散时移函数的 walsh 变换

设离散时间函数为 $X(k)$ ($k=0, 1, 2, \dots, N-1$; $N=2^n$), 时移 p 个单位的时间函数为 $X(k+p)$ ($p \geq 1$), 记为 $X_{(p)}(k) = X(k+p)$, 此时移有时称为向上移位或向前移位。

将离散时间函数 $X(k)$ 向上移位 p 个单位, 在矩阵中, 表示元素 $X(k)$ 用元素 $X(k+p)$ 代替, 这里 $k, p=0, 1, 2, \dots, N-1, N=2^n$. 换句话说, 在 X 中上面的 p 个元素按顺序每个元素向下移动 $N-p$ 个位置。也就是说, 将最上面 p 个元素按顺序向下移动到最下面的 p 个元素的位置上, 而原先矩阵中, 下面的 $N-p$ 个元素, 按顺序每个元素向上移动 p 个位置, 其新的矩阵记为

$$X_{(p)} = \begin{pmatrix} X(0+p) \\ X(1+p) \\ \vdots \\ X(N-1) \\ X(0) \\ \vdots \\ X(p-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{(p)}(0) \\ X_{(p)}(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{(p)}(N-1) \end{pmatrix} \quad (19)$$

将 $X(k)$ 时移 p 个单位, 由(6)式有关系式

$$X_{(p)}(k) = X(k+p) = \sum_{l=0}^{N-1} W_{al}(l, k+p) F(l) \quad (20)$$

(20)式所对应的取样时移函数的矩阵形式为

$$\mathbf{X}_{(p)} = \mathbf{W}_{(p)} \mathbf{F} \quad (21)$$

从而

$$\mathbf{F} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_{(p)} \mathbf{X}_{(p)}$$

这里 $\mathbf{W}_{(p)}$ 表示时移 p 个单位的 walsh 矩阵。即将 walsh 矩阵 $\mathbf{W}$ 中最上面的 p 行, 按顺序向下移动到最下面的新的 p 行, 而原先矩阵中 $N-p$ 行, 按顺序向上移动 p 行, 经过时移 p 个单位之后, 所构成的矩阵 $\mathbf{W}_{(p)}$, 可重新表示成由 0 到 $N-1$ 顺序所表示的一个方矩阵

$$\mathbf{W}_{(p)} = [\bar{\mathbf{W}}_{(p)}(0) \bar{\mathbf{W}}_{(p)}(1) \cdots \bar{\mathbf{W}}_{(p)}(N-1)] \quad (22)$$

其中 $\bar{\mathbf{W}}_{(p)}(i) (i=0, 1, \cdots, N-1)$ 表示时移 p 个单位之后的列矢量, 其元素为

$$\bar{W}_{(p)}(i) = \text{Wal}(l, i+p) \quad (23)$$

这里 $i, l=0, 1, 2, \cdots, N-1$.

定义 3 设 $\mathbf{X}_{(p)}$ 是 X 时移 p 个单位的矩阵, $\mathbf{W}$ 是 $N \times N$ walsh 矩阵, 则称

$$\mathbf{F}_{(p)} = \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{X}_{(p)} \quad (24)$$

为 $\mathbf{X}_{(p)}$ 的 walsh 变换或称为 $\mathbf{X}_{(p)}$ 的 walsh 谱。

例 2 设一取样时间函数是

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

试确定时移函数 $\mathbf{X}_{(1)}$ 的 walsh 变换。

解 由 (24) 式可知

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{(1)} &= \frac{1}{8} \mathbf{W} \mathbf{X}_{(1)} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

定理 3 设 F 是由 (3) 式所表示的取样函数 X 的离散 walsh 变换, 则时移 p 个单位的取样函数 $X_{(p)}$ 的离散 walsh 变换为

$$F_{(p)} = B_{(p)} F \quad (26)$$

其中

$$B_{(p)} = W^{-1} W_{(p)} = \frac{1}{N} W W_{(p)} \quad (27)$$

证 由 (21) 和 (24) 式得:

$$F_{(p)} = \frac{1}{N} W X_{(p)} = \frac{1}{N} W W_{(p)} F = W^{-1} W_{(p)} F = B_{(p)} F$$

其中 $B_{(p)}$ 由 (27) 式所表示。证毕。

称方阵 $B_{(p)}$ 为时移 p 个单位的谱转移矩阵。

定理 4 时移 p 个单位的谱转移矩阵 $B_{(p)}$ 是等于时移一个单位的谱转移矩阵 $A_{(1)}$ 的 p 次幂

$$B_{(p)} = A_{(1)}^p \quad (28)$$

证 由于矩阵 A 是表示时移一个单位的谱转移矩阵, 所以

$$A_{(1)} = B_{(1)} = W^{-1} W_{(1)} \quad (29)$$

从而

$$A_{(1)} = W^{-1} W_{(1)} I = (W^{-1} W_{(1)}) (W^{-1} W) = W^{-1} (W_{(1)} W^{-1}) W = W^{-1} I_{(1)} W \quad (30)$$

其中 I 是 $N \times N$ 么阵, $I_{(1)}$ 表示么阵 I 时移一个单位的矩阵。即

$$I_{(1)} = W_{(1)} W^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵 $I_{(1)}$ 是矩阵 I 的第一行向下移动到最后一行, 其它的行, 按顺序向上移动一行所组成的矩阵。由矩阵代数的知识可知, $I_{(1)}$ 的 p 次幂表示为 I 的时移 p 个单位 $I_{(p)}$ 。即

$$(\mathbf{I}_{(1)})^p = \mathbf{I}_{(p)}$$

另一方面,

$$\mathbf{I}_{(p)}\mathbf{W} = \mathbf{W}_{(p)}$$

从而

$$(\mathbf{I}_{(1)})^p = \mathbf{I}_{(p)} = \mathbf{W}_{(p)}\mathbf{W}^{-1} \quad (31)$$

由(27)和(31)式得

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(p)} &= \mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}_{(p)} \\ &= \mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}_{(p)}\mathbf{I} \\ &= \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W}_{(p)}\mathbf{W}^{-1})\mathbf{W} \\ &= \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{I}_{(1)})^p\mathbf{W} \\ &= \underbrace{(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}_{(1)}\mathbf{W})(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}_{(1)}\mathbf{W})\cdots(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}_{(1)}\mathbf{W})}_{p \text{ 个}} \\ &= \mathbf{A}_{(1)}^p \end{aligned}$$

证毕。

由定理 4 的证明可知有关系: $\mathbf{B}_{(p)} = \mathbf{A}_{(1)}^p = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}_{(1)}^p\mathbf{W}$.

定理 5 设离散时间函数为 $\mathbf{X}$, 则时移 p 个单位的 walsh 变换为

$$\mathbf{F}_{(p)} = \frac{1}{N}\mathbf{W}\mathbf{I}_{(p)}\mathbf{X} = \frac{1}{N}\mathbf{W}(\mathbf{I}_{(1)})^p\mathbf{X} \quad (32)$$

证 由矩阵代数知识可知

$$\mathbf{X}_{(p)} = \mathbf{I}_{(p)}\mathbf{X}$$

由(24)式和上等式得

$$\mathbf{F}_{(p)} = \frac{1}{N}\mathbf{W}\mathbf{X}_{(p)} = \frac{1}{N}\mathbf{W}\mathbf{I}_{(p)}\mathbf{X} = \frac{1}{N}\mathbf{W}(\mathbf{I}_{(1)})^p\mathbf{X}$$

证毕。

下面用例子说明, 利用谱转移矩阵找时移取样时间函数的 walsh 变换。

例 3 设取样时间函数由(17)式所给的表达式, 求时移函数 $\mathbf{X}_{(1)}$ 的 walsh 变换。

解 由(26)式得

$$\mathbf{F}_{(1)} = \mathbf{A}_{(1)}\mathbf{F}$$

其中 $\mathbf{A}_{(1)}$ 由(30)式表示, 且由(3)式知

$$\mathbf{F} = \frac{1}{8}\mathbf{W}\mathbf{X}$$

由(30)式和 walsh 函数的性质

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(1)} &= \mathbf{W}^{-1}\mathbf{I}_{(1)}\mathbf{W} \\ &= \frac{1}{8}\mathbf{W}\mathbf{I}_{(1)}\mathbf{W} \end{aligned}$$

$$F_{(1)} = A_{(1)} F = \frac{1}{8^2} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

此结果与例 2 的结果相同。

例 4 设一取样时间函数为

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

试确定时移函数 $X_{(1)}$ 的 walsh 变换。

解 易知

$$WI_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

由(32)式得

$$\mathbf{F}_{(1)} = \frac{1}{8} \mathbf{W} \mathbf{I}_{(1)} \mathbf{X} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

此结果与上面例子的结果相同。

前面介绍的是离散时间函数 $X(k)$ 向上(前)移动 p 个单位的情况, 我们可以用同样方法建立向下(后)时移的概念。

设离散时间函数 $X(k)$ 向下(后)移动 p 个单位, 用 $X(k-p)$ 表示。记为 $X_{(-p)}(k) = X(k-p)$ 。那么,

$$\mathbf{X}_{(p)} = \mathbf{I}_{(2p)} \mathbf{X}_{(-p)} \quad \text{或} \quad \mathbf{X}_{(-p)} = \mathbf{I}_{(2p)}^{-1} \mathbf{X}_{(p)} = \mathbf{I}_{(-2p)} \mathbf{X}_{(p)} \quad (33)$$

其中 $\mathbf{I}$ 表示 $N \times N$ 么阵, $\mathbf{I}_{(2p)}$ 表示 $\mathbf{I}$ 矩阵中, 上面 $2p$ 行, 按顺序向下移动到最下面 $2p$ 行的位置上, 也就是说, 原矩阵 $\mathbf{I}$ 中, 下面的 $N-2p$ 行, 按顺序向上移动 $2p$ 行。

根据(33)式和(3)式的定义有

$$\mathbf{F}_{(p)} = \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{X}_{(p)} = \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{I}_{(2p)} \mathbf{X}_{(-p)}$$

$$\mathbf{F}_{(-p)} = \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{X}_{(-p)} = \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{I}_{(2p)}^{-1} \mathbf{X}_{(p)}$$

定理 6 设 $\mathbf{F}_{(p)}$ 与 $\mathbf{F}_{(-p)}$ 满足公式(3), 则向前时移 p 个单位与向后时移 p 个单位的 walsh 变换之间有关系

$$\mathbf{F}_{(p)} = \mathbf{B}_{(p)} \mathbf{B}_{(-p)}^{-1} \mathbf{F}_{(-p)} = (\mathbf{A}_{(1)}^p \mathbf{A}_{(-1)}^{-p}) \mathbf{F}_{(-p)}$$

或

$$\mathbf{F}_{(-p)} = \mathbf{B}_{(-p)} \mathbf{B}_{(p)}^{-1} \mathbf{F}_{(p)} = (\mathbf{A}_{(-1)}^p \mathbf{A}_{(1)}^{-p}) \mathbf{F}_{(p)} \quad (34)$$

其中 $\mathbf{A}_{(1)}$, $\mathbf{A}_{(-1)}$ 分别表示向前和向后时移一个单位的谱转移矩阵, $\mathbf{B}_{(p)}$ 与 $\mathbf{B}_{(-p)}$ 满足(27)式。

证 由(24)和(27)式有

$$\mathbf{F}_{(-p)} = \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{X}_{(-p)} = \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{W}_{(-p)} \mathbf{F} = \mathbf{B}_{(-p)} \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F}_{(p)} \stackrel{(26)}{=} \mathbf{B}_{(p)} \mathbf{F}$$

从而 $\mathbf{F} = \mathbf{B}_{(-p)}^{-1} \mathbf{F}_{(-p)}$, 代入上等式, 且利用(28)式,

$$\mathbf{F}_{(p)} = \mathbf{B}_{(p)} \mathbf{F} = \mathbf{B}_{(p)} \mathbf{B}_{(-p)}^{-1} \mathbf{F}_{(-p)} = (\mathbf{A}_{(1)}^p \mathbf{A}_{(-1)}^{-p}) \mathbf{F}_{(-p)}$$

由上等式成立, 推得

$$\mathbf{F}_{(-p)} = \mathbf{B}_{(-p)} \mathbf{B}_{(p)}^{-1} \mathbf{F}_{(p)} = \mathbf{A}_{(-1)}^p \mathbf{A}_{(1)}^{-p} \mathbf{F}_{(p)}$$

证毕。

(四) 二进时移与非二进时移的 walsh 变换之间的关系

定理 7 设 $\mathbf{F}$ 由 (3) 式表示, 则二进时移 walsh 变换 $\mathbf{F}_{\oplus_m}$ 与非二进时移 walsh 变换 $\mathbf{F}_{(m)}$ 之间有关系式:

$$\mathbf{F}_{\oplus_m} = \mathbf{D}_m \mathbf{F}_{(m)}$$

其中

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{C}_m \mathbf{A}_{(1)}^{-m} \quad (35)$$

证 由 (26) 式有

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_{(m)}^{-1} \mathbf{F}_{(m)} \quad (36)$$

另一方面, 由 (13) 式有

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}_m^{-1} \mathbf{F}_{\oplus_m} \quad (37)$$

比较 (36) 和 (37) 式得

$$\mathbf{B}_{(m)}^{-1} \mathbf{F}_{(m)} = \mathbf{C}_m^{-1} \mathbf{F}_{\oplus_m}$$

上等式两边同乘 $\mathbf{C}_m$ 得

$$\mathbf{F}_{\oplus_m} = \mathbf{C}_m \mathbf{B}_{(m)}^{-1} \mathbf{F}_{(m)}$$

由 (28) 式, 上式改写成

$$\mathbf{F}_{\oplus_m} = \mathbf{C}_m \mathbf{A}_{(1)}^{-m} \mathbf{F}_{(m)} \triangleq \mathbf{D}_m \mathbf{F}_{(m)}$$

其中 $\mathbf{D}_m$ 由 (35) 式表示。证毕。

推论 设 $\mathbf{F}$ 是由 (3) 式表示, 则

$$\mathbf{F}_{(m)} = \mathbf{D}_m^{-1} \mathbf{C}_m \mathbf{F}$$

由 (13) 式和定理 7 的结论, 直接可得上述结论。

定理 8 设 $\mathbf{F}$ 是由 (3) 式表示, 则二进时移时间函数矩阵 $\mathbf{X}_{\oplus_m}$ 与非二进时移取样函数矩阵 $\mathbf{X}_{(m)}$ 之间有关系式

$$\mathbf{X}_{\oplus_m} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{D}_m \mathbf{W} \mathbf{X}_{(m)} \quad (38)$$

其中 $\mathbf{D}_m$ 由 (35) 式表示。

证 由 (11) 式得

$$\mathbf{X}_{\oplus_m} = \mathbf{N} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{F}_{\oplus_m}$$

根据 (13) 式

$$\mathbf{X}_{\oplus_m} = \mathbf{N} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{C}_m \mathbf{F} \xrightarrow{\text{由(21)式}} \mathbf{N} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{C}_m \mathbf{W}_{(m)}^{-1} \mathbf{X}_{(m)} \quad (39)$$

由 (27) 式

$$\mathbf{W}_{(m)} = \mathbf{W} \mathbf{B}_{(m)}$$

利用线性代数的知识

$$\mathbf{W}_{(m)}^{-1} = \mathbf{B}_{(m)}^{-1} \mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{B}_{(m)}^{-1} \mathbf{W} \quad (40)$$

又由 (28) 式

$$\mathbf{W}_{(m)}^{-1} = \frac{1}{N} (\mathbf{A}_{(1)})^{-m} \mathbf{W} \quad (41)$$

将(41)式代入(39)式得

$$\mathbf{X}_{\oplus m} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{C}_m \mathbf{A}_{(1)}^{*m} \mathbf{W} \mathbf{X}_{(m)} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{D}_m \mathbf{W} \mathbf{X}_{(m)}$$

其中 $\mathbf{D}_m$ 由(35)式表示。证毕。

(38)式可改写成

$$\mathbf{X}_{(m)} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{D}_m^{-1} \mathbf{W} \mathbf{X}_{\oplus m} \quad (42)$$

二、解差分方程

在系统分析中, 对于一个离散系统的变化状态, 可以用差分方程来描述它, 在分析此系统的变化状态时, 需要解此差分方程。当然, 用 Z 变换方法或其它方法解差分方程, 也可以达到目的。此处是用 walsh 变换方法解差分方程。

设有 k 阶线性的差分方程

$$a_k y(n+k) + a_{k-1} y(n+k-1) + \cdots + a_0 y(n) = x(n) \quad (43)$$

其中 $a_i (i=0, 1, 2, \cdots, k)$ 是任意常数, $x(n)$ 表示系统的输入信号, $y(n)$ 表示系统的输出信号。现用 walsh 变换方法解(43)式。

把(43)式写成矩阵的形式

$$a_k \mathbf{y}_{(k)} + a_{k-1} \mathbf{y}_{(k-1)} + \cdots + a_1 \mathbf{y}_{(1)} + a_0 \mathbf{y} = \mathbf{x} \quad (44)$$

其中 $\mathbf{y}, \mathbf{x}$ 表示取样函数的列矢量, $\mathbf{y}_{(m)} (m=1, 2, \cdots, k)$ 表示时移 m 个单位的矩阵。

法一, 如果用 $\mathbf{Y}, \mathbf{X}$ 分别表示 $\mathbf{y}, \mathbf{x}$ 的离散 walsh 变换, 那么, 由定理 3 和定理 4 知

$$\mathbf{Y}_{(m)} = \mathbf{A}_{(1)}^m \mathbf{Y} \quad (m=1, 2, \cdots, k) \quad (45)$$

其中 $\mathbf{A}_{(1)}$ 由(30)式表示。

将(44)式两边进行 walsh 变换, 并利用(45)式得

$$[a_k \mathbf{A}_{(1)}^k + a_{k-1} \mathbf{A}_{(1)}^{k-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A}_{(1)} + a_0 \mathbf{I}] \mathbf{Y} = \mathbf{X} \quad (46)$$

其中 $\mathbf{I}$ 表示 $N \times N$ 么阵。

由(46)式得

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= [a_k \mathbf{A}_{(1)}^k + a_{k-1} \mathbf{A}_{(1)}^{k-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A}_{(1)} + a_0 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{X} \\ &= \mathbf{H} \mathbf{X} \end{aligned} \quad (47)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= [a_k \mathbf{A}_{(1)}^k + a_{k-1} \mathbf{A}_{(1)}^{k-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A}_{(1)} + a_0 \mathbf{I}]^{-1} \\ &= \left[\sum_{i=0}^k a_i \mathbf{A}_{(1)}^i \right]^{-1} \end{aligned} \quad (48)$$

其中 $\mathbf{A}_{(1)}^0 = \mathbf{I}$ 。

$\mathbf{H}$ 是系统的传递函数矩阵, 求(47)式两边的逆变换得所给差分方程的解

$$\mathbf{y} = N \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Y} = N \mathbf{W}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{X} = N \mathbf{W}^{-1} \mathbf{H} \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{W} \mathbf{x} \quad (49)$$

法二, 将(44)式两边进行 walsh 变换得

$$a_k Y_{(k)} + a_{k-1} Y_{(k-1)} + \cdots + a_1 Y_{(1)} + a_0 Y = X \quad (50)$$

其中 Y , X 分别表示 y, x 的 walsh 变换, $Y_{(l)}$ 表示时移 $l (l=1, 2, \dots, k)$ 个单位的矩阵 $y_{(l)}$ 的 walsh 变换。

利用(32)式, 由(50)式得

$$\frac{1}{N} \left[\sum_{i=0}^k a_i W I_{(1)}^i \right] y = \frac{1}{N} W x$$

即

$$W \left(\sum_{i=0}^k a_i I_{(1)}^i \right) y = W x$$

上等式两边同乘 $\left(\sum_{i=0}^k a_i I_{(1)}^i \right)^{-1} W^{-1}$, 得所给方程的解:

$$y = G x \quad (51)$$

其中 $G = \left(\sum_{i=0}^k a_i I_{(1)}^i \right)^{-1}$.

(49)与(51)式是相一致的, 因为

$$\begin{aligned} W^{-1} H^{-1} W &= \sum_{i=0}^k a_i W^{-1} A_{(1)}^i W \\ &\stackrel{\text{由(28)}}{=} \sum_{i=0}^k a_i W^{-1} B_{(i)} W \\ &\stackrel{\text{由(27)}}{=} \sum_{i=0}^k a_i W^{-1} W^{-1} W_{(i)} W \\ &= \sum_{i=0}^k a_i (W^{-1})^2 I_{(i)} W^2 \\ &= \sum_{i=0}^k a_i (I_{(1)})^i \end{aligned}$$

对上等式两边求逆矩阵得

$$(W^{-1} H^{-1} W)^{-1} = W^{-1} H W = G$$

法三, 设方程(43)的解是如下的递推公式

$$y(n) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l x(n-l) \quad (52)$$

其中 $b_l (l=0, 1, 2, \dots, N-1)$ 是待定系数, $N=2^m$.

设 Y, X 分别表示 y, x 的 walsh 变换, 而 y, x 分别表示由序列 $y(n), x(n)$ 所组成的列矢量。现将(52)式两边同时进行 walsh 变换。利用(24)和(26)式, 有

$$Y = \sum_{l=0}^{N-1} b_l X_{(-l)} = \sum_{l=0}^{N-1} b_l B_{(-l)} X = \sum_{l=0}^{N-1} b_l A_{(-l)}^l X = M X \quad (53)$$

其中

$$M = \sum_{l=0}^{N-1} b_l A_{(-l)}^l \quad (54)$$

在(54)式两边左乘 W , 右乘 W^{-1} , 根据(28), (27)和(29)式, 有下结果

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}\mathbf{M}\mathbf{W}^{-1} &= \sum_{l=0}^{N-1} b_l \mathbf{W} \mathbf{A}_{(-l)}^l \mathbf{W}^{-1} \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} b_l \mathbf{W}_{(-l)} \mathbf{W}^{-1} \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} b_l \mathbf{I}_{(-l)} \mathbf{W} \mathbf{W}^{-1} \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} b_l \mathbf{I}_{(-l)}^l
 \end{aligned}$$

对于任何一个矩阵 $\mathbf{M}$, 容易由(54)式确定系数 $b_l (l=0, 1, 2, \dots, N-1)$, 从而得到方程(43)的解(52)。

在线性系统分析中, 经常可以见到如下的差分方程

$$\sum_{i=0}^{M-1} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{K-1} b_j x(n-j) \quad (55)$$

其中序列 $\{x(n-j)\}$, $\{y(n-i)\}$ 分别表示系统的输入和输出的离散时间序列。 $a_i (i=0, 1, \dots, M-1)$, $b_j (j=0, 1, 2, \dots, K-1)$ 为常数, M, K 为自然数。

用列矩阵形式去表示取样函数, 那么, (55)式可改写成

$$\sum_{i=0}^{M-1} a_i \mathbf{y}_{(-i)} = \sum_{j=0}^{K-1} b_j \mathbf{x}_{(-j)} \quad (56)$$

如果用 $\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{X}$ 分别表示 $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{x}$ 的离散 walsh 变换, 由定理 3 和定理 4 知

$$\mathbf{Y}_{(-i)} = \mathbf{A}_{(-i)}^i \mathbf{Y} \quad \mathbf{X}_{(-j)} = \mathbf{A}_{(-j)}^j \mathbf{X} \quad (57)$$

将(56)式两边同时进行 walsh 变换, 再根据(57)式有

$$\left(\sum_{i=0}^{M-1} a_i \mathbf{A}_{(-i)}^i \right) \mathbf{Y} = \left(\sum_{j=0}^{K-1} b_j \mathbf{A}_{(-j)}^j \right) \mathbf{X} \quad (58)$$

由(58)式得:

$$\mathbf{Y} = \left(\sum_{i=0}^{M-1} a_i \mathbf{A}_{(-i)}^i \right)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{K-1} b_j \mathbf{A}_{(-j)}^j \right) \mathbf{X} = \mathbf{N} \mathbf{X} \quad (59)$$

其中

$$\mathbf{N} = \left(\sum_{i=0}^{M-1} a_i \mathbf{A}_{(-i)}^i \right)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{K-1} b_j \mathbf{A}_{(-j)}^j \right) = \mathbf{H} \mathbf{M} \quad (60)$$

(60)式为系统的传递函数矩阵。

求(59)式两边的逆变换为所求差分方程(55)的解。

由(48), (51)和(60)式可知, 用上述方法解差分方程的过程中, 都牵涉到求一个矩阵的逆矩阵问题, 为此, 简单介绍一下求一矩阵的逆矩阵的方法:

利用对矩阵施行初等行变换求其逆矩阵。

设 $\mathbf{E}$ 是 $N \times N$ 方阵, $\mathbf{I}$ 是 $N \times N$ 么阵, 通过对长方矩阵

$$[\mathbf{E} \quad \mathbf{I}]$$

施行初等行变换, 使之

$$[\mathbf{E} \quad \mathbf{I}] = [\mathbf{I} \quad \mathbf{P}]$$

则 $\mathbf{P} = \mathbf{E}^{-1}$,

在(43)式中, 如果 $n=2^a$ (a 是非负整数), 且 $z=\sum_{i=0}^{m-1} z_i 2^i$ (m 为自然数), $z_i \in \{0, 1\}$, 那么,

$$n+z=n\oplus z, \quad z=0, 1, 2, \dots, 2^a-1$$

从而(43)式改写成

$$\sum_{z=0}^k a_z y(n\oplus z) = x(n) \quad (61)$$

其中 $k < 2^a$.

设 $y(n), x(n)$ 的 walsh 变换分别为 $Y(l), X(l)$, 而 $y(n\oplus z)$ 的 walsh 变换为 $Y_{\oplus z}(l)$, 由(12)式得

$$Y_{\oplus z}(l) = Wal(l, z)Y(l)$$

因而(61)式经过 walsh 变换之后为

$$\sum_{z=0}^k a_z Wal(l, z)Y(l) = X(l)$$

即

$$Y(l) = X(l) / \sum_{z=0}^k a_z Wal(l, z)$$

求其逆变换为所求方程(43)的解。

参 考 文 献

- [1] DAVID K. CHENG and JAMES J. LIV, Time-Shift Theorems for Walsh Transform and Solution of Difference Equations, IEEE T-EMC 76, May 83-87 (IC05).
- [2] G. Ferrell Sandy, Some Walsh-Function analysis Techniques Proceedings of The 1971 Walsh Functions Symposium, AD-727-000.

Solution of Difference Equations by Walsh Transformation

Tang Guo-xi

Abstract

In this paper several theorems of Walsh transformations for binary time-shift functions and non-binary time-shift functions are showed,

The relation between two functions is established.

The solution of linear differential equations with constant coefficient on the field of sequency is discussed and the general representation of this solution is given.