关于博弈问题解的概念

刘 德 铭

提 要 本文从"平衡"的观点，对min-max定理以来，博弈问题的解的概念之演变、发展作了除合评述，特别对 vN—M 解以后关于解的讨论作了较详细的介绍。

1． 博奕论（Game theory，或译作对策论）所研究的对象是带有斗争性质的现象的数学模型。博奕论的最基本的问题是，在具有许多互相联系，互相制约（包括尖锐矛盾）的诸种因素的情况下，局中人应采取什么行动才能取得最佳的效果？这就要讨论"解"的问题。本文对博奕问题的解的概念作一个综合评述。

不难设想，在一个博奕模型中，各局中人的利益不同，目的迥异，有许多矛盾与冲突，因此他们要想达到各自"理想的"目标，一般来说是根本不可能的。他们必定在互相较量、斗争（包括交涉、谈判）之后达到某种"平衡"状态。这种平衡状态应该是各局中人都认为对自己来讲是最稳妥并且效果"最好"的。一旦打破这种平衡状态，便可能招致"坏"的结果，因而各局中人都普遍愿意保持这种状态。这种平衡状态，便是博奕论中解的概念的来源。可以说，博奕的解，无非是用数学的语言、符号把这种平衡状态明确表达出来而已。

2． 一个 n 人博奕常常采用以下的记号表示：

$$\Gamma=\langle I,\ \{S_i\}_{i\in I},\ \{H_i\}_{i\in I}\rangle \tag{1}$$

这里 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 是局中人的集合，S_i 表示第 i 个局中人的策略集（或空间），其中，局中人 i 的策略用 S_i 表示。当各局中人 i 分别采取策略 S_i，$i=1,2,\cdots,n$ 时，便形成一种局势或状态，在此状态中，局中人 i 赢得的一份记作 H_i．若以 $s=(s_1,\cdots,s_n)$ 记空间 $S=S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$ 中的一点，则 $H_i(s)$ 是定义在这笛卡尔乘积空间 $S=\prod_{i=1}^{n}S_i$ 上的函数。在 n 个局中人彼此独立地进行博奕且互不合作的情况下——即所谓 n 人非合作博奕——上面的解的概念应怎样提出呢？

假如在局势 $s=(s_1,\cdots,s_n)$ 中，局中人 i 将他目前的策略 s_i 换作 s_i^0，这样就得到新的局势。我们用记号 $s\,\|\,s_i^0$ 表示这个新局势，此时自然会给出以下的定义：

定义 1 如果局势 s 对局中人的任何策略 s_i^0，都有

$$H_i(s)\geqslant H_i(s\,\|\,s_i^0), \tag{2}$$

则称局势 s 对局中人 i 是有利的（或宜取的）。

本文1982年12月10日收到

这个定义的意义是显然的。

定义 2 若局势 s 对所有局中人均为有利，则称局势 s 为博奕的平衡局势（Equirium Situation).

这里，平衡局势，就是我们前面所说的解的概念。

通常，讨论一个博奕的平衡局势时，是在它的混合扩充意义下来讨论的。在此意义下，Nash 证明了以下定理：

定理 1 （Nash，1950)[10]正规型非合作 n 人有限博奕存在平衡局势。

Nash 的定理的证明是使用了 Brouwer 的不动点原理，证明很漂亮，从理论上讲，解决了一大类博奕的解的存在问题。但是这个定理证明不是构造型的，因而不能根据它来求解平衡局势。就我所知，虽然对各种特殊的博奕有过许多讨论，但目前尚未找到一种一般的求平衡局势的方法。此外，平衡局势的稳定性，也是一个尚待深入研究的问题。

3. 现在转入讨论一种简单而又重要的情况，即二人零和博奕（Two-person zerosum game). 此时局中人只有两人，分别记作局中人 1， 2，他们的策略空间分别记为 X，Y，其赢得函数分别为 $H_1(x,y)$，$H_2(x,y)$，$x\in X$，$y\in Y$，（这里仍然是在混合扩充意义下的）。所谓零和，是指 $H_1(x,y)+H_2(x,y)=0$,或 $H_2(x,y)=-H_1(x,y)$，因此，对二人零和的情况，博奕Γ可用$\langle X,Y,H\rangle$表示。为方便计，把 H_1 中下标略去而写作 $H(x,y)$，局中人 1 应设想他的对手力图使他赢得最少，即对手取 $y^*\in Y$ 使 $\min H(x,y)=H(x,y^*)$. 在此前提下，他应使自己获得最多，即他期望能取得$\max\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in Y}H(x,y)$，而他的对手——即局中人 2 的目的与他完全相反，却企求达到$\max\limits_{y\in Y}\min\limits_{x\in X}H_2(x,y)$. 然而$H_2(x,y)=-H(x,y)$,从而$\max\limits_{y\in Y}\min\limits_{x\in X}H_2(x,y)=\max\limits_{y\in Y}\min\limits_{x\in X}(-H(x,y))=\max\limits_{y\in Y}(-\max\limits_{x\in X}H(x,y)=-\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X}H(x,y)$. 这就是说，局中人 2 的损失最多是 $\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X}H(x,y)$. 比较双方的情况可知，局中人 1 可以保证他至少能得到$\max\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in Y}H(x,y)$，而局中人 2 要努力防止局中人 1 的所得超过$\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X}H(x,y)$. 可以设想，在平衡的状态下，这两个值应该相等。这个结果便是有名的 min－max 定理。

定理 2 (von Neumann，1928)[1] 对于任何二人零和博奕，总存在平衡点（equilibrium point)(x^*,y^*)使等式

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}H(x,y)=H(x^*,y^*)=\max_{x\in X}\min_{y\in Y}H(x,y) \tag{3}$$

成立。

这里，我们称 $v=\max\limits_{x}\min\limits_{y}H(x,y)$为此博奕的值。

这个定理是十分重要的，不妨说，它是博奕中最基本的定理。因此，它引起了许多数学家的兴趣。关于它的证法也十分繁多，总的说来不外纯代数的，或采用了分析的方法如不动点原理等类，其中1957 年 Dantzing 给出了对偶线性规划与矩阵博奕的关系，从而不仅证明了博奕的解的存在问题（即 min－max 定理），还给出了计算的方法——即化作线性规划问题进行求解[9]。

当然，求解二人零和博奕的方法还有其它的方法，可以说二人零和博奕是博奕论中理论最成熟的部分。

我们也可以用定义2中关于平衡局势（或平衡状态）的条件来检验 $H(x^*,y^*)$，这里x^*，y^*分别是局中人1，2所能采取的最好的策略了。当他们一旦改变其策略，立即有

$$H(x,y^*)\leqslant H(x^*,y^*),\ x\in X$$
$$H(x^*,y^*)\leqslant H(x^*,y),\ y\in Y$$

上面第二个不等式表明只要局中人2一改换其策略，损失便将增加，所以条件

$$H(x,y^*)\leqslant H(x^*,y^*)\leqslant H(x^*,y),x\in X,y\in Y \tag{4}$$

实际上是(x^*,y^*)为最优策略对的充要条件。易证(3)，(4)是等价的，这就说明由min－max定理所解定的最优策略对，就是我们一开始所讲的平衡状态时双方的策略对，也即是解。

4. 现在我们进一步讨论 n 人合作博奕（n－person cooperative game）的情况。由于局中人可以因彼此利益相近而进行结盟，所以情况远比非合作博奕复杂，但是前面的理论对此仍然很有启发性。

不妨从3人的正规零和博奕开始，因为它简单，并且便于同2人零和博奕进行比较。一个3人零和博奕可以写作：

$$\Gamma=\langle X,Y,Z,H^1,H^2\rangle \tag{5}$$

其中X，Y，Z分别是局中人1，2，3的策略空间（我们一直把它们理解为混合扩充的，下文同此假设，不再说明），x，y，z分别是他们的策略，$H^1(x,y,z)$，$H^2(x,y,z)$分别是局中人1，2的赢得函数，它们是定义在空间$X\times Y\times Z$上的实値函数。由于是零和的，$H^3(x,y,z)=-(H^1(x,y,z)+H^2(x,y,z))$，故上面就不列出$H^3$了。

3人博奕中，可能的结盟有以下几种：(a)三个局中人各自为自己的利益独立拼博，这即上面所讲非合作的情形，不再讨论。(b)三人中有两人因某种原因相结盟，而另一人单独行动，这种情况由于局中人的不同组合而分为三种。(c)全体局中人结成一个联盟。这样，只剩下他们如何共同协商分配其共同赢得了，故也不讨论。

在(b)的情况下，3人博奕就成了2人零和博奕，若把单个人的那个记作局中人A，而把由两人组成的联盟也看作一个"局中人"，作为局中人B，那么，我们可以应用前述的min－max定理。若记局中人A的赢得函数为$\mathscr{U}^A(\xi,\theta)$，这里$\xi$记局中人$A$的策略，$\theta=\theta(y,z)$记局中人$B$的策略，则应有$\xi^*,\theta^*$，使

$$\max_{\xi}\ \min_{\theta}\ \mathscr{U}^A(\xi,\theta)=\mathscr{U}^A(\xi^*,\theta^*)=\min_{\xi}\ \max_{\xi}\mathscr{U}^A\ \xi,\theta) \tag{6}$$

此时可令

$$v(A)=\max_{\xi}\ \min_{\theta}\ \mathscr{U}^A(\xi,\theta) \tag{7}$$

$v(A)$称为局中人A亦即这个单人"联盟"的特征函数（characteristic function），同样可以定义二人联盟即局中人B的特征函数$v(B)$。事实上$v(B)=-v(A)$，如把空集ϕ（即没有局中人的联盟）也算作一个"局中人"，那么，我们还可以定义$v(\phi)$及$v(\{1,2,3\})$，并可以进一步研究它们之间的关系。总之，对于这个三人博奕，可以有如下的

结果：

定理 3　设 v 是上面所述的 3 人零和博奕的特征函数，则下列性质成立：

(a)　$v(\{1,2,3\})=0$；

(b)　对任何一对联盟 A,B，其中 $A\cap B=\phi$，且 $A\cup B=\{1,2,3\}$，则有 $v(A)=-v(B)$；

(c)　$v(\{1,2\})\geqslant v(\{1\})+v(\{2\})$，
$v(\{1,3\})\geqslant v(\{1\})+v(\{3\})$，
$v(\{2,3\})\geqslant v(\{2\})+v(\{3\})$.

（今后，为了书写方便，将 $v(\{1,2\})$ 写作 $v(1,2)$，$v(\{1\})$ 写作 $v(1)$）.

由此可见，这里的特征函数，实系由 min－max 定理推来的。把这种概念加以推广，可抽象的定义 n 人博奕的特征函数如下：

定义 3　定义在集 N 的子集族上的集函数 $v(s)$，如果具有以下性质：

(a)　$v(\phi)=0$，ϕ 为空集；　(8)

(b)　$v(N\setminus S)=-v(S)$，$s\subset N$；　(9)

(c)　对任何 S，$T\subset N$，且 $S\cap T=\phi$ 时，

$$v(S\cup T)\geqslant v(S)+v(T) \tag{10}$$

则称 $v(S)$ 为一个特征函数。

今后，对每一个合作博奕都附以一个特征函数 $v(S)$，$S\subset N$，即对此博奕中每一个联盟 S，都附一个数值 $v(S)$，用以刻划这个联盟的“总赢得”值。因此特征函数是研究 n 人博奕的重要工具，有的文献上用 $(N,\ v)$ 表示一个 n 人博奕。

合作博奕的问题并不是在确定了特征函数——即联盟的总赢得值——之后便已解决。事实上，这一步还只停留在非合作的范围之内，重要的问题是这些联盟是怎样形成的？他们如何同分享他们的共同赢得？这些问题才是合作博奕问题的实质。为此，应引入分配(imputation)这个概念。

定义 4　设 n 人博奕的特征函数为 v，若 n 个实数组成的矢量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 满足以下条件：

$$(a)\quad \sum_{i=1}^{n} x_i=0 \tag{11}$$

$$(b)\quad x_i\geqslant v(i) \tag{12}$$

则称 x 为此 n 人博奕的一个分配。

定义中条件 (a) 反映了博奕的零和性，条件 (b) 说明当局中人 i 参加联盟时所分配到的（金额）要比他不参加任何联盟而独立于单干时所得为多，这样他才可能参加。另外，对于一个分配 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，要使联盟 $S\subset N$ 有可能形成，还应补充一个条件，即

$$\sum_{i\in S} x_i\leqslant v(S) \tag{13}$$

它的含义是参加联盟的局中人分配的总和不得超过联盟的总赢得。式(13)称为群体合理性条件，而式(12)称为个体合理性条件，条件(13)又可说是联盟 S 对分配 x 为有效。

对于两个分配 x，y，每个局中人都可对它们进行比较，而决定自己如何选择，因此，有

定义 5 设 $x=(x_1\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$是两个分配，若存在联盟$S(\neq\Phi)$，S对分配x有效，且使对一切$i\in S$，有$x_i>y_i$，则称x优于y记作$x>y$，或$x\mathrm{dom}_s y$.

定义 6 若存在联盟S使$x\mathrm{dom}_s y$，则称x优于y，记作$x>y$ $x\mathrm{dom}_s y$.

定义 7 设A为分配集，对任何$x\in A$及$X\subset A$，定义

$$\mathrm{Dom}_s x=\{y\in A\mid x\mathrm{dom}_s y\},$$
$$\mathrm{Dom}x=\{y\in A\mid x\mathrm{dom}y\},$$
$$\mathrm{Dom}_s X=\bigcup_{x\in X}\mathrm{Dom}_s x,$$
$$\mathrm{Dom}X=\bigcup_{x\in X}\mathrm{Dom}x.$$

并定义其逆优先为

$$\mathrm{Dom}^{-1}x=\{z\in A\mid z\mathrm{dom}x\},$$
$$\mathrm{Dom}^{-1}X=\bigcup_{x\in X}\mathrm{Dom}^{-1}x.$$

在以上的分配与优先等概念的基础上，von Neumann 与 Morgenstern 引进了合作博奕的解的概念。

定义 8 对n人博奕Γ，设K是某些分配组成的集合，若下列条件成立：

(a) 对任何$x,y\in K$，$x\mathrm{dom}y$及$y\mathrm{dom}x$均不成立；

(b) 对任何$y\notin K$，均存在$x\in K$使$x\mathrm{dom}y$，则称K为博奕Γ的解。

这个通常称为 von Neumann—Morgenstern 解，简记作 $vN-M$解[2]，[3]。条件(a)说明已把K中那些比别的分配要差的都删去了，剩下的那些分配便是所谓 Pareto 最优，它的含义是在此时对所有的局中人来说，沒有比它更好的了，以致于在集合K中的分配的优劣已无法比较；条件(b)说明对于集K外的任何分配，集K中总有一个分配优于它，因而这个分配集K就会为全体局中人所接受，并愿意保持它。所以这个解也是依前面所说的"平衡"的思想建立的。

若K是解，则K当然是整个分配集A的子集，不难验证：

$$K\cap \mathrm{Dom}K=\Phi \tag{14}$$

及

$$K\cup \mathrm{Dom}K=A \tag{15}$$

反之亦然。因此，对于解的定义也可以叙述为：设A为全体分配的集，A的子集K若满足式(14)，(15)，则称K为解。

此外，对于n人博奕，还有一个概念：核心（Core）。仍设A是分配的全体所成之集$x=(x_1,\cdots,x_n)\in A$，定义博奕(N,v)的核心C为如下的集：

$$C=\{x\in A\mid \sum_{h\in S}x_h\geqq v(S)，对一切\ S\subset N\}$$

此核心是一个凸多面体，它可能是空集，显然对任何解K，$C\subset K$，且$K\cap \mathrm{Dom}C=\Phi$.

以上是零和博奕的情况。对于非零和的情况，即$\sum_{i=1}^{n}H^i\neq 0$，此时可引入一个虚拟的第$n+1$个局中人，使他的赢得函数$H^{n+1}=-\sum_{i=1}^{n}H^i$而构成一个$n+1$的零和博奕，再进行讨论。

5．自1944年von Neumann及Morgenstern提出vN－M解以来，许多类的博奕都被研究了，虽然这里存在许多困难（例如可以举出这样的例子，任何一个分配均含于某个解中，从而使局中人无法据以确定其最优行动，即只指出了赢得的分配方法，而未指出局中人怎样选择策略使之赢得最多，而且局中人愈多，情况愈复杂），然而人们总还是猜想任何博奕总有一个解。但在1968年，Lucas举出一个十人博奕没有vN－M解的例子，从而打破了人们的猜想。

Lucas的例子如下：设(N,v)为

$$N=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\},$$

而特征函数v给定为：

$$v(N)=5,\ v(\{1,3,5,7,9\})=4,$$
$$v(\{1,2\})=v(\{3,4\})=v(\{5,6\})=v(\{7,8\})=v(\{9,10\})=1,$$
$$v(\{3,5,7,9\})=v(\{1,5,7,9\})=v(\{1,3,7,9\})=3,$$
$$v(\{3,5,7\})=v(\{1,5,7\})=v(\{1,3,7\})=2,$$
$$v(\{3,5,9\})=v(\{1,5,9\})=v(\{1,3,9\})=2,$$
$$v(\{1,4,7,9\})=v(\{3,6,7,9\})=v(\{5,2,7,9\})=2,$$
$$v(S)=0,\ 对一切其他S\subset N.$$

这个博奕的分配集为：

$$A=\{x\,|x(N)=5,\ 且对一切\ i\in N,x_i\geqslant 0\}.$$

Lucas的证明是把分配集A划分成几个特殊的子集证明在每个子集中都不含有解[4]。

虽然还可举出一些问题说明vN－M解的缺陷，然而毕竟是J.von Neumann与O.Morgenstern最早建立了这些理论，而它们对于后来的许多文献产生了巨大的影响。

6．自von Neumann与Morgenstern以后，许多作者都在对vN－M解进行修改与推广。下面选择几种作一些简要的介绍。

(1) 我们已看到特征函数v在n人博奕研究中重要性，它对于局中人集合N的任何子集S，都赋予一个值。Shapley (1953) 在这个基础上提出一个问题：在博奕(N,v)中，给出特征函数v，那么每一单个局中人，其特征函数的值是什么？Shapley回答了这个问题，并提供了一个关于单个局中人的特征函数值的计算公式，这个值通常称为Shapley值(Shapley value)．

Shapley值的计算方法是这样建立的：若C是任何含有局中人l的联盟，要想计算局中人l的所得，就应考虑各个$v(C)-v(C-\{l\})$，Shapley值就是此局中人l与各种联盟$C-\{l\}$联合时，他自己所能得到的加权和。换言之，这个和是根据局中人l与各联盟联合时的可能性的概率作为权相加而得的，也即此局中人与所有可能与之联合的各个联盟所能给予他的期望值(平均值)。根据这种思想，可写出Shapley值的计算公式[5]。

Shapley值给出了在诸局中人之间关于支付的一种(唯一)确定的划分。并且可见，若将联盟的财富表成一个数（例如金额），那么局中人参加此联盟时，其财富应包含局中人的那一份，而他不参加该联盟时的财富当然不应包含这一份。两者之差是局中人期望得到的。局中人对他可能参加的每一个联盟，把他从中期望得到的值都乘上一个相应

的先验概率，然后再相加。用此 Shapley 值可以衡量此局中人在该状态下的所得值。这意味着局中人的值应正比于他参加的（各种可能的）联盟时使联盟财富增长的值，或者说他的值等于其改善了他可能参加的每一个潜在的联盟的地位后，从中得到形成的新联盟应付给他的那一份。从这个观点看，在一个不含有冲突的状态中，每一个局中人接受他自己的那个“值”是合理的。

(2) Caplow(1956)[6]考虑了具有不同实力的局中人之间联盟的形成与利益的分配问题。他根据每个局中人的实力赋予一个权（加权数），这个权表明他们的实力的份额。依照他的看法，例如在一个 3 人博奕中，若在一联盟中的所有局中人的权之和超过所有局中人的总权的一半时，联盟赋值为 1，否则联盟赋值为 0，而赋予局中人的权便称为“实力”。在联盟形成的过程中，起主要作用的因素是实力。依 Caplow 的观点，一个联盟形成时，该联盟必须占有实力的一半以上。当然，满足此要求的联盟不止一个，应取那个联盟呢？他假设具有最小总实力的（当然应是符合要求的）联盟是最佳的。因在联盟形成以后，此时的支付便表明了局中人在联盟中的实力。这里，关鍵是总联盟不再形成。此时或者最强者的局中人有足够力量单独形成一个盟联，或者两个较弱的局中人结成联盟。依 Caplow，若某局中人与另一局中人结成联盟，他将永远选择弱者，这是因为分配是以实力为基础的，弱者在联盟的总收益中所占的份额总是少的。

Caplow 之后，许多人从他的观点出发研究联盟的形成。Caplow 主张联盟的形成依赖于初始权力的分布或其他的东西。因为当初始权力分布已知时，可以在一个假设下对它们进行预测。对此 Caplow 假设了四条：(a) 博奕中的成员可以有不同的实力，一个强的局中人可以控制一个弱的局中人，并试图这样做；(b) 每个局中人均试图控制他人，能控制多人应优于控制较少的人，而能控制一人优于不控制任何人；(C)联盟的实力等于它的成员的总实力；(d) 在一个进行着的博奕中，联盟的形成（或产生）都有一个前（潜）联盟条件——即形成联盟的潜在条件，在此前联盟条件下，任何一个由强局中人强迫弱局中人的企图和努力都会成为形成一个联盟来反对这种压迫的起因。

若在联盟的某状态中，一个局中人试图使他的权力变得极大，此时会引出两种可能：他可以要求控制其他局中人，或他可能要求能控制这些博奕的结局。在前一种目的中，要控制其他局中人，便要依据 Caplow 关于联盟形成的理论，此目的可能在未来的一段时间內达到，而如果权力追求者把焦点集中在控制那些有（互相）作用的意外事件的结局上，这便是第二种目的。此时假设：(a) 一个局中人作决策的权力正比于他所控制的资源（或财富，或其他等价的东西）；并且，(b)一个局中人愿意参加一个如下的能取胜的联盟，使他在此联盟中能取得相对来讲的最大权力。把这两个假设合起来，Caplow 认为一个局中人将会愿意构成这样的联盟：在各种联盟中对他来说，他的资源（或财富）与联盟的资源(或财富)之比为最大。例如有 A, B, C 三局中人，以权力而言，$A>B>C$，$A<(B+C)$，此时显见 C 不能控制任何人，但如他与 B 联合可控制 A，同时仍被 B 控制。同样，他与 A 联合可控制 B 但同时仍被 A 控制，因此联盟 AC 与 BC 对 C 来说是等同的。然而对 B 而言，B 赞成联盟 BC，因为他既可控制 C，又可控制 A，而他参加 AB 联盟只能使他仅控制 C，对 A 来讲，AB 与 BC 是等同的。

(3) Gamson(1961)[7],[8] 认为任何局中人希望其他的人都从一个联盟中分到他应

得的那一份收益，此收益应正比于他贡献给这个联盟的财富的量。所以，一个局中人A从他所期望参加的联盟中来估计他自己的收益时，应依他对该联盟的贡献在总数收益中所占的份额来估计，所以这个局中人选择联盟时，他总是用增加自己的贡献（或财富）与联盟的整个收益（或财富）的比例来使自己的份额极大化。假如他对不同联盟的贡献（或取得的财富）是相同的，那么，他总是会选择总收益较低的那个联盟以此来增大他在那个联盟中所占的份额——也即增强他在该联盟中的地位。换言之，在他的支付保持常量时，他宁愿选择那个最差的（或最小的）赢得联盟。这有点象古语中所说的"宁为鸡首，不为牛后"之意。

(4) 在 Caplow 理论的基础上，Chertkoff(1970)[11]给出了关于联盟结构的概念的理论。Caplow 实际上假设当一个联盟形成时，联盟中局中人对其伙伴的选择可以是互易的，这些联盟的出现是相等可能的。Chertkoff 认为联盟的形成与每一单个局中人对这联盟喜爱的程度有关。仍以三人博奕为例，在上面的例中，局中人A和B或C的结盟的倾向是相等的，B仅仅倾向于与C结盟，C与A或B结盟的倾向也是相等的。利用乘上这些互相选择的比例，便可得到每一个联盟产生的频率，例如BC产生的频率为$1.00\times0.5=0.5$，AC产生的频率为$0.5\times0.5=0.25$，而AB产生的频率为$0.5\times0.0=0$. 选择不是互易的，从而不形成联盟的概率为0.25.

比较以上三种理论是很有趣的。以上例而论，Caplow 断言AB与BC两种联盟是相等可能的，但BC的可能性更大于AC；Gamson 的方法认为BC是最小的赢得联盟，从而它将是最可能出现的联盟；Chertkoff 给出相对频率，断言联盟BC相对于联盟AC更容易出现，而AB的出现为不可能。在这些理论中，C尽管是最弱的成员，但最易出现的获胜联盟中总包含它，即C总是站在取胜的一边，从而有以下的"悖论"，即"弱者是一个强者"。

(5) Riker(1962)[2]提出一个与 Gamson 相似的理论，他从n人博奕中对于社会上政治联盟的形成，提了三个原则：

(a) 规模的原则。在完全的、正确的信息条件下获胜的联盟趋向于最小的获胜联盟的规模。

(b) 策略原则。在系统中，当规模原则已在运用，参加者在联盟形成的最后阶段将努力使它向最小的获胜联盟变化。

(c) 不平衡原则，在系统中，当规模原则与策略原则都在运用时，这个系统是不稳定的，即它所包含的力量会导向决策时的不顾利害以及导向参加者的减少。

以上是在具有完全的和正确的信息条件下 Riker 所描述的正当联盟在形成过程中局中人如何采取行动。Riker 认为局中人努力的结果是最后仅仅构成最小获胜联盟，即在所给的总资源（财富）的基础上，在所有可能（获胜）的联盟中，只有那个具有最小联盟总赢得的获胜联盟会形成。仍回到上面的例，AB联盟不可能形成，因与BC联盟相比，B肯定拒绝参加，AC与BC相比，C是弱者，似乎参加那一个都可以，但 Riker 认为最可能形成的联盟是BC，因C处在劣势地位时，总还想取得较大份额的实力（发言权），而参加BC，将会增加他在联盟所占力量的份额。

(6) Vickrey(1959)[13]也从特征函数出发进行讨论。他把"分配"依它们的稳定性

进行分类，并认为每个分配集应反应一种宜取的行动标准。仍以前述3人博奕为例，设有分配(x_1',x_2',x_3')属于某个宜取行为标准的分配集M，再设想此分配(x_1',x_2',x_3')在某个时刻被另一个不位于M中的另一分配(x_1,x_2,x_3)所代替，并且此分配通过局中人集合的一个子集C而优于(x_1',x_2',x_3')，此新分配当然与原来的宜取行为标准不一致，故称之为一个异端分配（heretical ilputaion），而集C称为一个异端集，其中的局中人也称为异端的。我们同样的（公平的）假设异端分配不是最终的，即在原集M中，存在分配可以优于此异端分配，并且可以代替它，我们由此出发来讨论M中分配的稳定程度（它当然依赖于C）。现设对此异端分配$(x_1,x_2,x_3)\notin M$，在M中有分配(x_1'',x_2'',x_3'')优于它，此时称(x_1'',x_2'',x_3'')为这异端分配的修正分配（Corrective imputation）．每个异端分配的修正分配可能不止一个，我们可以通过这些修正分配重新建立宜取行为标准。现考虑(x_1,x_2,x_3)的所有分配(x_1'',x_2'',x_3'')所成的集，注意(x_1,x_2,x_3)是优于$(x_1',x_2',x_3')\in M$的。若C中有异端局中人l，他在每一个对应的修正分配(x_1'',x_2'',x_3'')中的所得均少于原分配(x_1',x_2',x_3')，对他来说此异端分配是"自灭的"（Suicide）。如果对C中任何局中人，每一个优于原始分配(x_1',x_2',x_3')的异端分配都是自灭的，则称原分配为一个强分配(Strong imputation)．(注意一个异端分配仅仅是通过集C的所有异端局中人的协调一致才得到的)。若M中的每一个分配都是强的，则称M为一自修正的。Vickrey用这种观点研究了vN－M解。

(7) Aumann及Maschler(1964)[14]也利用vN－M解的理论中的特征函数研究了3人博奕。他们集中讨论一旦联盟形成后局中人可能得到的支付。他们认为，不论是否公正，局中人所得的份额仅仅依赖于他们的实力。

在3人博奕中，只有它的核心才同时具有个体合理性和群体合理性条件（核心也可能是空集)，而对于分配，仅考虑了个体合理性条件，而vN－M解正是由分配的集合构成的。现在作适当修改，即仍保持个体合理性条件，但对群体合理性，并不对局中人的任何子集都保持（这与核心有区别，因在核心的定义中，对局中人的任何子集C，都保持群体合理性条件，即$v(C)\leqslant\sum_{i\in C}x_i$)，而仅仅对那些已确实形成的联盟才保持群体合理性（这与分配有区别，因它只要求对全体局中人保持此性质）。这样，为使联盟成立，它的成员必须至少能得到他们在这3人博奕中各自联盟的值。当然，在一开始应假设仅有某个联盟可以形成。

依Aumann及Maschler的看法，3人博奕中最根本的困难是对博奕的对象没有一个确切的认识，他们认为每个局中人不是追求最大的赢得，因若联盟中每个成员都追求最大，他们之间便永远不能协商一致。一个博奕的目标应是达到某种"稳定"，这种稳定能在保持此博奕的规律的条件下，反映出每个局中人的实力。因而他们假设局中人之间可以互相交涉、谈判，并且可以与其他局中人进行完全的通信，以便达到一个为各方面（持异议的和反对异议的……）接受的平衡条件。

(8) Rapoport(1970)[15]提出用划分函数（Partion function）的方法将"分配"与"优于"等概念加以推广。划分函数的含义是，对局中人集合的每个任意划分中的每一个联盟，都赋予一个值，这个值表明在此划分中当其他联盟为争取最大收益而奋斗时，此联盟本身保证能得到的最低收益。然后在此基础，仿照过去的特征函数理论，相

应的定义“分配”、“优于”等概念，Rapoport 用此理论讨论了 3 人博奕。

7. 我们已追溯了博奕的解的概念之发展和演变，特别是 vN－M 解以来的许多讨论。今天博奕的解仍是一个值得深入探索的问题，其中包括：

(1) 除已有的算法如线性规划算法或其他方法外，2 人博奕有沒有更为简便、快速的求解算法？更进一步，对 n 人非合作博奕，能否找到一种较为一般的可行的解法？

(2) 对 n 人合作博奕，能否找到一个更为合理而又为大家所接受的“解”的概念？或者，我们对 vN－M 解还能作何种修改？

(3) 对 vN－M 解，当它存在时（并且当 n 不大时），能否找到较一般的可行的算法？

(4) Lucas 举出了 n 人博奕中 vN－M 解不存在的例子，那么，能否找到一种判别 vN－M 解的存在准则？

(5) 如前所述，关于联盟的形成已有许多理论，但事物是运动的，联盟也会解体，那么解体的条件是什么？特别，联盟在何种情况下是稳定的？这方面虽已有人工作[16]，但问题尚可深入。

(6) 寻求最优策略，是局中人最为关心的，但却往往十分困难。因为局中人的行动往往依赖于他对事物的理解。如何能帮助局中人寻求最优策略？

(7) 以上所讲，都是“静态的”，对于“动态的”相应情况也应深入。

(8) 博奕理论的应用，特别是在经济理论以及军事方面的应用研究。

参考文献

[1] Neumann, J.von.(1928), Zur Theorie der Gesellschaftssipiele, Math, Ann. 100 p295—320.

[2] Neumann, J.von and Morgenstern, O(1947), Theory of Games and Economic Behavior, 2nd ed. Princeton University Press, Princeton, New York. (有中译本).

[3] 中国科学院数学研究所第二室编，对策论（博奕论）讲义，人民教育出版社，1960.

[4] W.F.Lucas(1968), The proof that a Game may have not a Solution. Bull. Amer Math. Soc. 75(1969), p.219—229.

[5] Shapley,L.S.(1953), A value for n-person games. In H.W.Kuhn and A.W.Tucker(eds). Contribution to the theory of Games, Annales of Mathematics Study. No. 28. Princeton University Press, Princeton.

[6] Caplow, T.(1956), A Theory of Coalitions in the tried. The American Social Rev.21. 489—493.

[7] Gamson, W.A.(1961), A Theory of Coalition formation, Am,Sociol Rev.26,373—382.

[8] Gamson W.A.(1961),An experimental test of a theory of Coalition formation, Am. Social Rev. 26.565—573.

[9] Dantzig, G.B.(1951),A proof of the equivalence of the progronming problem and the game problem. Cowles Commission Monograph, No.13, pp.330—335.

[10] Nash J.F.(1950), Equilibrium Points in n-person games, Proc. Nat. Acad. Sci, USA, 36,p48—49.

[11] Chertkoff, J.M.(1976). Sociopsychological theories and research on Coalition formation, in S.Groennings, E.W.Kelley, and M.Leiseson (eds). The Study of Coalition Behavior, Holt,Rinehart g Winston, New York, pp.297—322.

[12] Riker, W.H.(1962)The Theory of Political Coalitions, Yale University Press, New Haven.

[13] Vickrey,W.(1959), Self-Policing Properties of Certain imputation sets. in A.W.Tucker and R.D.Luce(eds).Contributions to the Theory of Games. Princeton University Press Princeton, pp.213—246.

[14] Aumann R.J. and Maschler, M. (1964), The bargaining set for cooperative games,in M.Dresher, L.S.Shapley and A.W.Tucker(eds). Advances in Game Theory, Annals of Mathematics Study No. 52, Princeton University Press, Princeton, pp.443—476.

[15] Rapoport, A.(1970), N-Person Game Theory,Concepts and Applications, University of Michigan Press, Ann. Arbor.

[16] Groennings, S.,Kelley,E.W.and Leisrson, M.(eds),(1970),The Study. of Coalition Behavior, Holt Rinehart and Winston New York.

On the Concepts of Solutions of Game Problems

Liu De-ming

Abstract

In this paper, in view of equilibrium, we consider the concepts of solutions of game theory, and give a survey of its developments ever since theorm. Specially, we discussed the advances about vN-M solution.