

利用触觉系统识别模式

王 晓 星

提 要 本文首先研究了当某种图形在给定网格上平移时,可能出现的直方图的各种形状,利用此结果,可以用机器人的触觉系统区分已知物体底面的形状。然后,我们得到一种用触觉系统判别未知图形的方法。并讨论了利用多次接触物体,使机器人“学会”识别未知物体精确形状的理论。

近年来,人们除了研究机器人的视觉系统、听觉系统、嗅觉系统以外,对机器人的触觉系统也开始了研究。在高温、高压、污染性强、能见度差的恶劣条件下,利用触觉系统识别物体或把物体分类,比用其它方法有更多的优越性。而且触觉系统结构比较简单,造价比较低廉,便于在工业自动化或科研上广泛应用。

最简单的触觉装置是在一个工作台上安装 $m \times m$ 个触点为方形的按钮,把整个工作台看成是一个 $m \times m$ 个格点构成的网格,或看成是一个 $m \times m$ 矩阵。一个物体放在工作台上,则被物体压住的按钮构成了一个直方图。(设物体底面的图形为 G ,则网格上与 G 有重合点的格点所组成的图形叫作图形 G 在给定网格上的直方图。直方图的边界是由直线段构成的。)相应于这个直方图,按钮开关向机器人电脑输入一个信号矩阵。如果开关接通的地方作为 1,不接通的地方作为 0,则矩阵中的所有数字 1 就表示了物体底部形状的直方图。机器人电脑通过处理这些信号矩阵,可以达到分辨不同图形的目的。

当同一物体摆在接触装置上的不同位置即同一图形位于方形网格的不同位置时,它的直方图可能是不同的,从而信号矩阵也不同,这就给电脑处理这些信号带来了困难。本文定理 1 讨论了某一类图形在网格上平移时,究竟可能产生多少种不同的直方图,这些直方图各是什么形状。这样,电脑可以事先存贮待处理物体的所有可能出现的直方图形状的信息。当工作台接触某一物体时,如果此物体在按钮网格上产生的直方图与电脑存贮的某直方图的形状相同,则可以判别这是待处理物体,否则不是。这就达到了对物体选择、分类的目的。

但这仅仅是知道了物体的形状,然后用触觉系统分类的情形。如果事先不知道物体的形状,如何用机器人的触觉系统进行识别呢?

我们知道,用电脑处理图象时,往往用方形的格点(像素)所组成的直方图来代替图象的形状。像素越小,由像素组成的直方图越接近原来图象的形状。而接触系统的像素是由接触开关做成的,每个接触开关触点的面积不可能做得像电视屏幕上的像素那样

小, 接触开关的排列也不可能像电视屏幕上的象素排列的那样密; 但接触开关太大, 直方图就不可能精确反映出原图形的形状。我们能否在接触开关触点面积比较大, 排列比较疏的情形下, 采取增加接触装置与未知物体接触次数的方法, 从而使机器人“学会”识别未知图形的较精确的形状呢? 本文定理 2 讨论了这个问题, 并给出了一种简单易行的处理方法。

定义 1 图形 G

见图 1. 设在网格上画有一个闭曲线围成的图形。我们用两条水平线和两条垂直线分别从上下和左右向此图形平移, 直到各直线与图形有交点 A 、 B 、 C 、 D 为止, 其中 A 、 B 、 C 、 D 叫作临界点。以平行网格线的方向建立坐标轴, 如果曲线 AB 、 BC 、 CD 、 DA 分别都是单调曲线, 则此图形叫做由单调曲线围成的图形, 记为 G 。如圆、椭圆、凸多边形等。

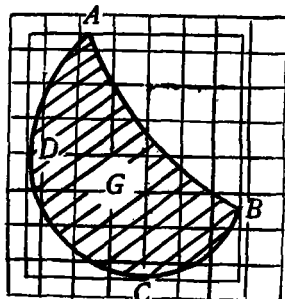


图 1

设平面 N 上画有 m 行 m 列间距为 a 的网格, 每一个边长为 a 的方格称为格点, 本文用大写字母 $\mathcal{P}$ 表示格点。设另一平面 N' 上也有间距为 a 的网格, 并画有图形 G 。把 N' 与 N 重合, 并使它们的网格线互相重合。这时平面 N 上与 G 重合的图形, 称为 G 在 N 上的初始位置。现在考虑 G 在网格上平移时, 在平面 N 上可能产生哪些形状各异的直方图。

引理 1

在平面 N 的网格上沿网格线建立坐标系 xAy 如图 2 所示。记此坐标系第一象限中的格点 $ABCD$ 为 $\mathcal{P}$ 。显然 $\mathcal{P}$ 内所有点的横坐标与纵坐标都不小于 0。设格点 $\mathcal{P}$ 中有一递减曲线 EF , 此曲线与格点边界所围成的图形 $ABEF$ 如图 2 所示, 记为 $\mathcal{D}$ 。在与 $\mathcal{P}$ 关于 A 点对称的格点 $MNAL$ 中, 作一个与 $\mathcal{D}$ 关于 A 点对称的图形 $HGAL$, 记为 $\mathcal{P}^c$, 格点 $MNAL$ 中不属于 $\mathcal{P}^c$ 的图形记为 $\mathcal{P}^e$ 。令 $\mathcal{D}$ 在平面 N 上平移, 取 $\mathcal{D}$ 上的 A 为参考点, 我们有下面的结论成立:

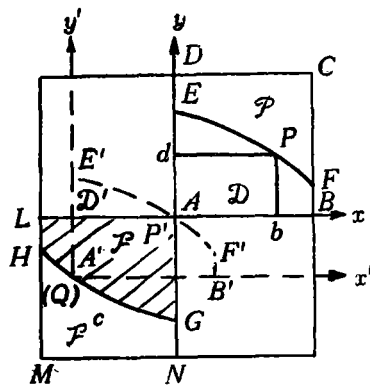


图 2

当 $\mathcal{D}$ 平移到使 A 位于 $\mathcal{P}$ 内的任一点时, $\mathcal{D}$ 在此位置上的图形记为 $\mathcal{D}'$, 则 $\mathcal{D}'$ 总与格点 $\mathcal{P}$ 有重合点, 记为 $\mathcal{D}' \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$; 当 $\mathcal{D}$ 平移到使 A 位于 $\mathcal{P}^e$ 内的任一点时, $\mathcal{D}'$ 总与格点 $\mathcal{P}$ 没有重合点, 记为 $\mathcal{D}' \cap \mathcal{P} = \emptyset$ 。

证明

见图 2. 设 EF 的曲线方程为 $y=f(x)$, $(0 \leq x \leq a)$ 。

$\because$ 曲线 HG 与曲线 EF 关于 A 点对称, $\therefore HG$ 的曲线方程为 $y=-f(-x)$, $(-a \leq -x \leq 0)$ 。

对 $\forall Q \in \mathcal{P}^e$, 设它的坐标为 $x=-b$, $y=-d$ $(-a \leq -b \leq 0$ 且 $-f(-b) \leq -d \leq 0)$, 那么与 Q 关于 A 点对称的点 $F \in \mathcal{D}$, 且 P 的坐标为 $x=b$, $y=d$ $(0 \leq b \leq a$ 且 $0 \leq d \leq f(b))$ 。当 $\mathcal{D}$ 平移到使 A 与 Q 重合时, 相当于把旧坐标系 xAy 向左平移 b , 向下平移 d 。 $\mathcal{D}$ 在此

位置上的图形为 $\mathcal{D}'$, 如图 2 虚线 $A'B'F'E'$ 所示, $\mathcal{D}$ 上的点 P 平移到 $\mathcal{D}'$ 上的点 P' . 设新坐标系为 $x'A'y'$, 新旧坐标系的坐标有如下关系: $x=x'-b, y=y'-d$. $\because P'$ 在新坐标系下的坐标为 $x'=b, y'=d, \therefore P'$ 相对于旧坐标系的坐标为 $x=b-b=0, y=d-d=0$. 即 $F'=A$. 又 $F' \in \mathcal{D}', A \in \mathcal{P} \therefore \mathcal{D}' \cap \mathcal{P} \neq \phi$.

对 $\forall Q \in \mathcal{P}^c$, 设它的坐标为 $x=-b, y=-d$ ($-a \leq -b \leq 0$ 且 $-a \leq -d < -f(-b)$), 那么与 Q 关于 A 点对称的点 P 的坐标为 $x=b, y=d$ ($0 \leq b \leq a$ 且 $f(b) < d \leq a$) 即 $f(b) - d < 0$ (1) 见图 3. 当 $\mathcal{D}$ 平移到使 A 与 Q 重合时, $\mathcal{D}$ 在此位置上的图形为 $\mathcal{D}'$. $\mathcal{D}$ 上的递减曲线 EF 平移到 $\mathcal{D}'$ 上的 $E'F'$, 它在新坐标系下的方程为 $y'=f(x')$, 并且仍是递减的. 新坐标系 $x'A'y'$ 与旧坐标系 xAy 有如下关系: $x=x'-b, y=y'-d$. 在新坐标系中, 我们把 $\mathcal{D}'$ 中的所有点按横坐标小于 b 、等于 b 和大于 b 分成三部分:

$$\mathcal{D}'_1 = \{(x', y') | 0 \leq x' < b; 0 \leq y' \leq f(x')\}$$

$$\mathcal{D}'_2 = \{(x', y') | x' = b; 0 \leq y' \leq f(b)\}$$

$$\mathcal{D}'_3 = \{(x', y') | b < x' \leq a; 0 \leq y' \leq f(x')\}$$

而 $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'_1 \cup \mathcal{D}'_2 \cup \mathcal{D}'_3$. 如果我们把 $\mathcal{D}'$ 中的点用旧坐标系的坐标表示, 则有 $\mathcal{D}' = \{(x, y) | -b \leq x < 0; -d \leq y \leq f(x) - d\} \cup \{(x, y) | x = 0; -d \leq y \leq f(b) - d\} \cup \{(x, y) | 0 < x \leq a - b; -d \leq y \leq f(x) - d\}$. 注意到 $\mathcal{P} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq a\}$. $\therefore \mathcal{D}'_1$ 中所有点在旧坐标系中的横坐标都小于 0, $\therefore \mathcal{D}'_1 \cap \mathcal{P} = \phi$. 由 (1) 式, $\mathcal{D}'_2$ 中所有点的纵坐标 $f(b) - d < 0 \therefore \mathcal{D}'_2 \cap \mathcal{P} = \phi$. 又 $E'F'$ 的方程 $y' = f(x')$ 为递减的, $\therefore$ 当 $b < x'$ 时, $f(x') < f(b)$, $\therefore \mathcal{D}'_3 = \{(x', y') | b < x' \leq a; 0 \leq y' \leq f(x') < f(b)\} = \{(x, y) | 0 < x \leq a - b; -d \leq y < f(x) - d < f(b) - d < 0\}$, $\therefore \mathcal{D}'_3$ 中所有点的纵坐标也都小于 0. $\therefore \mathcal{D}'_3 \cap \mathcal{P} = \phi$. $\therefore \mathcal{D}' \cap \mathcal{P} = (\mathcal{D}'_1 \cup \mathcal{D}'_2 \cup \mathcal{D}'_3) \cap \mathcal{P} = (\mathcal{D}'_1 \cap \mathcal{P}) \cup (\mathcal{D}'_2 \cap \mathcal{P}) \cup (\mathcal{D}'_3 \cap \mathcal{P}) = \phi$

注 在以 AB 为 x 轴, AD 为 y 轴的坐标系中, 如果 EF 是递增曲线, 我们可以以 B 为原点, 以 BA 为 x 轴, BC 为 y 轴建立坐标系, 这时 EF 就是单调递减曲线了. 见图 4, 与引理 1 的讨论相同, 在与格点 $\mathcal{P}$ 关于 B 点对称的格点 $NMLB$ 中作一个与 $\mathcal{D}$ 关于 B 点对称的区域 $\mathcal{P}$, 类似地定义 $\mathcal{P}^c$. 取 $\mathcal{D}$ 上的 B 点为参考点, 令 $\mathcal{D}$ 在平面 N 上平移, 平移后的图形记为 $\mathcal{D}'$. 则 $B \in \mathcal{P}$ 时, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{P} \neq \phi$; $B \in \mathcal{P}^c$ 时 $\mathcal{D}' \cap \mathcal{P} = \phi$.

引理 2

当引理 1 中的 $MNAL$ 连同它上面的 $\mathcal{P}$ 、 $\mathcal{P}^c$ 平移到平面 N 上的任一位置 $M'N'K'L'$

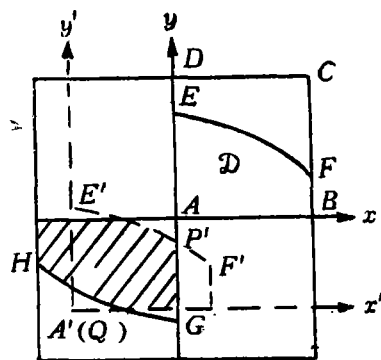


图 3

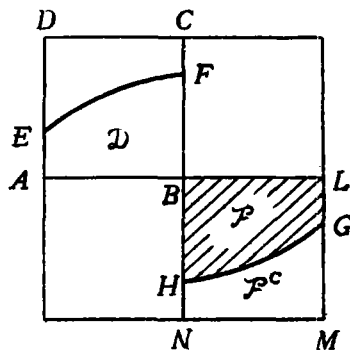


图 4

时, $\mathcal{D}$ 或 $\mathcal{D}$ 所在的平面 N' 上必存在一个参考点 e , 使得当 $\mathcal{D}$ 平移到 $e \in \mathcal{F}$ 时, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$; $e \in \mathcal{F}^c$ 时, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{F} = \emptyset$.

证明

见图 5. 设 e 是 N' 上任一给定点, $\mathcal{D}$ 未平移时, e 与平面 N 重合的点记为 K' . 当 $\mathcal{D}$ 在平面 N 上平移, 使 $\mathcal{D}$ 上的 A 点取遍 N 上的区域 $HGAL$ 中的每一点时, 则 $\mathcal{D}$ 所在的平面 N' 上的 e 点也取遍 N 上某区域 $H'G'K'L'$ 中的每一点. $\because$ 平移过程中, $\mathcal{D}$ 上的点 A 与点 e 的相互位置不变, $\therefore H'G'K'L'$ 中的每一点与 $HGAL$ 中的每一点一一对应, 即 $H'G'K'L'$ 的形状与 $HGAL$ 形状完全相同. $\because A \in HGAL$ 时, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$, $\therefore e \in H'G'K'L'$ 时, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. 同理可以讨论 $e \in M'N'G'H'$ 时, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{F} = \emptyset$. 因此把 $MNAL$ 平移到使 A 与 K' 重合便得到 $M'N'K'L'$. 由 e 的任意性, K' 可以是 N 上的任意一点, 因此当 $MNAL$ 平移到使 A 与 N 上任意一点 K' 重合时, 都可以在 $\mathcal{D}$ 或 $\mathcal{D}$ 所在的平面上找到与 K' 相重合的点 e 作为参考点, 使之满足此引理要求.

引理 3

$\mathcal{F}$ 的形状与 $\mathcal{D}$ 的形状相同, 但方位相差 180° .

若引理 1 中格点 $\mathcal{F}$ 中的曲线 ETF 不是单调的, 设 ET 单调递增, TF 单调递减. 曲线 ETF 与格点边界所围成的图形 $ABFTE$ 如图 6 所示, 记为 $\mathcal{D}$, 则我们有下面的引理:

引理 4

在与 $\mathcal{F}$ 关于 A 点对称的格点 $MNAL$ 中, 作一曲线 HS 与 $\mathcal{F}$ 中递减曲线 TF 关于 A 点对称. 过 S 作 SV 与 AL 平行, 把图形 $HSVAL$ 记为 $\mathcal{F}$, 把格点 $MNAL$ 中不属于 $\mathcal{F}$ 的图形记为 $\mathcal{F}^c$. 取 $\mathcal{D}$ 上的 A 为参考点, 令 $\mathcal{D}$ 在平面 N 上平移, 平移后的图形记为 $\mathcal{D}'$. 则我们有下面结论成立: $A \in \mathcal{F}$ 时, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$; $A \in \mathcal{F}^c$ 时, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{F} = \emptyset$.

证明

坐标系 xAy 如图 6 所示. 设曲线 ET 的方程为 $y = \varphi(x)$, 它是递增的. 设曲线 TF 的方程为 $y = f(x)$, 它是递减的. 其中 T 是曲线 ETF 的最高点, 设它的坐标为 $x = c$, $y = h$. 则与 T 关于 A 点对称的点 S 的坐标为 $x = -c$, $y = -h$.

1. 当 $Q \in \mathcal{F}$ 时, 设 Q 的坐标为 $x = -b$, $y = -d$. 先讨论 Q 的横坐标大于或等于 $-c$ 的情况: 当 $-c \leq -b \leq 0$ 时, $\because Q \in \mathcal{F}$, $\therefore Q$ 的纵坐标 $-d$ 必须满足 $-a \leq -h \leq -d \leq 0$. 即 $c - b \geq 0$, $h - d \geq 0$ (2) 当 $\mathcal{D}$ 平移到使 A 与 Q 重合时, 相当于把旧坐标系 xAy 向左平移 b , 向下平移 d , $\mathcal{D}$ 在此位置上的图形为 $\mathcal{D}'$. 设新坐标系为 $x'A'y'$, 新旧坐标系的坐标有如下关系: $x = x' - b$, $y = y' - d$. 我们把 $\mathcal{D}'$ 分成了三个部分: $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'_1 \cup \mathcal{D}'_2 \cup \mathcal{D}'_3$, 其

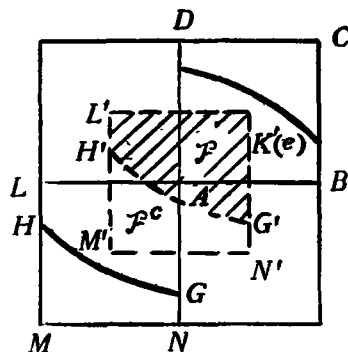


图 5

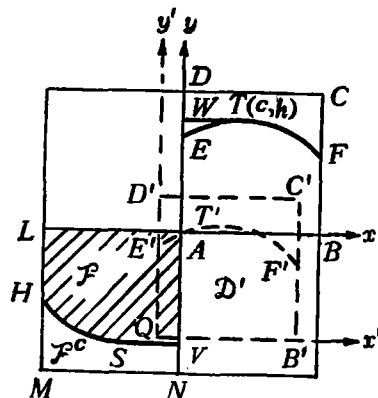


图 6

中

$$\mathcal{D}'_1 = \{(x', y') | 0 \leq x' < c; 0 \leq y' \leq \varphi(x')\}$$

$$\mathcal{D}'_2 = \{(x', y') | x' = c; 0 \leq y' \leq h\}$$

$$\mathcal{D}'_3 = \{(x', y') | c < x' \leq a; 0 \leq y' \leq f(x')\}$$

如果把 $\mathcal{D}'_2$ 用旧坐标系的坐标表示, 则有

$$\mathcal{D}'_2 = \{(x, y) | x = c - b; -d \leq y \leq h - d\}$$

即 $\mathcal{D}'_2$ 中至少有一点 $P(c-b, h-d)$, 由(2)式可知, 它的横坐标 $x = c-b \geq 0$, 纵坐标 $y = h-d \geq 0$, 因此 $P \in \mathcal{P} = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\} \therefore \mathcal{D}'_2 \cap \mathcal{P} \neq \emptyset \therefore \mathcal{D}' \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$. 当Q的横坐标小于 $-c$ 时, 其讨论与引理1相同。

2. 当 $Q \in \mathcal{F}^\circ$ 时, 过T作TW平行AB, 如图6, 则曲线WTF是单调递减的, 且图形ABFTW与 $\mathcal{F}$ 关于A点对称。由引理1, 当ABFTW在平面N上平移, 且参考点 $A \in \mathcal{F}^\circ$ 时, 有 $ABFTW \cap \mathcal{F} = \emptyset$. 现在 $\mathcal{D}$ 是ABFTW内的一部分图形, $\therefore A \in \mathcal{F}^\circ$ 时, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{P} = \emptyset$ ■ 注: 如果在与 $\mathcal{P}$ 关于B点对称的格点中, 仿此引理作出 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^\circ$, 则我们可以得到类似的结论。见图7。

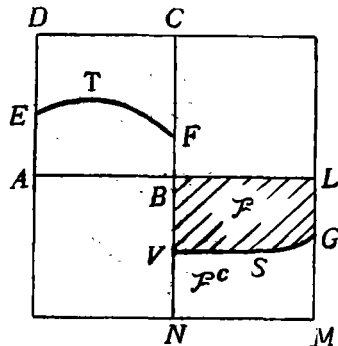


图7

引理5

当引理4中的MNAL连同它上面的 $\mathcal{F}$ 、 $\mathcal{F}^\circ$ 平移到平面N上任一位置时, $\mathcal{D}$ 或 $\mathcal{D}'$ 所在平面N'上必存在一个参考点e, 使得 $e \in \mathcal{F}$ 时, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$; $e \in \mathcal{F}^\circ$ 时, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{P} = \emptyset$.

根据单调曲线围成的图形G的定义, 我们可以把 $\mathcal{D}$ 看成是G的某个部分, 也就是说, 初始位置时G在N上某格点 $\mathcal{P}$ 内的图形就是 $\mathcal{D}$. 其中引理4中的 $\mathcal{D}$ 是G的临界点附近的部分图形; 引理1中的 $\mathcal{D}$ 是以G的单调曲线为边界的部分图形。这样, 引理1至引理5中的 $\mathcal{D}$ 可以用G来代替, 结论中的 $\mathcal{D}'$ 可以用平移后的G来代替, 代替后的相应引理这里就不详述了。

定义2 变换 ψ

设平面N'上的两条水平线和两条垂直线已把图形G的边界曲线分成单调曲线AB、BC、CD、DA, 其中A、B、C、D是临界点。变换 ψ 是指把临界点“拉成”长度为a的临界线段的变换。即把曲线AB向右平移距离a; 把曲线DC向下平移距离a; 把曲线BC向下平移距离a同时向右平移距离a。

这样所得图形 $AA'B'B''C''C'D'D$ 记为 G^* , 见图8. 有时某条单调曲线可能缩成一点, 这时仍能进行变换 ψ , 见图9. G^* 在每个格点 P'_{ij} 内的图形记为 $\mathcal{D}'_{ij}$, 本文中, 经过变换 ψ 的图形用大写字母加*号来表示。

变换 ψ :

$$N' \rightarrow N'$$

$$G \mapsto \psi(G) \triangleq G^*$$

经过变换 ψ 之后, G^* 在每个格点内的图形 $\mathcal{D}'_{ij}$ 的边界曲线都是单调的了。

同时, 我们也定义 ψ 的逆变换 ψ^{-1} , 它是把长度为a的临界线段“压成”临界点的变换, 即把曲线 $A'B'$ 、 $B''C''$ 、 $C'D'$ 按 ψ 所定义的反方向平移距离a。

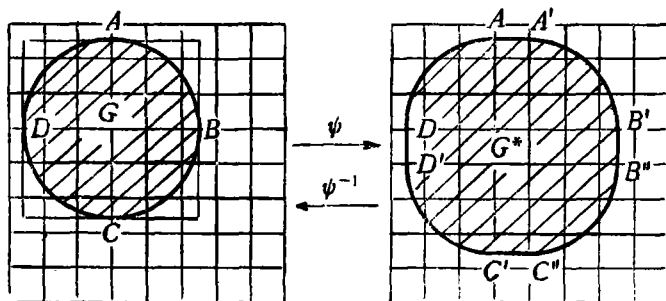


图 8

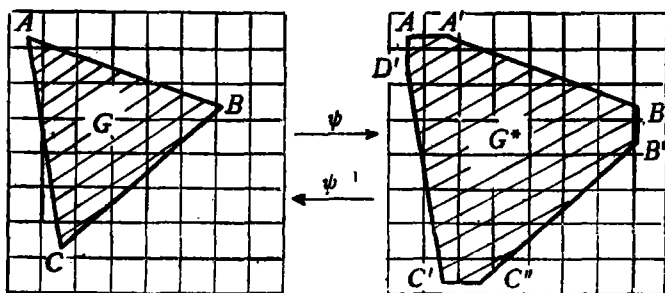


图 9

变换 ψ^{-1} :

$$N' \rightarrow N'$$

$$G^* \mapsto \psi^{-1}(G^*)$$

定义 3 旋转变换 θ

变换 θ 是在平面 N' 内把格点 P'_{ij} 连同里面的区域 $\mathcal{D}^*_{ij}$ 旋转 180° 的变换。

变换 θ :

$$N' \rightarrow N'$$

$$\mathcal{D}^*_{ij} \mapsto \theta(\mathcal{D}^*_{ij})$$

定义 4 映射 φ

映射 φ 是指把 N' 上的所有 $\theta(\mathcal{D}^*_{ij}) (i, j=1, 2, \dots, m)$ 保持图形不变, 平移到平面 N 上某一个边长为 a 的正方形区域 P_0 内的映射。这时 $\theta(\mathcal{D}^*_{ij})$ 的边界曲线把 F_0 分成若干区域 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_l$, 其中 l 是有限数, 它与网格间距的大小和图形 G 的形状有关。

映射 φ :

$$N' \rightarrow N$$

$$\theta(\mathcal{D}^*_{ij}) \mapsto \varphi \circ \theta(\mathcal{D}^*_{ij})$$

定理 1

设 S 是 P_0 内任意一点, 当 N' 上的给定参考点 e 与 S 重合时, N' 上的图形 G 在 N 中网格上的直方图记为 $H(S)$ 。我们有下面的结论:

若 $S \in \Omega_\nu, S' \in \Omega_\nu (\nu=1, 2, \dots, l)$ 则 $H(S)$ 与 $H(S')$ 的形状相同; 若 $S \in \Omega_\nu, S' \in \Omega_\mu (\nu \neq \mu)$, 则 $H(S)$ 与 $H(S')$ 的形状不相同。

证明

由映射 φ 的定义可知, $\mathcal{D}^*_{ij}$ 的边界曲线都是单调曲线, 由引理 1 至引理 5 可知, 每个区域 $\varphi \circ \theta(\mathcal{D}^*_{ij})$ 就是各引理中的 $\mathcal{F}_{ij}$, 也就是说, 当参考点 e 位于 $S \in \mathcal{F}_{ij}$ 时,

$G \cap P_{ij} \neq \phi$; 当 e 位于 $S \in \mathcal{F}_{ij}^e$ 时, $G \cap F_{ij} = \phi$.

考虑 P_0 中某个区域 Ω_v , 如果

$$S \in \bigcap_{(i,j) \in M'CM} \varphi \cdot \theta(\mathcal{D}_{ij}^*) = \bigcap_{(i,j) \in M'CM} \mathcal{F}_{ij}$$

其中 $M = \{(i, j) | i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, m\}$, M' 是 M 的某个子集, 它由使 $S \in \varphi \cdot \theta(\mathcal{D}_{ij}^*)$ 的一切 (i, j) 所组成, 则这时 G 与所有的 $F_{ij} ((i, j) \in M')$ 有重合点, 即 $H(S)$ 是由所有的格点 $P_{ij} ((i, j) \in M')$ 所组成, 这就告诉了我们 $H(S)$ 的形状。如果某个点 S' 也位于 Ω_v 内, 因为

$$S' \in \bigcap_{(i,j) \in M'CM} \mathcal{F}_{ij} \quad (\text{这里 } M' \text{ 和上述子集 } M' \text{ 相同})$$

所以 $H(S)$ 与 $H(S')$ 的形状相同。

若 Ω_v 和 Ω_μ 是 P_0 内两个不同的区域, 则 Ω_v 与 Ω_μ 之间至少有一条 $\mathcal{F}_{i_0j_0}$ 的边界曲线把 Ω_v 和 Ω_μ 分割开。当 $S \in \Omega_v$ 而 $S' \in \Omega_\mu (v \neq \mu)$ 时, S 与 S' 两点中必然有一点在 $\mathcal{F}_{i_0j_0}$ 内, 另一点在 $\mathcal{F}_{i_0j_0}$ 外。

$S \in \mathcal{F}_{i_0j_0} \Rightarrow G \cap P_{i_0j_0} \neq \phi \Rightarrow H(S)$ 含有 $F_{i_0j_0}$;

$S' \notin \mathcal{F}_{i_0j_0} \Rightarrow S' \in \mathcal{F}_{i_0j_0}^e \Rightarrow G \cap P_{i_0j_0} = \phi \Rightarrow H(S')$ 不含有 $F_{i_0j_0}$ 即在 $H(S)$ 与 $H(S')$ 这两个直方图中, 有一个直方图含有格点 $F_{i_0j_0}$, 而另一个直方图不含有格点 $P_{i_0j_0}$, 这说明 $H(S)$ 与 $H(S')$ 的形状不相同。

例

设平面 N 上画有间距为 a 的 3×3 网格, 平面 N' 上画有间距为 a 的 3×3 网格和图 G , 这个 G 是半径为 $R = \frac{3}{4}a$ 的圆形区域 (取圆形是为了作图方便, 实际上取任何形状的由单调曲线围成的图形都行)。 G 的初始位置如图 10 所示。取 G 的圆心为参考点 e , 取格点 P_{22} 为 P_0 。

变换 $\varphi: N' \rightarrow N'$ $G \mapsto \varphi(G) \triangleq G^*$ 见图 11

变换 $\theta: N' \rightarrow N'$ $\mathcal{D}_{ij}^* \mapsto \theta(\mathcal{D}_{ij}^*)$ 见图 12

映射 $\psi: N' \rightarrow N$ 的 P_0 $\theta(\mathcal{D}_{ij}^*) \mapsto \varphi_0 \theta(\mathcal{D}_{ij}^*)$ 见图 13

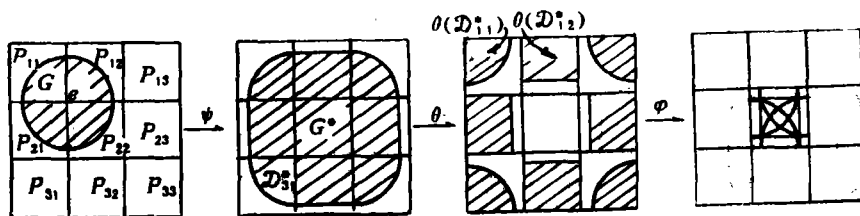


图 10

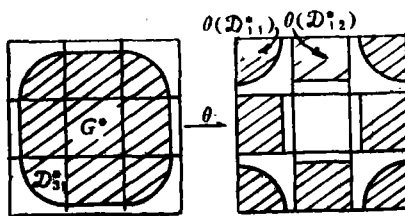


图 11

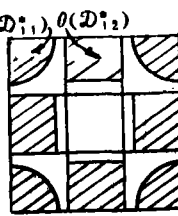


图 12

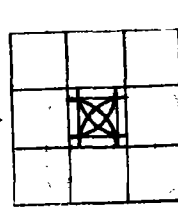


图 13

每个 $\varphi \cdot \theta(\mathcal{D}_{ij}^*)$ 记为 $\mathcal{F}_{ij}$, $\mathcal{F}_{ij}$ 的边界曲线把 P_0 分成若干区域 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{29}$, 见图 14 (图中用 $1, 2, \dots$ 代替 $\Omega_1, \Omega_2, \dots$)。

如同在地图上标写等高线一样, 我们把每条曲线都标上它是哪个 $\mathcal{F}_{ij}$ 的边界曲线。对某个 Ω_μ 只要看它是由哪些 $\mathcal{F}_{ij}$ 相交所成的, 即可求出当参考点 e 位于这个区域内任

一点时 G 所对应的直方图。例如, 若 $S \in \Omega_1$, 即

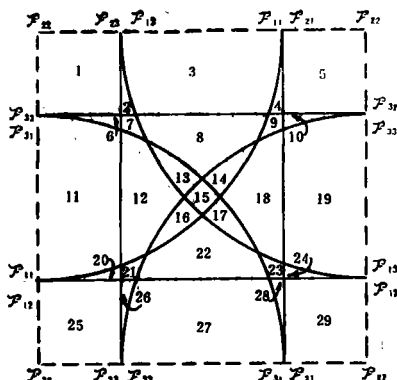


图 14

$$S \in \mathcal{F}_{11} \cap \mathcal{F}_{12} \cap \mathcal{F}_{21} \cap \mathcal{F}_{22}$$

$H(S)$ 是由格点 $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$ 组成的, 写成矩阵形式

$$H^M(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (S \in \Omega_1)$$

同理, 我们可以写出 P_0 中所有区域 $\Omega_\mu (\mu=1, 2, \dots, 29)$ 中的点所对应的 G 的直方图矩阵:

$$\begin{aligned} \Omega_1: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_2: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_3: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_4: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Omega_5: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_6: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_7: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_8: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Omega_9: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_{10}: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_{11}: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_{12}: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Omega_{13}: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_{14}: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \Omega_{15}: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \Omega_{16}: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \Omega_{17}: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \Omega_{18}: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \Omega_{19}: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \Omega_{20}: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Omega_{21}: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \Omega_{22}: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \Omega_{23}: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \Omega_{24}: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Omega_{25}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Omega_{26}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Omega_{27}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Omega_{28}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{29}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

我们注意到, Ω_1 、 Ω_5 、 Ω_{25} 、 Ω_{29} 所对应的直方图矩阵虽然不相同, 但它们所对应的直方图是相同的, 如图 15 所示。同理, Ω_3 与 Ω_{27} , Ω_{11} 与 Ω_{19} 所对应的直方图也各自相同。如果不考虑 G 的直方图与网格边界的相互位置, 而仅仅考虑 G 的直方图与每个格点的相互位置时, 我们可以把 P_0 的上下和左右边界看成是“粘”在一起的。这时 P_0 的边界不起分隔区域的作用, 即图 14 中的 Ω_{11} 与 Ω_{19} , Ω_3 与 Ω_{27} 以及 Ω_1 , Ω_5 , Ω_{25} , Ω_{29} 都分别表示同一个区域, 对应同一种形状的直方图。这样, 图 15 表示 G 有 24 个不



图 15

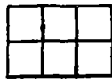


图 16

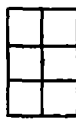


图 17

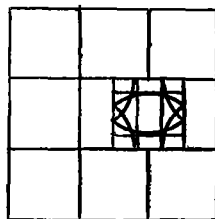


图 18

同的直方图。

若 P_0 不是取在 P_{22} 位置上, 而是平移到 N 上任一位置, 例如向右平移距离 $\frac{a}{2}$. 如图 18 所示。重复上述步骤, P_0 被曲线分割成 31 个区域, 如图 19 所示。尽管图 19 与图 14

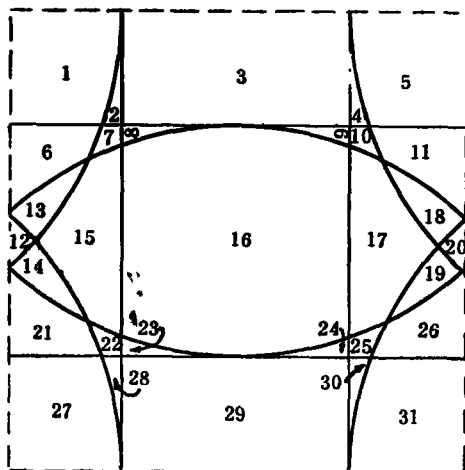


图 19

不相同, 但只要设想 P_0 的边界不起分隔区域的作用, 即图 19 中的 Ω_3 与 Ω_{29} 、 Ω_6 与

Ω_{11} 、 Ω_{12} 与 Ω_{20} 、 Ω_{21} 与 Ω_{26} 以及 Ω_1 、 Ω_5 、 Ω_{27} 、 Ω_{31} 都分别表示同一个区域, 对应同一种形状的直方图。这样, 图 19 也表示 G 有 24 个不同的直方图。在上述的含意下, 无论 G 平移到 N 上什么位置, 它所可能出现的不同形状的直方图只有 24 个。

我们可以用积分计算出 P_0 中各区域 Ω_μ 的面积, 从而得到 G 的某种形状直方图可能出现的概率。在本例中, 出现图 15 所示的直方图的概率为 0.25, 出现图 16 和图 17 所示的直方图的概率分别为 0.236* 等。

定理 2

设平面 N 上已画有间距为 a 的网格, 每个格点记为 $P_{ij}(i, j=1, 2, \dots, m)$ 。在 N 上任取一个每边平行于网格线的正方形区域 P_0 , 其边长为 a 。把 P_0 的每边平均分成 n 等份, 在 P_0 内作出 n^2 个边长为 $\frac{a}{n}$ 的子格点, 每个子格点的中心分别记为 $S_{kh}(k, h=1, 2, \dots, n)$, 如图 20。

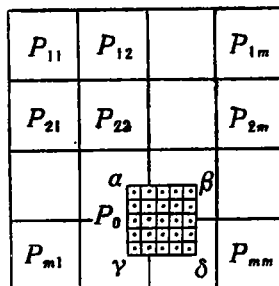


图 20

设平面 N' 上有图形 G , 任取 N' 上的一点作为参考点 e 。

相应于平面 N 上的每一个给定的格点 P_{ij} , 我们定义一个 $n \times n$ 矩阵, 记为

$$M_{ij}^* = \begin{pmatrix} \tau_{ij}(S_{n1}) & \cdots & \tau_{ij}(S_{n2}) & \cdots & \tau_{ij}(S_{n1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_{ij}(S_{2n}) & \cdots & \tau_{ij}(S_{22}) & \cdots & \tau_{ij}(S_{21}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_{ij}(S_{1n}) & \cdots & \tau_{ij}(S_{12}) & \cdots & \tau_{ij}(S_{11}) \end{pmatrix}$$

注意 S 下标的排列次序, 其中

$$\tau_{ij}(S_{kh}) = \begin{cases} 1 & \text{当 } e \text{ 位于 } S_{kh}, G \cap P_{ij} \neq \emptyset \\ 0 & \text{当 } e \text{ 位于 } S_{kh}, G \cap P_{ij} = \emptyset \end{cases}$$

$$(k, h=1, 2, \dots, n)$$

如果把所有的 $M_{ij}^*(i, j=1, 2, \dots, m)$ 按 i, j 的次序排列成一个 $m \times n$ 行, $m \times n$ 列的矩阵, 记为

$$M^* = \begin{pmatrix} M_{11}^* & M_{12}^* & \cdots & M_{1m}^* \\ M_{21}^* & M_{22}^* & \cdots & M_{2m}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{m1}^* & M_{m2}^* & \cdots & M_{mm}^* \end{pmatrix}$$

并且把 M^* 中凡是数字 1 的地方用边长为 $\frac{a}{n}$ 的子格点代替, 就得到一个直方图, 记为 $H(G^*)$ 。对 $H(G^*)$ 作变换 ψ^{-1} , 则 $\psi^{-1}[H(G^*)]$ 就是 G 的精确直方图, 它是由边长为 $\frac{a}{n}$ 的子格点组成的。

* 为求图 16 所示直方图出现的概率, 只要计算图 14 中 Ω_3 和 Ω_{27} 的面积在整个正方形面积中所占的比例。设正方形边长为 1, 则所求概率为

$$\frac{1}{4} - 4 \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{4} - \sqrt{\left(\frac{3}{4} \right)^2 - x^2} \right) dx = \frac{1}{4} - 4 \left(\frac{3 - \sqrt{2}}{16} + \frac{9}{32} \arcsin \frac{1}{3} \right) \approx 0.236$$

证明

设 P_0 的四个角的顶点分别是 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. 当 N' 上的参考点位于 P_0 的左上角顶点 α 时, 设 G 中含有边界曲线 AB 且与某格点 P_{ij} 有重合点的区域是 $\mathcal{D}_{ij}$. 见图 21.

当 $\mathcal{D}_{ij}$ 不在临界点附近时, 由引理 1, 引理 2, 引理 3 可知, 在 P_0 内存在一个区域 $\mathcal{F}_{ij}$, 它的形状与 $\mathcal{D}_{ij}$ 相同, 方位相差 180° , 并且当 $e \in \mathcal{D}_{ij}$ 时, 即 $\mathcal{D}_{ij} \cap P_{ij} \neq \phi$; 当 $e \in \mathcal{F}_{ij}^c$ 时, $\mathcal{D}_{ij} \cap P_{ij} = \phi$. 因为 $\mathcal{D}_{ij}$ 是 G 的一部分, 由 G 的边界的单调性, 上面可以写成: 当 $e \in \mathcal{F}_{ij}$ 时, $G \cap P_{ij} \neq \phi$; 当 $e \in \mathcal{F}_{ij}^c$ 时, $G \cap P_{ij} = \phi$.

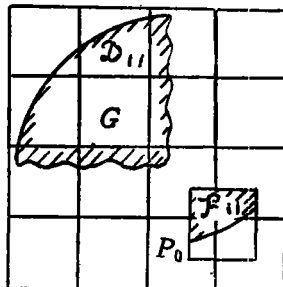


图 21

在 P_0 中, 我们定义一个 $n \times n$ 矩阵:

$$M(\mathcal{F}_{ij}) = \begin{pmatrix} \tau_{ij}(S_{11}) & \tau_{ij}(S_{12}) & \cdots & \tau_{ij}(S_{1n}) \\ \tau_{ij}(S_{21}) & \tau_{ij}(S_{22}) & \cdots & \tau_{ij}(S_{2n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_{ij}(S_{n1}) & \tau_{ij}(S_{n2}) & \cdots & \tau_{ij}(S_{nn}) \end{pmatrix}$$

其中 S_{hh} 是 P_0 中 n^2 个子格点的中心,

$$\tau_{ij}(S_{hh}) = \begin{cases} 1 & \text{当 } S_{hh} \in \mathcal{F}_{ij} \\ 0 & \text{当 } S_{hh} \in \mathcal{F}_{ij}^c \end{cases}$$

$$(k, h = 1, 2, \dots, n)$$

把 $M(\mathcal{F}_{ij})$ 中凡是数字 1 的地方用边长为 $\frac{a}{n}$ 的子格点代

替, 就得到图形 $\mathcal{F}'_{ij}$ 的精确直方图, 如图 22 所示。

由引理 1 可知

若 e 位于 S_{hh} 且 $G \cap P_{ij} \neq \phi$, 则 $S_{hh} \in \mathcal{F}_{ij}$

若 e 位于 S_{hh} 且 $G \cap P_{ij} = \phi$, 则 $S_{hh} \in \mathcal{F}_{ij}^c$

所以 $\tau_{ij}(S_{hh})$ 的定义可以改写成

$$\tau_{ij}(S_{hh}) = \begin{cases} 1 & \text{当 } e \text{ 位于 } S_{hh}, \text{ 且 } G \cap P_{ij} \neq \phi \\ 0 & \text{当 } e \text{ 位于 } S_{hh}, \text{ 且 } G \cap P_{ij} = \phi \end{cases}$$

由于 $\mathcal{F}_{ij}$ 的形状与 $\mathcal{D}_{ij}$ 的形状相同, 但方位相差 180° , 因此我们定义一个 $n \times n$ 矩阵:

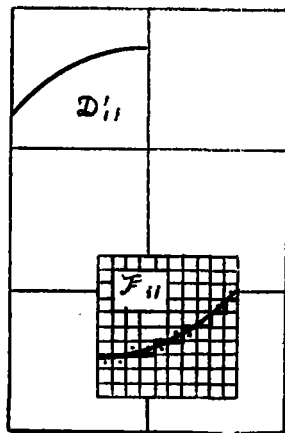


图 22

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{ij}(S_{nn}) & \cdots & \tau_{ij}(S_{n2}) & \tau_{ij}(S_{n1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_{ij}(S_{2n}) & \cdots & \tau_{ij}(S_{22}) & \tau_{ij}(S_{21}) \\ \tau_{ij}(S_{1n}) & \cdots & \tau_{ij}(S_{12}) & \tau_{ij}(S_{11}) \end{pmatrix}$$

其中

$$\tau_{ij}(S_{hh}) = \begin{cases} 1 & \text{当 } e \text{ 位于 } S_{hh}, \text{ 且 } G \cap P_{ij} \neq \phi, \\ 0 & \text{当 } e \text{ 位于 } S_{hh}, \text{ 且 } G \cap P_{ij} = \phi \end{cases}$$

$$(k, h = 1, 2, \dots, n)$$

把 M_{ij} 中凡是数字 1 的地方用边长为 $\frac{a}{n}$ 的子格点代替, 就得到 $\mathcal{D}_{ij}$ 的精确直方图。因为

G 经过变换 ψ 变成 G^* 后, $\mathcal{D}_{ij}$ 的形状与 G^* 上相应部分的图形 $\mathcal{D}_{ij}^*$ 形状同相, 我们把 M_{ij} 记成 M_{ij}^* , 表示 G^* 上图形 $\mathcal{D}_{ij}^*$ 所对应的矩阵。这样, 就得到 G^* 的一部分图形 $\mathcal{D}_{ij}^*$ 的精确直方图 $H(\mathcal{D}_{ij}^*)$ 。

当 G 上的 $\mathcal{D}_{ij}$ 位于临界点 A 附近时, 由引理 4 可知, 在 F_0 内有个区域 $\mathcal{F}_{ij}$, 它的形状虽然与 $\mathcal{D}_{ij}$ 不相同, 但当 G 作了变换 ψ 以后, $\mathcal{F}_{ij}$ 就与 G^* 中某部分图形 $\mathcal{D}_{ij}^*$ 的形状相同了, 如图 23。与前面的讨论类似, 我们定义矩阵 $M(\mathcal{F}_{ij})$ 和 M_{ij}^* 。如果把 M_{ij}^* 中凡是数字

1 的地方用边长为 $\frac{a}{n}$ 的子格点代替, 则得到 G^* 中以某

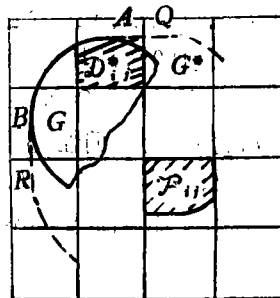


图 23

段临界线段为边界的一部分图形的精确直方图。同理可以讨论 $\mathcal{D}_{ij}$ 位于临界点 B 附近的情形。这样, 我们就可以得到 G^* 中以曲线 AB 以及某临界线段 AQ 、 BR 为边界的一部分图形 $\mathcal{D}_{ij}^*$ 的精确直方图 $H(\mathcal{D}_{ij}^*)$ 。

当 N' 上的参考点 e 分别位于 β 、 γ 、 δ 时, 用同样的讨论, 可以得到 G^* 中以曲线 $A'B'$ 、 $B''C'$ 、 $C'D'$ 以及某些临界线段为边界的一部分图形 $\mathcal{D}_{ij}^*$ 的精确直方图 $H(\mathcal{D}_{ij}^*)$ 。

把所有的 $\mathcal{D}_{ij}^*(i, j=1, 2, \dots, m)$ 摆在一起就得到 G^* , 把所有的 $H(\mathcal{D}_{ij}^*)$ 摆在一起就得到 G^* 的精确直方图 $H(G^*)$, 它所对应的矩阵是一个 $m \times n$ 行, $m \times n$ 列的矩阵:

$$M^* = \begin{pmatrix} M_{11}^* & M_{12}^* & \cdots & M_{1m}^* \\ M_{21}^* & M_{22}^* & \cdots & M_{2m}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{m1}^* & M_{m2}^* & \cdots & M_{mn}^* \end{pmatrix}$$

由 G^* 的定义, 只要对 $H(G^*)$ 作 ψ 的逆变换 ψ^{-1} , 则 $\psi^{-1}[H(G^*)]$ 就是 G 的精确直方图。

识别面积在 $2a \times 2a$ 内的未知物体的触觉装置 (工作台), 最少可以只用 9 个面积为 $a \times a$ 的方形触点的按钮开关。如果工作台的面积不变而增加按钮开关的个数, 则可以在减少接触次数的情况下达到同一个预定的识别精度。实际使用触觉装置时, 并不需要考虑参考点 e 的位置和方形区域 P_0 的位置。只要在与未知物体的接触过程中, 把工作台从某一起始点按 $\frac{a}{n}$ 的步距水平平移, 平移 n 次后, 回到起始点之下 $\frac{a}{n}$ 距离的位置,

从第二行开始继续按 $\frac{a}{n}$ 的步距水平平移, 如此动作, 直到移动 n^2 次为止。根据每次平

移时工作台上的按钮与未知物体接触的情况, 每个按钮开关都可以输出 $n \times n$ 个信号, 若按钮接通时记为 1, 不接通时记为 0, 则可以把这 $n \times n$ 个数字从右到左, 从下到上排成一个 $n \times n$ 矩阵。然后把相应于每个按钮开关的 $n \times n$ 矩阵按照按钮的位置排列在一起, 构

成一个 $3n \times 3n$ 矩阵。把这个矩阵中凡是数字 1 的地方用 $\frac{a}{n} \times \frac{a}{n}$ 的子格点代替, 便得到一个直方图。最后把这个直方图按变换 ψ 所定义的反方向平移距离 a , 就得到未知物体图形的精确直方图了。

本文定理 1 仅讨论了物体平移时究竟可能产生多少直方图的问题, 对于物体不仅平移而且旋转时的情况, 将在其它文章予以讨论。定理 2 提供了利用多次接触物体, 使机器人“学会”识别未知物体精确形状的方法, 从理论上说, 只要接触次数充分多, 就可以得到未知物体充分精确的形状。这个问题不涉及物体的旋转, 可以在实际问题中予以应用。

本文定理 1 中的问题是美国 Duke 大学王保硕教授提出的。本文在写作过程中得到王教授的关心和鼓励, 谨在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

帕夫利迪斯, 结构模式识别, 张寿萱等译。

Distinguish Pattern by the Touch Sensor System

Wang Xiao-xing

Abstract

In this paper, first we study the different shapes of the histograms of a certain graph when this graph is translated on the given mesh. By means of this result, the bottom surface shapes of known workpieces can be distinguished by the touch sensor system of the robot. Then, we obtain a method of judge of a unknown shape by the touch sensor system.