等值电路法列写线性网络的状态方程

李 国 吉

提 要 本文介绍一种新的编写线性网络状态方程的方法，优点是不必列写任何方程式，尤其是可以省略消去非状态变量的复杂计算过程。提出一种用检查“量纲”的办法来核对计算结果，以便及时纠正。

一、一般表达式

对于由二端电阻器、电容器、电感器和独立电源组成的线性定常网络，一般总是选取电容电压 v_c 与电感电流 i_L 作为状态变量。标准形式方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{w} \tag{1}$$

$\boldsymbol{x}$ 代表状态变量，$\dot{\boldsymbol{x}}$ 代表 $d\boldsymbol{x}/dt$. 设有 n 个状态变量，则 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 均为 n 阶列向量。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵。设有 m 个输入，则 $\boldsymbol{w}$ 为 m 阶列向量，矩阵 $\boldsymbol{b}$ 为 $n\times m$ 阶矩阵。

单个输入时($m=1$)，$\boldsymbol{w}$ 为一标量，$\boldsymbol{b}$ 为 n 阶列向量。这时，(1)式可写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots a_{1n}x_n + b_{11}w \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots a_{2n}x_n + b_{21}w \\ \cdots\cdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots a_{nn}x_n + b_{n1}w \end{cases} \tag{2}$$

选取状态变量后，编写状态方程的工作就是确定 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 中诸元素 a_{11}、a_{12}……和 b_{11}、b_{21}……。这些元素取决于网络元件和网络图形。

二、怎样从相应的等值电路求解 A 和 b 中诸元素

根据迭加原理，由(2)式可得

$$a_{11} = \left.\frac{\dot{x}_1}{x_1}\right|_{\substack{x_2=0\\x_3=0\\\cdots\cdots\\x_n=0\\w=0}}; \qquad a_{12} = \left.\frac{\dot{x}_1}{x_2}\right|_{\substack{x_1=0\\x_3=0\\\cdots\cdots\\x_n=0\\w=0}} \quad \cdots\cdots \tag{3}$$

本文1982年12月25日收到

以及

$$b_{11}=\left.\frac{\dot{x}_1}{w}\right|_{\substack{x_1=0\\x_2=0\\\cdots\\x_n=0}}\;;\qquad b_{21}=\left.\frac{\dot{x}_2}{w}\right|_{\substack{x_1=0\\x_2=0\\\cdots\\x_n=0}}\qquad\cdots\cdots \tag{4}$$

下面，我们用具体的例子来说明对这些元素的求法。

例 1　电路如图 1，试列状态方程。

解　选　$x_1=i_1$

$x_2=v_2$

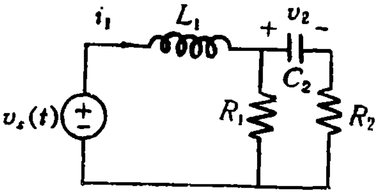

图　1

求 $\boldsymbol{A}$ 中诸元素时将输入置零。

1．先求下标相同的元素 a_{jj} 例如：

$$a_{11}=\left.\frac{\dot{x}_1}{x_1}\right|_{x_2=0}=\left.\frac{di_1}{dt}\cdot\frac{1}{i_1}\right|_{v_2=0} \tag{5}$$

由(5)式求得相应的等值电路如图 2，由图 2 可写出

$$L_1\frac{di_1}{dt}+i_1\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)=0$$

$$\therefore\qquad a_{11}=\frac{di_1}{dt}\cdot\frac{1}{i_1}=-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\Big/L_1$$

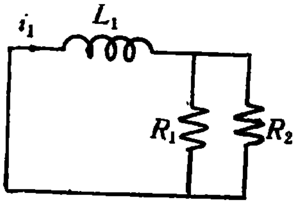

图　2

实际上，求 a_{11} 时可以保持 x_1 支路不动，而将其它所有电容支路短路；所有电感支路开路，用类似求解一阶电路的三要素法中求时间常数 τ 的方法求得（参看图 2）

$$a_{11}=-\frac{1}{\tau}=-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\Big/L_1$$

同理求 a_{22} 时，保持 x_2 支路不动，将 L_1 支路开路，便得到相应的等值电路如图 3

$$\therefore\qquad a_{22}=-\frac{1}{C_2(R_1+R_2)}$$

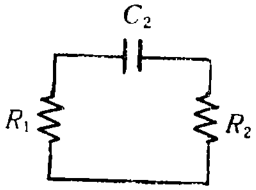

图　3

所有下标相同的元素 a_{jj} 都可用这种办法求得，量纲均为[秒]$^{-1}$．当第 j 条支路为电容器（电感器）时，文字表达式为 $-\frac{1}{RC}\left(-\frac{R}{L}\right)$．利用这一特点，可以发现计算结果是否有错，以便及时纠正。

对于不是非常复杂的网络，求 a_{jj} 时，完全不必画相应的等值电路，直接从原电路图就可方便地写出它们。

2. 再求下标不同的元素 a_{jk}

由于

$$a_{12}=\frac{\dot{x}_1}{x_2}\bigg|_{x_1=0}=\frac{di_1}{dt}\cdot\frac{1}{v_2}\bigg|_{i_1=0}$$

据此作出相应的等值电路如图 4．由图 4 得

$$L_1\frac{di_1}{dt}+v_2-\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot v_2=0$$

$$\therefore\qquad a_{12}=\frac{di_1}{dt}\cdot\frac{1}{v_2}=-\frac{R_1}{R_1+R_2}\Big/L_1$$

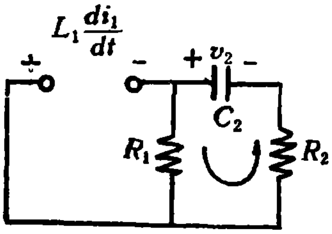

图 4

求解 a_{jk} 的规律是：保持第二个下标支路 k 不动，将第一个下标支路 j 置零。如支路 j 为电感器则将其开路，但要标出电感器两端的开路电压 $L\frac{di_L}{dt}$；如为电容器则将其短路，但要标出通过电容器的电流 $C\frac{dv_c}{dt}$．将其它电容器（电感器）均短（开）路，电阻器支路不动，即可得到其相应的等值电路。

根据这个规律求 a_{21}，保持 L_1（支路）不动；将 C_2（支路）短路并标出通过 C_2 的电流 $C_2\frac{dv_2}{dt}$ 则得到求解 a_{21} 的等值电路如图 5．由图 5 写出

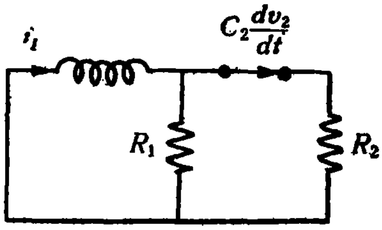

图 5

$$i_1=C_2\frac{dv_2}{dt}+C_2\frac{dv_2}{dt}\cdot R_2/R_1$$

$$=C_2\frac{dv_2}{dt}\cdot\frac{R_1+R_2}{R_1}$$

$$\therefore\qquad a_{21}=\frac{dv_2}{dt}\cdot\frac{1}{i_1}=\frac{1}{C_2}\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

下面，我们研究一下 a_{jk} 的量纲和文字表达式。回想一下 a_{jj} 的量纲总是[秒]$^{-1}$，表达式与第一个下标支路 j 有关，如支路 j 为电容器（电感器），形式是 $-\frac{1}{RC}\left(-\frac{R}{L}\right)$．而 a_{jk} 的量纲，既与支路 j 又与支路 k 的性质有关，表达式主要取决于第一个下标支路 j 的性质。分为四种情况，如表 1 所示。

表 1

第一个下标支路 j	第二个下标支路 k	a_{jk} 的形式	a_{jk} 的量纲
电容器	电容器	$\pm\frac{1}{C_j}\cdot\frac{1}{R}$	[秒]$^{-1}$
	电感器	$\pm\frac{1}{C_j}\left(或\pm\frac{1}{C_j}\cdot\frac{R'}{R''}\right)$	[法]$^{-1}$
电感器	电感器	$\pm\frac{R}{L_j}$	[秒]$^{-1}$
	电容器	$\pm\frac{1}{L_j}\left(或\pm\frac{1}{L_j}\cdot\frac{R'}{R''}\right)$	[亨]$^{-1}$

可以看出：

① 无论是 a_{jj} 还是 a_{jk} 在形式上都与第一个下标支路 j 的性质有关。所以，如果支路 j 为电容器（电感器）则 $\boldsymbol{A}$ 中这一行的所有元素均有因子 $\frac{1}{C_j}\left(\frac{1}{L_j}\right)$。

② a_{jj} 前面总冠以“－”号，而 a_{jk} 前面的符号与每个状态变量的参考方向有关，由于参考方向是可以任意选定的，故有时冠以“＋”号。有时冠以“－”号。

③ 无论 a_{jj} 或 a_{jk} 有时可以为 0．

3. 最后求元素 $\boldsymbol{b}_{jj}$ 与 $\boldsymbol{b}_{jk}$（这时应保持输入支路 w 不动）

由于

$$b_{11}=\frac{\dot{x}_1}{w}\bigg|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}=\frac{di_1}{dt}\cdot\frac{1}{v_s}\bigg|_{\substack{i_1=0\\v_2=0}}$$

我们将支路 1 置零，由于支路 1 为电感器所以将其开路，并且标出开路电压 $L_1\frac{di_1}{dt}$；同时将支路 2 置零，由于支路 2 为电容器所以将其短路，得到求 b_{11} 的电路如图 6，由图 6 有

$$v_s=L_1\frac{di_1}{dt}$$

$$\therefore\qquad b_{11}=\frac{di_1}{dt}\cdot\frac{1}{v_s}=\frac{1}{L_1}$$

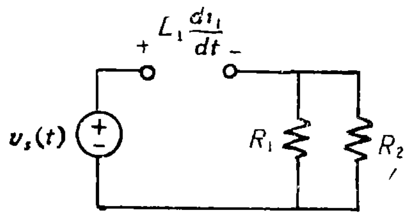

图 6

类似地由于

$$b_{21}=\frac{\dot{x}_2}{w}\bigg|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}=\frac{dv_2}{dt}\cdot\frac{1}{v_s}\bigg|_{\substack{i_1=0\\v_2=0}}$$

我们将支路 2 置零，由于支路 2 为电容器所以将其短路，并且标出电容电流 $C_2\frac{dv_2}{dt}$，再

将支路 1 电感器开路，得到求 b_{21} 的电路如图 7．由图 7 有

$$C_2\frac{dv_2}{dt}(R_1+R_2)=0$$

$$\therefore \qquad b_{21}=\frac{dv_2}{dt}\cdot\frac{1}{v_s}=0$$

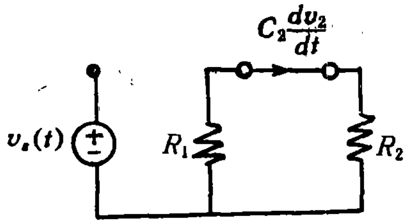

图 7

实际上，直接从原电路图即可观察出 $b_{21}=0$（因为将 L_1 断开，即可看出 $C_2\frac{dv_2}{dt}=0$）.

下面，研究在一般情况下求解 b_{jj} 与 b_{jk} 的规律。b_{jj} 与 b_{jk} 的形式与 a_{jk} 相似，也是决定于第一个下标支路 j，如支路 j 为电容器（电感器）则具有因子$\frac{1}{C_j}\left(\frac{1}{L_j}\right)$. b_{jj} 和 b_{jk} 的量纲既与第一个下标支路 j 的性质又与第二个下标支路 k 的性质有关。注意：这时第二个下标支路就是输入支路 w，所以 b_{jj} 和 b_{jk} 的量纲取决于第一个下标支路 j 和输入 w 的性质。也分为四种情况，如表 2 所示。

表 2

第一个下标支路	输入支路 w	b_{jj} 和 b_{jk} 的形式与量纲	
电容器	电压源	$\pm\frac{1}{C_jR}$	[秒]$^{-1}$
	电流源	$\pm\frac{1}{C_j}\left(\text{或}\pm\frac{1}{C_j}\cdot\frac{R'}{R''}\right)$	[法]$^{-1}$
电感器	电流源	$\pm\frac{R}{L_j}$	[秒]$^{-1}$
	电压源	$\pm\frac{1}{L_j}\left(\text{或}\pm\frac{1}{L_j}\cdot\frac{R'}{R''}\right)$	[亨]$^{-1}$

观察表 2，我们发现一个有趣的现象：将表 2 中的电压源（电流源）看成一个等值的电容器（电感器），则 b_{jj} 与 b_{jk} 的形式与量纲就与 a_{jk} 的形式与量纲具有同样的规律。因此，我们得到如下结论：无论是求 $\boldsymbol{A}$ 中诸元素还是求 $\boldsymbol{b}$ 中诸元素，在形式上都取决于第一个下标支路 j 的性质，如支路 j 为电容器(电感器)则具有因子$\frac{1}{C_j}\left(\frac{1}{L_j}\right)$. 在量纲上，如两个下标支路性质相同，都是电容器（或等值的电容器，实际为电压源）或都是电感器（或等值的电感器，实际为电流源）则量纲为[秒]$^{-1}$．如两个下标支路性质相异，一个为电容器另一个为电感器则量纲取决于第一个下标支路 j，如支路 j 为电容器（电感器）则量纲为[法]$^{-1}$（[亨]$^{-1}$）。

当然，b_{jj} 或 b_{jk} 有时可以为 0．

本题的状态方程为

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{di_1}{dt} \\ \\ \dfrac{dv_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2} \quad L_1 & -\dfrac{R_1}{R_1+R_2} \quad L_1 \\ \\ R_1/C_2(R_1+R_2) & -1/C_2(R_1+R_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L_1} \\ \\ 0 \end{pmatrix} v_s(t)
$$

三、小　　结

对于线性定常网络，选电容电压 v_c 和电感电流 i_L 作为状态变量，写出标准形式状态方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{w}$，关于 $\boldsymbol{A}$ 中主对角线元素 a_{jj} 的求法，可以由等值的一阶子网络用求时间常数的办法得到，而这一点可以从原电路直接观察出来。如果熟悉了这种方法，则 a_{jk} 和 $\boldsymbol{b}$ 中的某些元素也是不难观察出来的；尤其是其中某些为 0 的元素。如果沒有把握，最好作出相应的等值电路图。表 1 和表 2 对检查计算结果是有帮助的。此法关鍵在于画出正确的等值电路图。注意抓住 j 与 k 两条支路，尤其要注意第一个下标支路 j 的性质。

这种方法可以推广应用于线性的含四端元件的互感网络、回转器网络、理想变压器网络和受控源网络，原则上也可应用于线性时变网络。

Equivalent-Circuit Method for Writing the State Equations of Linear Networks

Li Guo-ji

Abstract

In this paper, a new method for writing the state equations is developed. The advantage of the method is that one need not write any differential equations. Especially, the procedures of eliminating unstate variables can be avoided. A method is also presented for checking the results.