

核爆炸源区早期电磁脉冲的一种近似解析解

王 闽 赵凤章 兰马群

提 要 本文导出了地面核爆炸源区早期电磁脉冲波形的近似解析解。得出的电磁脉冲早期波形特征和 γ 射线源波形有一一对应关系。把解析结果与有关数值模拟结果进行了比较,符合得较好。为通过测量电磁脉冲来了解 γ 源波形特征提供了理论依据。

一、引 言

核爆炸产生电磁脉冲的机制是所谓“ γ -康普顿电子”模型。即核爆炸时刻产生大量的瞬发 γ 光子,它穿过空气时与空气分子相互作用发生康普顿效应,产生远离爆心的反冲康普顿电子,大量电子的定向运动形成宏观的康普顿电流。此电流在空间感生电场、磁场,从而形成电磁脉冲。

对于低空和地面爆炸,由于大地的密度比空气大得多, γ 射线在其内衰减很厉害,电子射程很短,因而康普顿电流在地下很小。另外,地的电导率也比空气中要大得多。这样,大地的存在引起了空间电流分布的非中心对称,这就感生了向外传播的电磁脉冲。

对于地面爆炸,在地表面以上有沿地面的径向康普顿电流,而地表面以下基本不存在康普顿电流。地面以上的康普顿电流在地表面附近引起径向电场,由于大地的电导率很大,在地表面以下感生一个与地表面上方电流方向相反的“镜像电流”。地表面上、下两侧方向相反的电流在地表面附近感生较强的磁场。变化的横向磁场又在垂直方向感生电场,形成了电磁脉冲。这一物理过程仅在 γ 射线所能达到的范围内发生,所以称为“源区”。

由于物理过程的复杂性,过去在电磁脉冲方面的理论工作主要集中于用计算机数值解麦克斯韦方程和化学反应动力学方程,从而求得电磁脉冲波形^[2]。也有些用解析解的方法解运动方程,但一般由于作了过多的简化,只给出了定性的结果,只估计出数量级的大小。大量的数值模拟受计算机条件的限制,计算结果在物理上也不直观。因而对由 γ 源产生电磁脉冲这一物理过程缺少明晰的理论描述。

本文以解析的方法对源区早期电磁脉冲波形作了分析研究。得到了以下的图象:对

于一定的核爆炸装置,其瞬发 γ 的释放有一定的规律。可以假设早期瞬发 γ 随时间指数上升^[1],所产生的康普顿电流也是指数上升,进而感应的电磁场亦近似地指数上升。这样,一个以一定规律变化的 γ 源对应一个相应变化的电磁辐射场,电磁场的变化规律和 γ 源的变化规律成一一对应关系。这一对应关系为在实验上通过测量电磁辐射得到 γ 辐射的规律提供了理论依据。本文中第二部分提出了有关的物理模型,从描述空间场的麦克斯韦方程和描述空气的化学动力学方程出发,具体分析各物理量之间的关系,用分离变量法,作出近似的解析解,得到了 γ 源和电磁场随时间变化的对应关系。在第三部分中把近似解析解的结果和同一问题的计算机模拟结果相比较,得到了较好的符合。第四部分中对结果的意义和在实验上可能的应用进行了讨论。

二、近似解析解

一定当量的装置在地原点 O 处爆炸,其能量的一定份额以瞬发 γ 射线形式放出,它以爆心为原点向上半空间发射,在空气中由于康普顿效应而受到衰减。因而在空气中离爆心距离为 r 的地表面一点 P 处(图1) γ 射线的通量为:

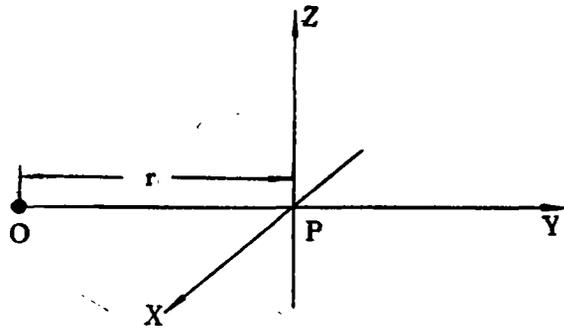


图 1

$$\Phi = \frac{Y \in K C}{E_\gamma} \frac{e^{-\mu_c \rho r}}{4\pi r^2} A_1 e^{\beta_1 \tau} \quad (1)$$

其中: Y (千吨) 为核爆炸当量。核爆能量以瞬发 γ 射线形式释放的份额 $\in = 10^{-3}$ 。每千吨当量相当的 Mev 数 $K = 2.613 \times 10^{25}$ (Mev/千吨)。光速 $C = 3 \times 10^{10}$ (cm/sec)。空气的康普顿质量吸收系数 $\mu_c = 2.4 \times 10^{-2}$ (cm²/g)。空气密度 $\rho = 1.293 \times 10^{-3}$ (g/cm³)。 $E_\gamma = 1.5$ Mev 为瞬发 γ 光子的平均能量。 τ (cm) 是以光经过的长度为单位的推迟时间。 β_1 为 γ 射线随时间指数上升的系数。 A_1 是总 γ 数的归一化系数。

在 P 点处产生康普顿电流密度:

$$J_\nu = - \frac{Y \in K \mu_c \rho R_{mf} e}{E_e} \cdot \frac{e^{-\mu_c \rho r}}{4\pi r^2} A_1 e^{\beta_1 \tau} \stackrel{\text{记作}}{=} - J_0 A_1 e^{\beta_1 \tau} \quad (2)$$

$R_{mf} = 118$ cm 为康普顿电子在空气中的平均自由程。 e 为电子电荷。 $E_e = 0.7$ Mev 为反冲康普顿电子的平均能量。康普顿电子在空气中运动电离空气产生自由电子和正离子。

空间点 P 处自由电子的产生率为:

$$\dot{\gamma} = \frac{Y \in K C \mu_c \rho}{E_0} \frac{e^{-\mu_c \rho r}}{4\pi r^2} A_1 e^{\beta_1 \tau} \stackrel{\text{记作}}{=} \gamma_0 A_1 e^{\beta_1 \tau} \quad (3)$$

其中 $E_0 = 32.5 \times 10^{-6} \text{ Mev}$ 为空气分子的平均电离能。

在空气中发生的化学过程还有：自由电子被分子吸附形成负离子；电子和正离子复合而变成中性分子。因而描述空气中粒子数变化的动力方程为：

$$C \frac{dn_e}{d\tau} + (\alpha + \beta n_+) n_e = \dot{\gamma} \quad (4)$$

$$C \frac{dn_-}{d\tau} + (\gamma n_+) n_- = \alpha n_e \quad (5)$$

$$n_+ = n_e + n_-$$

其中 n_e 、 n_- 、 n_+ 分别为单位体积内电子、负离子、正离子的粒子数。 $\alpha = 4.157 \times 10^8 (\text{sec}^{-1})$ 为电子吸附系数。 $\beta = 7.5 \times 10^{-7} (\text{cm}^3/\text{sec})$ 为电子、正离子复合系数。 $\gamma = 2.3 \times 10^{-6} (\text{cm}^3/\text{sec})$ 为正离子、负离子复合系数。

而空气中的电导率公式为：

$$\sigma = \frac{e}{c} \{ \mu_e n_e + \mu_i (n_e + 2n_-) \} \quad (7)$$

其中： $\mu_i = 750 \text{ cm/sec} \cdot \text{esu}$ 为离子迁移率。 $\mu_e = 3.78 \times 10^6 \text{ cm/sec} \cdot \text{esu}$ 为电子迁移率。

在地爆的情况下，由于产生的场量以爆点为中心轴对称，因而在图 1 所示的坐标下，描述空间电磁场的方程中只剩 B_x 、 E_Y 和 E_Z 分量，它们麦克斯韦方程的形式为：

$$\frac{\partial E_Z}{\partial Y} - \frac{\partial E_Y}{\partial Z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (8)$$

$$-\frac{\partial B_x}{\partial Y} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_Z}{\partial t} + 4\pi\sigma E_Z \quad (9)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial Z} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_Y}{\partial t} + 4\pi\sigma E_Y + 4\pi J_Y \quad (10)$$

把自变量作变量变换：

$$Z' = Z$$

$$Y' = Y$$

$$\tau = ct - Y$$

为书写方便起见，仍以 Y 、 Z 代表新变量的 Y' 、 Z' ，在以光速经过的路程为单位的推迟时间为自变量的变量系统中，(8)、(9)、(10) 方程的形式变为：

$$\frac{\partial B_x}{\partial \tau} = \frac{\partial E_Y}{\partial Z} - \frac{\partial E_Z}{\partial Y} + \frac{\partial E_Z}{\partial \tau} \quad (11)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_Z}{\partial \tau} + 4\pi\sigma E_Z = \frac{\partial B_x}{\partial \tau} - \frac{\partial B_x}{\partial Y} \quad (12)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_Y}{\partial \tau} + 4\pi\sigma E_Y = -4\pi J_Y + \frac{\partial B_x}{\partial Z} \quad (13)$$

由于爆炸的径向特性，物理量沿 Y 方向的变化率远小于沿 Z 方向的变化率，所以在

源区可以设 $\frac{\partial E_z}{\partial Y} = \frac{\partial B_x}{\partial Y} = 0$, 这样(11)、(12)式变成:

$$\frac{\partial B_x}{\partial \tau} = \frac{\partial E_y}{\partial Z} + \frac{\partial E_z}{\partial \tau} \quad (14)$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\sigma} \left\{ \frac{\partial E_y}{\partial Z} - (\varepsilon - 1) \frac{\partial E_z}{\partial \tau} \right\} \quad (15)$$

考虑空气的各类粒子数动力学方程, 在核爆炸早期, 电离度比较低, 正离子密度也比较低, 这时电子与正离子的复合过程远弱于电子被吸附过程, 即 $\alpha \gg \beta n_+$. 略去 βn_+ 不计, 考虑到初始条件: $n_e(\tau=0) = 0$, (4)式的解为:

$$n_e = \frac{\gamma_0 A_1}{c\beta_1 + \alpha} (e^{\beta_1 \tau} - e^{-\frac{\alpha}{c} \tau}) \quad (16)$$

在爆炸初期, 因电子主要以吸附为主, n_e 、 n_- 、 n_+ 为同一数量级, 又因为 $\mu_e \gg \mu_i$, 由(7)式即可近似得到:

$$\sigma \approx \frac{e}{c} \frac{\mu_e \gamma_0 A_1}{(c\beta_1 + \alpha)} (e^{\beta_1 \tau} - e^{-\frac{\alpha}{c} \tau}) \quad (17)$$

对于电磁场运动方程, 假设地表面上、下二侧的电、磁场为:

$$\begin{aligned} E_z &= e_z(Z) e^{\beta_1 \tau} \\ E_y &= e_y(Z) e^{\beta_1 \tau} \\ B_x &= b_x(Z) e^{\beta_1 \tau} \end{aligned} \quad (18)$$

对于地面以下, 把(18)代入(13)、(14)、(15)即得:

$$\frac{db_x}{dZ} = (\varepsilon\beta_1 + 4\pi\sigma_0) e_y \quad (19)$$

$$\frac{de_y}{dZ} + \beta_1 e_z = \beta_1 b_x \quad (20)$$

$$\frac{de_z}{dZ} = 4\pi\sigma_0 e_z \left(1 + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\sigma_0} \beta_1 \right) \quad (21)$$

其中 ε 为大地的介电常数, σ_0 为大地的电导率. 求解联立微分方程组(19)、(20)、(21)得到:

$$b_x(Z) = A e^{QZ} \quad (22)$$

$$e_y(Z) = A R_0 e^{QZ} \quad (23)$$

$$e_z(z) = \frac{A R_0}{4\pi\sigma_0 \left[1 + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\sigma_0} \beta_1 \right]} e^{QZ} \quad (24)$$

其中 A 为待定常数.

$$Q = \left[\frac{(\varepsilon\beta_1 + 4\pi\sigma_0)\beta_1}{\beta_1} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\varepsilon - 1}{4\pi\sigma_0} \beta_1 \right] \quad (25)$$

$$R_0 = \frac{\beta_1}{\left[\frac{\beta_1}{4\pi\sigma_0 \left(1 + \frac{\epsilon-1}{4\pi}\beta_1\right)} + 1 \right] Q} \quad (26)$$

在求上述解时用到了电磁场在地下深处为零的边界条件 $b_z(Z = -\infty) = 0, e_y(Z = -\infty) = 0$

同理, 对于地面以上, 取(17)形式的电导率表示式, 并取 $\epsilon = 1$, 以(18)代入(13)、(14)、(15)式, 求解所得的方程组即得:

$$b_z(Z) = A' e^{-PZ} \quad (27)$$

$$e_z(Z) = A' R \frac{P}{4\pi\sigma} e^{-PZ} \quad (28)$$

$$e_y(Z) = -A' R e^{-PZ} + B' \quad (29)$$

其中:
$$P = (4\pi\sigma\beta_1)^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

$$R = \frac{\beta_1}{P \left(1 + \frac{\beta_1}{4\pi\sigma}\right)} \quad (31)$$

求解过程中也用到了在远离地面高空处的边界条件: $b_z(Z = +\infty) = 0, e_z(Z = +\infty) = 0$. e_y 由于空气中在远离地面处存在着饱和电场, 所以 $e_y(Z = +\infty) \neq 0$.

由电磁场在 $Z=0$ 处的连续性边界条件 $B_z(Z=0)$ 连续, 由(22), (27)得:

$$A = A'$$

界面两侧因介电常数不等, 所以 e_y 连续, e_z 不连续, 由(23)、(29)当 $Z=0$ 时相等得:

$$B = A(R + R_0) \quad (32)$$

将(27)、(29)式代入(13)式, 取地面以上的参数, 求出待定系数

$$A = \frac{4\pi J_0 A_1}{(\beta_1 + 4\pi\sigma)(R + R_0)} \quad (33)$$

综合以上, 得出地面以上电磁场公式为:

$$B_z = A e^{-PZ} e^{\beta_1 r} \quad (34)$$

$$E_z = \frac{A\beta_1}{4\pi\sigma + \beta_1} e^{-PZ} e^{\beta_1 r} \quad (35)$$

$$E_y = A \{ R_0 + R(1 - e^{-PZ}) \} e^{\beta_1 r} \quad (36)$$

而地面以下的公式为:

$$B_z = A e^{QZ} e^{\beta_1 r} \quad (37)$$

$$E_z = \frac{AR_0 e^{QZ}}{4\pi\sigma_0 + (\epsilon - 1)\beta_1} e^{\beta_1 r} \quad (38)$$

$$E_y = AR_0 e^{QZ} e^{\beta_1 r} \quad (39)$$

三、解析结果与数值结果的比较

我们把在一定条件下由解析公式算出的结果与有关数值模拟的结果进行了比较。这一数值方案^[2]是采用有限差分方法解一维空间和推迟时间的麦克斯韦方程组的计算程序,专门用于计算近地或地面核爆炸产生的电磁脉冲。针对产生场在地表面处变化快,而远离地面处变化缓慢的特点,空间网格点不是均匀分布而是离地面成指数分布,这时形式为一阶微分方程的方程可以化成一特殊形式的一级近似或二级近似差分方程。 E_y 、 E_z 取二级近似差分方程, B_x 方程因不成标准的一阶微分方程形式,故取一般的差分形式。康普顿电子在电磁场中受力运动发生轨道弯曲对产生电磁场的影响属于高阶效应,不予考虑。参考所列文献[1][2]中的参数,取数值计算和解析结果算例参数如下:当量 $Y=20$ 千吨; γ 射线指数上升参量 $\beta_1=1/300(\text{cm}^{-1})$; 大地介电常数 $\epsilon_0=16$; 大地电导率 $\sigma_0=0.006\text{cm}^{-1}$ 。

解析解和数值解关于空气电导率计算结果比较画在图2中,结果呈现出比较精确的指数上升规律,相互之间的误差不超过10%。图3、图4、图5分别画出了此二种方案算得的 B_x 、 E_x 、 E_y 的曲线。计算点是在地面以上 $Z=2\text{cm}$ 处。由计算结果可见:解

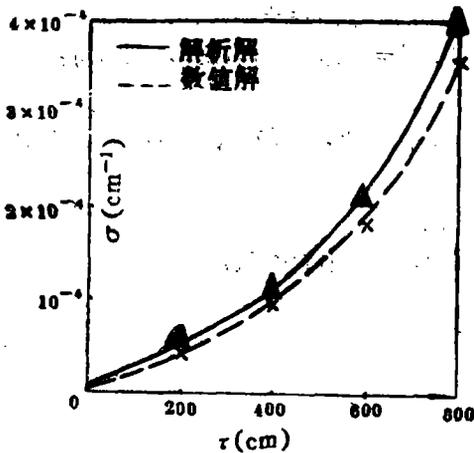


图2 电导率计算结果比较

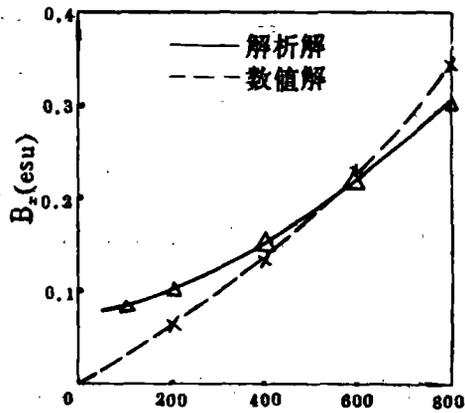


图3 B_x 计算结果比较

析解所得结果在大小上与数值解十分相近,随时间变化的规律也十分类似,说明得到了比较好的解析近似。不太一致的地方是:第一,在初始的时候解析的电磁场值都大于数值结果,原因是在解析计算电磁场时设电磁场正比于 $e^{\beta_1 \tau}$,当 $\tau=0$ 时其值为1,不像数值计算时那样设初始的电磁场值为零,所以解析结果初始时偏大。第二是解析结果随时间上升斜率都小于数值解的上升斜率,其原因是在地面以上的麦克斯韦方程作分离变量时假设电导率 σ 为常数,实际上电导率随时间作指数上升,这一因子使方程变为非线性,使产生的电磁场上升率变大,构成了一阶小量的修正。图6描述了在 $\tau=600\text{cm}$ 时,地表面以上、离地不同距离空间各点的电磁场各分量的解析结果和数值结果的比较。可

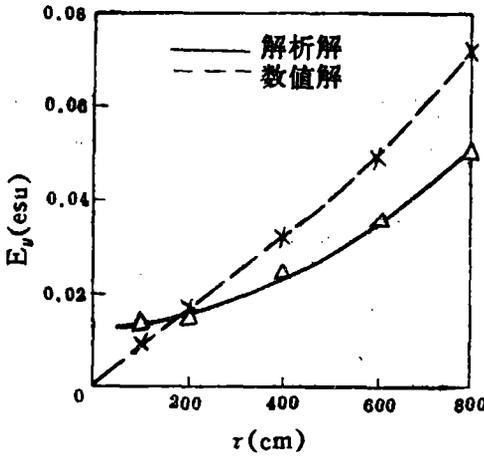
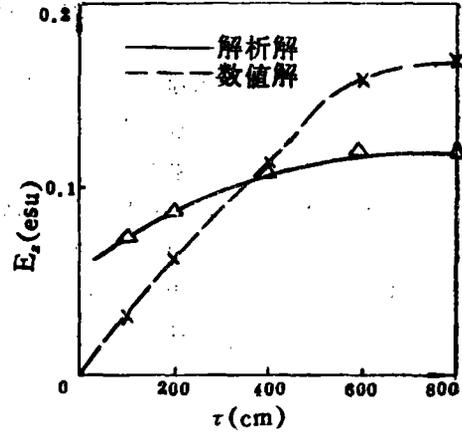
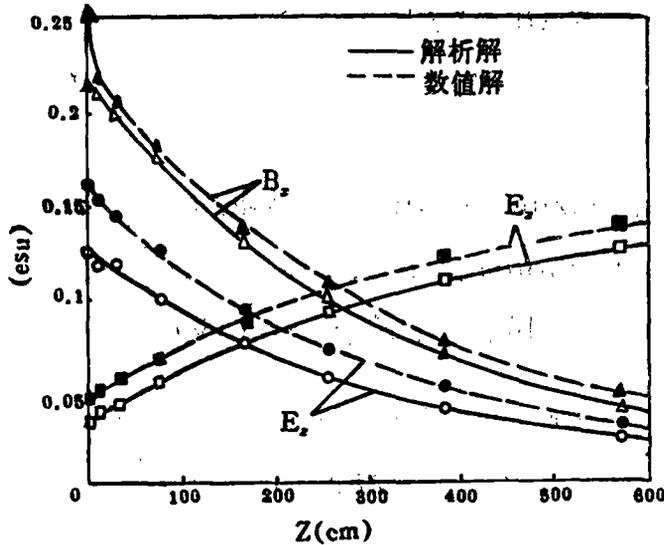
图 4 E_z 计算结果比较图 5 E_y 计算结果比较

图 6 地面以上电磁场各分量计算结果的比较

可以看出二种计算数值大小上相差不大，特别是 B_z 曲线，最大误差不超过 10%，更重要的是：二种结果显示出相同的随离地面距离变化的规律： B_z 、 E_z 值随离地面距离指数下降， E_y 随离地面距离而上升、趋向饱和，由此证明了在远离地面处由于康普顿电流而产生的饱和电场的存在。地面以下，二种结果也明显地表现出场强随离地面距离而指数下降。由(25)式，当 $\varepsilon\beta_1 \ll 4\pi\sigma_0$ 时 $Q = (4\pi\sigma_0\beta_1)^{\frac{1}{2}}$ 此式即是电导体对电磁波的趋肤厚度。说明地面以下产生的电磁场是由地面以上的电磁场感应而向地深处传播，由于大地的电导率而产生的焦耳损耗，电磁场不断地指数衰减。

四、结 论

尽管还存在着一定的误差,但本解析解在数量大小上、在随时间变化和随空间变化的规律上都与比较精确的数值解符合得较好。得出的结果与问题物理过程应当得出的结论相一致。所以解析的结果基本上如实地反映了问题的物理过程。

由解析结果得出了:在源区早期电磁脉冲波形和爆炸瞬发 γ 脉冲波形有一一对应关系,它们都随时间以 $e^{\beta t}$ 上升不但在脉冲波形上有对应关系,而且提供了在幅值大小上的定量对应关系。这就提供了这样一种可能性:通过测量电磁脉冲的波形和大小来了解瞬发 γ 的波形和大小。这在技术上要简单牢靠得多。

参 考 文 献

- [1] Otho, V. Kinsley Introduction to the Electromagnetic Pulse AD-735654
- [2] H. Jerry Longley, Conrad L. Longmire Development of GLANC EMP Code AD-774773

An Approximate Analytic Solution of Early-Stage Electromagnetic Pulse in the Region of Nuclear Explosion Source

Wang min Zhao Feng-zhang Lan Ma-qun

Abstract

This article derives an approximate analytic solution of the wave of the early-stage electromagnetic pulse in the region of nuclear explosion source. The wave characteristics of the early-stage electromagnetic pulse corresponds with that of the γ -ray source. Comparing the analytic result with the related numerical simulation result, they accord with each other fairly well. This solution provides theoretical basis for understanding the wave characteristics of the γ -ray source by measuring electromagnetic pulse.