

人工粘性法数值解 一维 BURGERS 方程

宁 杰

提 要 本文通过对 Brailovskaya 格式的截断误差分析, 对该格式作了人工粘性项修正。进行了数值实验, 与文献[2]中所研究的几种格式作了比较。说明在计算精度和收敛速度等方面都较原格式为好。

本文通过数值实验, 进一步研究了隐式分裂格式, 找到了较佳计算参量。

一、引 言

对许多实际问题所提出的非线性偏微分方程, 由于目前无法求出解析解, 需要人们进行数值解。差分方法是其中较普遍的一种方法。而通过对具有准确的解析解的一些典型偏微分方程, 如一维无粘 Burgers 方程, 进行数值实验来验证差分格式的计算精度与收敛速度。近年来 Sin, J. Cheng^[1]、忻孝康等^[2]及其他人在这方面做了一些工作。

Brailovskaya 格式, 是一个守恒型的二步显格式, 它在气动问题的数值计算中, 有较广泛的应用。这个格式的优点在于收敛速度较快, 数值振荡衰减较快, 而且程序较简易。但是, 在处理激波问题时, 激波附近的数值振荡较大。本文通过加人工粘性项的方法对此作了改进, 并将数值实验的结果与文献[2]中所提出的几种格式的结果进行了比较。

一般显示格式, 由于稳定性的限制, 时间步长 Δt 不能取得较大。因此, 在实用上, 受限制较宽的隐式格式要经济些, 本文在文献[2]的基础上, 进一步研究了在较大 Δt 下用隐式分裂格式求解一维 Burgers 方程的特性。

二、基本模型方程

一维 Burgers 方程 (无量纲形式) 为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

其中

$$Re = \frac{\Delta W}{2} L \Bigg| \mu$$

这里 ΔW 为间断面处速度跃变值; L 为流域区间长度; μ 为运动粘性系数。

对于定常问题, 方程为

$$u \frac{du}{dx} = \frac{1}{Re} \frac{d^2u}{dx^2} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (2.2)$$

边界条件为

$$u(1) = -1, \quad u(-1) = 1 \quad (2.3)$$

方程(2.2)的定常拟激波流动的一个解析解为

$$u^*(x) = -Th \left(\frac{Re x}{2\beta} \right) \Big| \beta \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (2.4)$$

其中

$$\beta = Th \frac{Re}{2\beta} \quad (2.5)$$

现用“时间相关法”对方程(2.2)进行数值求解。

三、基本格式

1. 隐式分裂格式(I)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_j^n}{\frac{1}{2} \Delta t} &= -\tilde{u}_j^n \frac{1}{2 \Delta x} \left[\frac{1}{2} (u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \right] \\ \frac{1}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \Delta t} &= \frac{1}{Re \Delta x^2} \left[\frac{1}{2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}) \right] \end{aligned} \right. \quad (3.1)$$

其中

$$\tilde{u}_j^n = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$$

这个格式是恒稳的, 相容于非定常的 Burgers 方程, 精度为 $O(\Delta t, \Delta x^2)$ 。

2. BRAILOVSKAYA 格式(I)

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{u}_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{r}{4} [(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2] + S [u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n] \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{r}{4} [(\bar{u}_{j+1}^{n+1})^2 - (\bar{u}_{j-1}^{n+1})^2] + S [\bar{u}_{j+1}^{n+1} - 2\bar{u}_j^{n+1} + \bar{u}_{j-1}^{n+1}] \end{aligned} \right. \quad (3.2)$$

其中

$$r = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad S = \frac{r}{Re \Delta x}$$

这个格式相容于非定常的 Burgers 方程, 其精度为 $O(\Delta t, \Delta x^2)$, 文献[3]给出的稳定的充分条件是

$$r \leq \min \left\{ \frac{Re \Delta x}{2}, 1 \right\} \quad (3.3)$$

在这里取 $|u_c| = 1$.

3. BRAILOVSKAYA 格式的修正 (II)

考虑一般的线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_x(u) = 0 \quad (3.4)$$

其差分格式为

$$B_1 u^{n+1} = B_0 u^n \quad (3.5)$$

其中 B_0, B_1 为差分算子。

对于(3.5)式进行台劳展开, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_x(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^1 \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \quad (3.6)$$

其中 $u_n^1 = u_n^1(\Delta x, \Delta t)$ ($n=0, 1, 2, \dots$)。 (3.6)式可改写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1} \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} \quad (3.7)$$

$$u_n = u_n(\Delta x, \Delta t) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

设 $u(x, t) = e^{\alpha t} e^{ikx}$, 其中 k 为实数, $\alpha = A + Bi$. 代入(3.7)式, 即可求得

$$\begin{cases} A = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} k^{2n} (-1)^n \\ B = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{2n+1} k^{2n+1} \end{cases} \quad (3.8)$$

从上可以看出, 奇次导数项起到色散的作用, 而偶次导数项起到耗散的作用。

对于非线性偏微分方程, 用局部线性化和量级分析的方法, 进行类似的分析, 对格式作出修正。以格式(I)为例。

对格式(I)应用台劳展开, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \left(u^2 \Delta t + \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O\left(\frac{\Delta x^3}{r}, \Delta t\right) \quad (3.9)$$

对右边 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的系数做如下局部线性化处理:

$$\text{取} \quad u = |u_c| \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \left| \frac{|u_c| - |u|_{\min}}{\Delta x} \right|$$

其中, u_c 为格式(I)在邻近“激波”处的当地线性化速度, $|u|_{\min}$ 为最小速度值, u_c 和 $|u|_{\min}$ 可由格式(I)的数值实验确定。在我们的问题中, $|u_c| = 1$, $|u|_{\min} = 0$. 所以,

(3.9)式右边第一项可写为 $-\frac{1}{2}(\Delta t + \Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. 由于这项是负的, 因而减小了数值耗散, 引起振幅增大。为了抵消这一影响, 我们在原微分方程右端加上一项人工粘性项:

$h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x + \Delta t)$, 其中 h 由数值实验定出:

$$h = \begin{cases} 0 & (Re \Delta x \leq 5) \\ \left(0.1 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 0.01 Re \Delta x\right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t} & (Re \Delta x > 5) \end{cases} \quad (3.10)$$

加入人工粘性项后,使得振幅衰减,这样在一定的波数后的波,可认为对解的贡献极小。而数值振盪的原因之一——色散,是通过影响波数而起作用的。所以,人工粘性项的作用,限制了数值色散,从而也减小了数值振盪。

四、数值实验

定常边值: $u(-1)=1, u(1)=-1$

初始速度线性分布,即 $u(x,0)=-x \quad (-1 \leq x \leq 1)$

趋于定常的判据为

$$\varepsilon^n = \max_{1 \leq j < N} |u_j^n \text{数值解} - u_j^{n-1} \text{数值解}| / \Delta t \leq 0.001 \quad (4.1)$$

最大误差定义为

$$E = \max_{1 \leq j < N} |u_j \text{解析解} - u_j \text{数值解}| \quad (4.2)$$

这里, $N=1/\Delta x+1$ 为总节点数。

在数值实验中,我们取关于坐标原点对称的41个节点进行计算,其它节点取边界值,这并不影响结论的正确性和一般性。

除了安排和文献[2]一样的数值实验外,还对稳定边值和大的 Δx 、 Δt 的情况进行了数值实验。

以 $\Delta t=0.01, \Delta x=0.025$ 为主,整理了附录中的图线。

五、数值实验结果分析

1. 对于格式 I, 在较小的时间步长时,其结果和文献[2]的结论一致,但是,在较大的网格比 r 下,计算结果比按文献[2]中给出的参数进行计算的结果要好。数值实验表明, S 对计算的结果影响较大(参见图1)。在 $Re \Delta x \leq 15$ 时,取 $S=0.3$ 左右,这时计算效果较好。当 $S=0.3$ 时,计算精度较好,而且收敛速度较快,一般都是25步左右收敛。而以 $Re \Delta x=10$ 时为最好,这时 $E=0.0025$ 。在 $Re \Delta x > 15$ 时,以 $S=0.5$ 左右为好(参见图2)。

计算结果表明, S 太小或略接近1,计算都发散,其理由可参阅文献[4]。

2. 对于格式 II, 在 $Re \Delta x=4$ 时,计算精度和收敛速度都较好,最大误差一般都在0.035左右。与拟正激波解比较,误差为 10^{-4} 量级。当 $Re \Delta x > 5$ 时,如 $Re \Delta x=10$,数值振盪较大,振幅达22%左右,随 $Re \Delta x$ 增大而增大,但振盪衰减速度也较快,一般只在几点内发生数值振盪(参见图3和4)。

3. 对于格式 III, 不仅在计算速度,而且在计算精度上都远较格式 II 为好。我们以 $\Delta t=0.01, \Delta x=0.025$ 为例,列于表1 (K 为迭代次数)。

表 1

格式 I	$Re \Delta x$	E	K	格式 II	$Re \Delta x$	E	K
	6	0.124585	91		6	0.0732306	99
8	0.186831	98	8	0.0281244	97		
10	0.228391	110	10	1.731×10^{-3}	95		
15	0.289961	179	15	0.0413408	93		
20	0.32912	205	20	0.0588186	92		

格式 II 的数值振荡区域较格式 I 为小 (参见图 3)。在图 5、6、7、4 中, 分别画出在不同的网格比 r 下, 两种格式的计算精度和速度随 $Re \Delta x$ 变化的情况。表 2 中采用同样参数比较了格式 II 和文献 [2] 中所载的几种格式的计算结果。

六、结 束 语

通过数值实验, 我们有以下结论:

1. 格式 II 不仅精度高, 收敛速度快, 而且数值振荡区域较小。说明采用人工粘性的方法, 可以收到事半功倍的效果。

2. 在应用隐式分裂格式时, Δt 不宜取得太小, 在 $Re \Delta x \leq 15$ 时, 应使 $S=0.3$ 左右为好, 在 $Re \Delta x > 15$ 时, 取 $S=0.5$ 左右为好。

如将本文的结果推广到一般非线性方程组的数值求解中, 由于边界条件较复杂, 以及方程之间存在耦合影响, 尚须进一步深入研究。

本文承王承尧、陈铸曾两位老师热忱指导和帮助, 在此深表谢意。

表 2

Mac Cormack 格式			Mac Cormack 半隐格式			Cheng 格式		
$Re \Delta x$	K	E	$Re \Delta x$	K	E	$Re \Delta x$	K	E
5	84	0.0953683	5	94	0.102346	5	100	0.017276
10	138	0.232202	10	97	0.232957	10	79	0.160429
20	96	0.313622	20	103	0.314351	20	74	0.240277

Allen-Cheng 格式			格式 III		
$Re \Delta x$	K	E	$Re \Delta x$	K	E
5	87	0.0830902	5	91	0.0830456
10	111	0.228379	10	95	1.731×10^{-3}
20	206	0.36405	20	92	0.0588186

注: 前四种格式的结果取自于陈宏、张育林的计算结果。

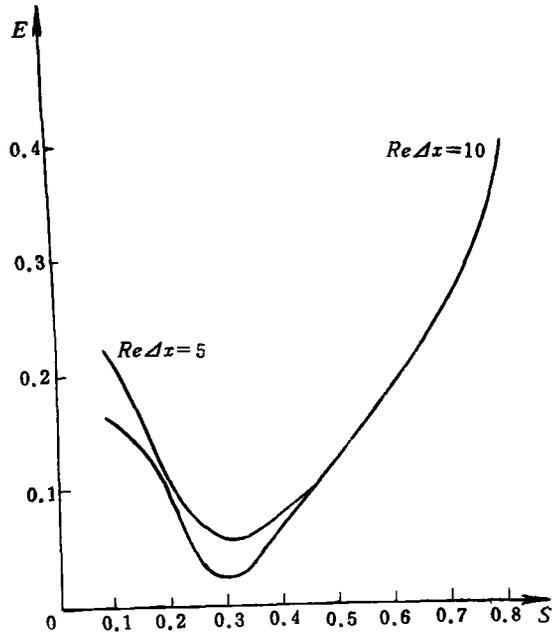


图 1

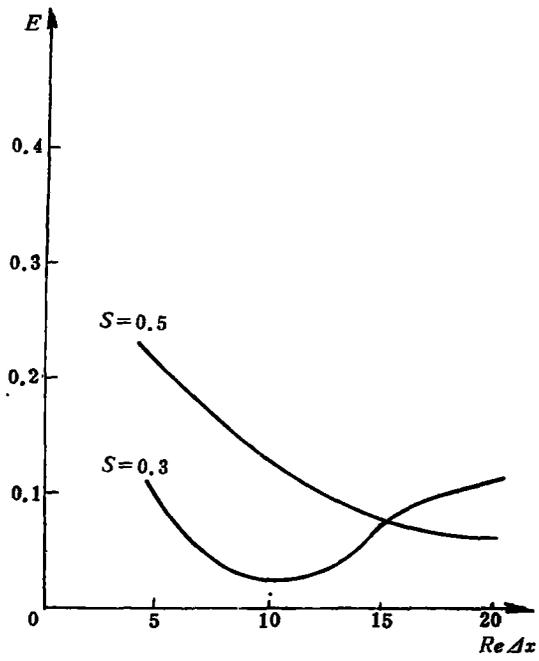


图 2

图 3 “激波图”

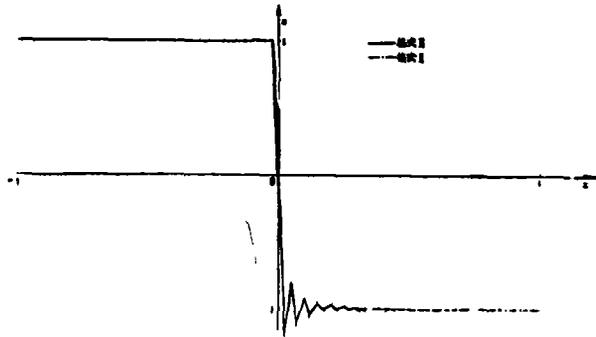


图 4 (格式II)

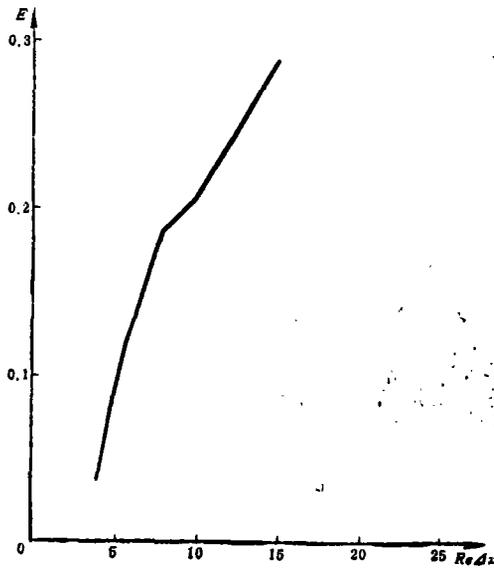
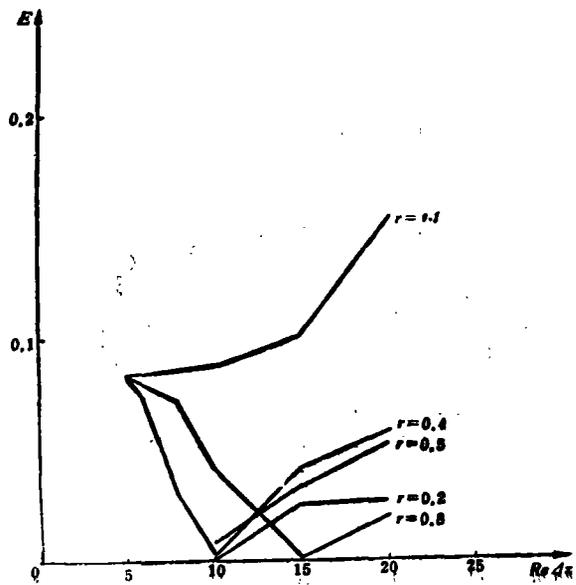


图 5 (格式III)



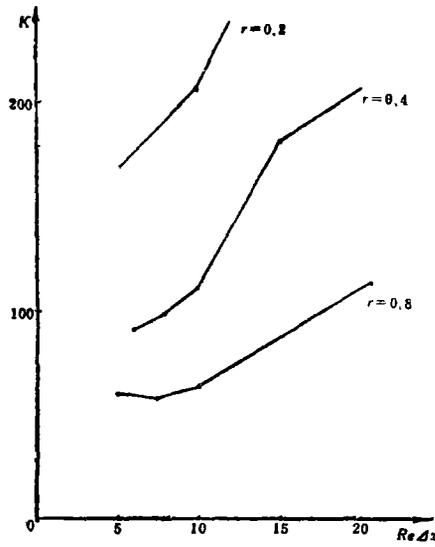


图 6 (格式II)

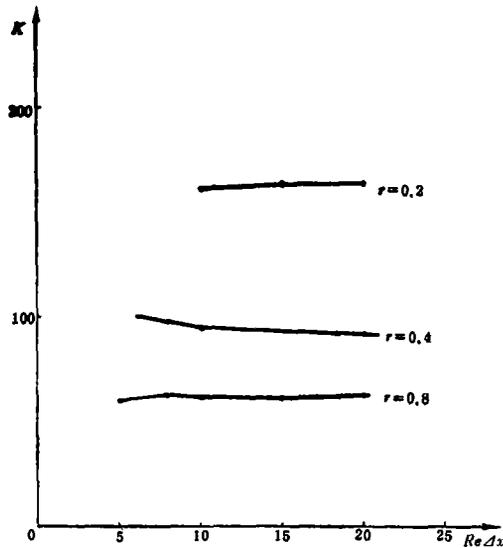


图 7 (格式III)

参 考 文 献

- [1] Sin, J. Cheng, Computation Accuracy and Mesh Reynold Number.
- [2] 忻孝康等, 一维 Burgers 方程的各种差分格式研究, 上海力学, 1980, 第一期.
- [3] R. Peyret and H. Viviani, Computation of Viscous Compressible Flows Based on the Navier-stokes Equation, AGARD-AG-212.
- [4] C. K. Chu, Numerical Method in Fluid Dynamics, Advances in Appli-

ed Mechanics vol.18.

The Numerical Solutions of One Dimension Burgers Equation by Means of Artific Viscosity Method

Ning Jie

Abstract

The paper made artific viscosity correction through truncation error analysis of Brailovskaya scheme. The numerical test was produced, and its results were compared with the results of other several schemes in literature [2]. The comparison showed that it is better in respects of the calculating precision and velocity.

By means of numerical test, present paper researched further implicit splitting scheme. The better calculating parameter was found.