六 要 素 法

（求解二阶网络的快速公式）

李 国 吉

提 要 本文首先对求解一阶网络的快速公式——三要素法进行了理论分析，然后将这种理论应用到对二阶网络的分析，导出在各种情况下求解零输入响应和零状态响应的快速公式——六要素法。和三要素法一样，它的最大优点是不需列写任何微分方程，不用进行微分、积分运算，只要作简单的代数运算即可获得解答。文中列举一些例题，以便进行对比。

一、回顾三要素法

本文谈到的网络，如不加说明，均指存在唯一稳态解答的线性定常网络。

对于线性定常网络，一般选电容电压 $v_c(t)$ 为电感电流 $i_L(t)$ 为状态变量，一阶网络的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=ax(t)+bw(t) \\ x(0_+) \end{cases} \tag{1}$$

式中 $x(t)$ 代表状态变量，$\dot{x}=\frac{dx}{dt}$、$w(t)$ 代表输入，a 与 b 为常数，取决于网络元件和网络图形。$x(0_+)$ 代表网络的初始状态。

全响应 x 等于零输入响应 x' 和零状态响应 x''，即

$$x=x'+x'' \tag{2}$$

加“$'$”的量与零输入响应有联系，加“$''$”的量与零状态响应有联系。

求零输入响应：这时 $w=0$ (1) 式变为

$$\begin{cases} \dot{x}'=ax' \\ x(0_+) \end{cases} \tag{3}$$

设解为

$$x'=B'e^{st} \tag{4}$$

s 是 (3) 式微分方程 $\dot{x}'-ax'=0$ 的特征方程 $p(s)=s-a=0$ 的特征根（值）即 $s=a$,

本文1982年12月25日收到

B' 是待定常数。令(4)式中 $t=0$，代入初始状态 $x(0_+)$ 得到 $B'=x(0_+)$. 零输入响应

$$x'=x(0_+)e^{st} \tag{5}$$

求零输入响应的两个要素为 s 与 $x(0_+)$

求零状态响应：微分方程为

$$\begin{cases} \dot{x}''=ax''+bw \\ x(0_+)=0 \end{cases} \tag{6}$$

当输入为直流电源时 $w=W$ 设解为

$$x''=B''e^{st}+x(\infty) \tag{7}$$

$x(\infty)$ 是变量 x 在 $t\to\infty$ 后电路已达到稳定状态时的稳态解。B'' 是待定常数。令 (7) 式中 $t=0$ 代入零初始状态 $x(0_+)=0$ 得 $B''=-x(\infty)$ 零状态响应

$$x''=x(\infty)-x(\infty)e^{st} \tag{8}$$

求零状态响应的两个要素为 s 与 $x(\infty)$

全响应

$$x=x'+x''=x(\infty)+[x(0_+)-x(\infty)]e^{st} \tag{9}$$

此即为大家熟知的求解一阶网络的快速公式。

下面讨论对三个要素的求法。先讨论 s，从理论上讲，令 $w=0$，求微分方程 $\dot{x}-ax=0$ 的特征方程 $s-a=0$ 的特征根 $s=a$，但采用这种方法，先要写出微分方程。大家知道，三要素法的最大特点（也是它的优点）就是不用列写微分方程，用定义 $S=-\frac{1}{\tau}$，τ 是电路的时间常数，求 s 时，是将输入置零，对所得的等值电路，由观察法（或通过简单的电路计算）求得时间常数 τ 而后得到 s 的。$x(0_+)$ 是给定的或由换接前（后）电路求得。$x(\infty)$ 是由换接后的电路计算出来的。而求 $x(0_+)$ 和 $x(\infty)$ 都不用列电路的微分方程。可见三要素法是一种充分利用等值电路进行计算的方法，避免了列微分方程的一系列过程，三要素法所以快速与这一点有很大关系。

当我们求解零状态响应时，所用方程为 $\dot{x}''=ax''+bw$ 而得到的解为 $x''=x(\infty)-x(\infty)e^{st}$，从表面上看似乎与输入 w 无关，而从道理上讲解应该与 w 有关。这可证明如下：当输入 w 为直流电源时，$w=W$ 设解为 $x''=B''e^{st}+x(\infty)$ 对其求导一次得 $\dot{x}''=B''se^{st}$ 将它与原方程 $\dot{x}''=ax''+bw$ 对照得 $B''se^{st}=ax''+bw$，令上式中 $t=0$ 由于 $x(0_+)=0$ 得到 $B''=\frac{bW}{s}$。我们完全可以用此式计算 B''、但是这样，就需列出微分方程才能得到 bW，这就失去了三要素法不列方程的优点。所以不采用 $B''=\frac{bW}{s}$ 而采用 $B''=-x(\infty)$ 的算法。

从以上分析得到如下结论：1. 三要素法适用于存在稳态解答的一阶网络；2. 采用等值电路求时间常数 τ 的办法得到特征根 $S=-\frac{1}{\tau}$；3. 求零状态响应时将输入 w 的作用考虑到 $x(\infty)$ 项内，而 $x(\infty)$ 可由计算电路的方法得到。这样就避免了列写微分方程、求解微分方程等一系列运算过程。

下面将把这些思想推广到求解二阶网络的响应。

二、零 输 入 响 应

1. 六 要 素 法

从下面的叙述将会看到求解二阶网络所要计算的量将是两个特征根S_1和S_2，一组待定的常数 B'_{11}、B'_{12}、B'_{21} 和 B'_{22} 以及另一组待定的常数 B''_{11}、B''_{12}、B''_{21} 和 B''_{22}。而这两组常数与初始状态 $x_1(0_+)$、$x_2(0_+)$ 和 $t\to\infty$ 后的稳态解 $x_1(\infty)$、$x_2(\infty)$ 有关，也就是说要确定 S_1、S_2；$x_1(0_+)$、$x_2(0_+)$ 和 $x_1(\infty)$、$x_2(\infty)$ 六个要素。下面我们将不列任何微分方程，充分利用等值电路和计算电路的方法，快速地确定这六个要素，称为六要素法。

$x_1(0_+)$、$x_2(0_+)$ 和 $x_1(\infty)$、$x_2(\infty)$ 这四个要素的求法和三要素法求$x(0_+)$和$x(\infty)$时是一样的，这里就不多说了，我们重点研究用等值电路法确定 S_1 和 S_2

线性定常网络标准形式状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{x}(0_+)\end{cases}\tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 代表状态变量列向量。$\dot{\boldsymbol{x}}=dx/dt$，$\boldsymbol{w}$ 代表输入。$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为常数矩阵与网络元件和网络图形有关。$\boldsymbol{x}(0_+)$ 代表初始状态列向量。对于二阶网络(10)式可以写成

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}w$$

$$\boldsymbol{x}(0_+)=\begin{bmatrix}x_1(0_+)\\ x_2(0_+)\end{bmatrix}$$

或

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1w\\ \dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+b_2w\end{cases}\tag{11}$$

$$x_1(0_+);\ x_2(0_+)$$

令 $\boldsymbol{w}=0$ 求状态方程 $\dot{x}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 的特征方程

$$p(s)=|S\cdot\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 代表单位矩阵。

展开为
$$p(s)=S^2-(a_{11}+a_{22})S+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0$$
令
$$p(s)=S^2+a_1S+a_0=0$$

则特征方程 $p(s)=0$ 中 S^2 的系数为 1， s 的系数等于A中主对角线元素之和的负值，常数项 a_0 等于A的行列式的值 $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$。两个特征根为

$$S_{1,2}=(-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0})/2$$

一阶网络特征根S和变量x的系数a之间的关系非常简单，$S=a$，二阶网络特征根$S_{1,2}$和状态变量 $\boldsymbol{x}$ 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的四个元素a_{11}、a_{12}、a_{21}和 a_{22} 都有关系，比一阶网络要复杂。

利用参考文献 [1] 提出的方法，不必列任何方程式就可以方便地确定$\boldsymbol{A}$中各元素。

为了阅读方便，现将其中的主要点简述如下：在(11)式中令 $w=0$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2 & (12\text{-}1)\\ \dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2 & (12\text{-}2)\end{cases}$$

在(12-1) 式中，令 $x_2=0$，得到 $\dot{x}_1=a_{11}x_1$，这是一个等值一阶子网络的微分方程，据此作出其等值的一阶子网络，用三要素法求时间常数的方法即可求得 a_{11}。令 $x_2=0$，如 $x_2=i_L$ 则是将 L 开路（同样，如 $x_2=v_C$ 则将 C 短路），所以求 a_{11} 的等值电路是将原电路的输入置零，再将 x_2 支路置零（电感开路，电容短路）即可。例如对图 1 所示二阶网络，如设 $x_1=v_C$，$x_2=i_L$，求 a_{11} 时令 i_S 开路、L 支路开路得到求 a_{11} 的电路如图 2，从图 2 立即得到 $a_{11}=-\dfrac{1}{R_1C}$. 同理，求 a_{22} 的电路如图 3，$a_{22}=-R_2/L$. 实际上从原电

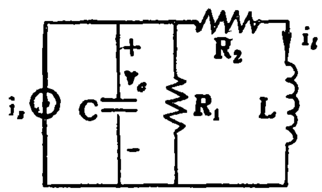

图 1

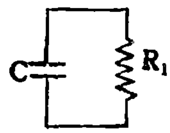

图 2

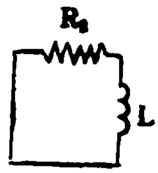

图 3

路立即可以观察出 a_{11} 和 a_{22}，完全不必作图 2 和图 3。

下面讨论 a_{12} 和 a_{21} 的求法。在(12-1)式中令 $x_1=0$，得到

$$a_{12}=\frac{\dot{x}_1}{x_2}\bigg|_{x_1=0}$$

对图 1 来说，由于设 $x_1=v_C$，$x_1=0$ 就是将 C 短路，但要标出通过 C 的电流 $C\dot{x}_1$，再保持 x_2 支路不动，得到求 a_{12} 电路如图 4，由于令 $x_1=v_C=0$，则 R_1 两端电压为零，通过 R_1 电流为零，故可去掉 R_1. 从图 4 得到 $C\dot{x}_1=-x_2$，$\therefore a_{12}=\dfrac{\dot{x}_1}{x_2}\bigg|_{x_1=0}=-\dfrac{1}{C}$.

同理在(12-2)式中令 $x_2=0$，得到 $a_{21}=\dfrac{\dot{x}_2}{x_1}\bigg|_{x_2=0}$，$x_2=i_L=0$. 即是将 L 开路，但要标出 L 两端的开路电压 $L\dot{x}_2$，再保持 x_1 支路不动，得到求 a_{21} 电路如图 5. 由图 5 得到 $L\dot{x}_2=x_1$，

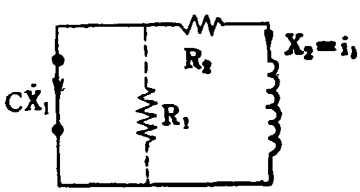

图 4

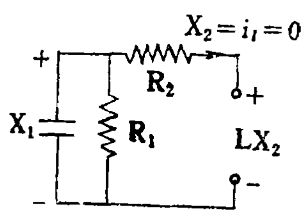

图 5

$$\therefore \qquad a_{21}=\frac{\dot{x}_2}{x_1}\bigg|_{x_2=0}=\frac{1}{L}$$

一旦求得 $\boldsymbol{A}$ 的四个元素即可算出 S_1 和 S_2.

2. 特征根为两个不等负实数的情况

$$S_{1,2}=(-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0})/2$$

如 $a_1^2-4a_0>0$，则 S_1、S_2 为两个不等负实数。

状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1'=a_{11}x_1'+a_{12}x_2' & (13\text{-}1)\\ \dot{x}_2'=a_{21}x_1'+a_{22}x_2' & (13\text{-}2)\end{cases}$$

初始状态为

$$x_1(0_+)、x_2(0_+) \tag{13-3}$$

设解为

$$x_1'=B_{11}'e^{s_1t}+B_{12}'\,e^{s_2t} \tag{14-1}$$

$$x_2'=B_{21}'e^{s_1t}+B_{22}'e^{s_2t} \tag{14-2}$$

怎样从已算出的四个要素 S_1、S_2、$x_1(0_+)$、$x_2(0_+)$ 计算待定系数 B_{11}'、B_{12}'、B_{21}' 和 B_{22}'，在道理与三要素法计算 B' 时是一样的。

在解(14)式中，令 $t=0$

$$\begin{cases}x_1(0_+)=B_{11}'+B_{12}' & (15\text{-}1)\\ x_2(0_+)=B_{21}'+B_{22}' & (15\text{-}2)\end{cases}$$

对解(14)式求导一次

$$\begin{cases}\dot{x}_1'=B_{11}'S_1e^{s_1t}+B_{12}'S_2e^{s_2t} & (16\text{-}1)\\ \dot{x}_2'=B_{21}'S_1e^{s_1t}+B_{22}'S_2e^{s_2t} & (16\text{-}2)\end{cases}$$

将(16)式代入原方程(13)式，令 $t=0$

$$\begin{cases}B_{11}'S_1+B_{12}'S_2=a_{11}x_1(0_+)+a_{12}x_2(0_+) & (17\text{-}1)\\ B_{21}'S_1+B_{22}'S_2=a_{21}x_1(0_+)+a_{22}x_2(0_+) & (17\text{-}2)\end{cases}$$

由(15-1)、(17-1)两式解得

$$B_{11}'=\frac{(a_{11}-S_2)x_1(0_+)+a_{12}x_2(0_+)}{S_1-S_2} \tag{18}$$

$$B_{12}'=x_1(0_+)-B_{11}' \tag{19}$$

由(15-2)、(17-2)解出（或由轮换原则将(18)、(19)两式中的1与2互换）

$$B_{22}'=\frac{(a_{22}-S_1)x_2(0_+)+a_{21}x_1(0_+)}{S_2-S_1} \tag{20}$$

$$B_{21}'=x_2(0_+)-B_{22}' \tag{21}$$

用三要素法求一阶网络零输入响应需要确定两个要素 S（或 τ）与 $x(0_+)$，然后计算 B' 代入解的表达式得到零输入响应。用六要素法求二阶网络零输入响应需要确定四个要素 S_1、S_2 和 $x_1(0_+)$、$x_2(0_+)$，然后计算 B_{11}'、B_{12}'、B_{21}' 和 B_{22}' 代入解的表达式才能得到零输入响应。

例 1　电路如图6：$R_1=2$，$R_2=4$，$C=1/2$，$L=1$，已知 $i_L(0_+)=-2$，$v_C(0_+)=2$，求 $v_C(t)$

解 设 $x_1=v_C(t)$

$x_2=i_L(t)$

则
$$\boldsymbol{x}(0_+)=\begin{bmatrix}x_1(0_+)\\x_2(0_+)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_C(0_+)\\i_L(0_+)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$$

先求$\boldsymbol{A}$中诸元素。求 a_{11} 时断开 L 支路，得到 $a_{11}=-\dfrac{1}{R_1C}=-\dfrac{1}{2\times\dfrac{1}{2}}=-1$，求 a_{22} 时，

短路C支路，得到 $a_{22}=-\dfrac{R_2}{L}=-4$. ∵ $a_{12}=\left.\dfrac{\dot{x}_1}{x_2}\right|_{x_1=0}$，令 $x_1=v_C=0$（即将C短路，标出通过C的电流 $C\dot{x}_1$），再保持 $(x_2=i_L)$ L支路不动，得到求 a_{12} 电路如图7，由图7得 $x_2=-C_1\dot{x}_1$，∴ $a_{12}=-\dfrac{1}{C}=-2$.

求 a_{21} 电路如图8，∴$a_{21}=\left.\dfrac{\dot{x}_2}{x_1}\right|_{x_2=0}=\dfrac{1}{L}=1$

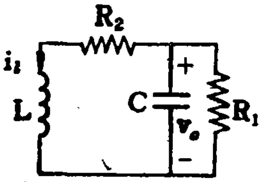

图 6

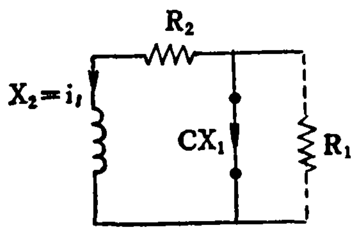

图 7

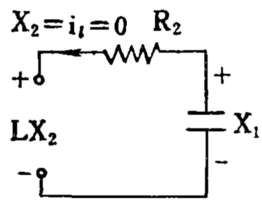

图 8

$$p(s)=S^2+a_1S+a_0=0$$

其中
$$a_1=-(a_{11}+a_{22})=5$$
$$a_0=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=6$$
$$p(s)=S^2+5S+6=0$$

解出
$$S_1=-2\qquad S_2=-3$$

由(18)式
$$B'_{11}=\frac{(a_{11}-S_2)x_1(0_+)+a_{12}x_2(0_+)}{S_1-S_2}=8$$

由(19)式
$$B'_{12}=x_1(0_+)-B'_{11}=-6$$
$$\therefore\quad v_C(t)=x'_1(t)=B'_{11}e^{s_1t}+B'_{12}e^{s_2t}$$
$$=8e^{-2t}-6e^{-3t}\qquad t\geqslant0$$

3. 特征根为一对共轭复数的情况

$$S_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0}}{2}$$

如$a_1^2-4a_0<0$，$S_{1,2}$ 为一对共轭复数。设$S_1=-\alpha+j\omega$，则 $S_2=-\alpha-j\omega$，可以证明这

时B'_{11}与B'_{12}也为一对共轭复数。设$B'_{11}=|B'_{11}|e^{j\angle B'_{11}}$，则$B'_{12}=|B'_{11}|e^{-j\angle B'_{11}}$，代入解的表达式

$x'_1=B'_{11}e^{S_1t}+B'_{12}e^{S_2t}$，经过化简得到

$$x'_1=2|B'_{11}|e^{-at}\cos(\omega t+\angle B'_{11}) \tag{22}$$

同理

$$x'_2=2|B_{21}|e^{-at}\cos(\omega t+\angle B'_{21}) \tag{23}$$

4. 重根情况

$$S_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0}}{2}$$

如 $a_1^2-4a_0=0$，则$S_1=S_2=S=-\frac{a_1}{2}=\frac{a_{11}+a_{22}}{2}$

可以证明

$$x'_1=(x_1(0_+)+B'_{12}t)e^{St} \tag{24}$$

$$x'_2=(x_2(0_+)+B'_{21}t)e^{St} \tag{25}$$

式中

$$B'_{12}=(a_{11}-S)x_1(0_+)+a_{12}x_2(0_+)$$

$$B'_{21}=(a_{22}-S)x_2(0_+)+a_{21}x_1(0_+)$$

三、零状态响应

1. 输入为直流电源($w=W$)的情况

求零状态响应的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}''_1=a_{11}x''_1+a_{12}x''_2+b_1W\\ \dot{x}''_2=a_{21}x''_1+a_{22}x''_2+b_2W\\ x_1(0_+)=x_2(0_+)=0\end{cases}$$

设解为

$$\begin{cases}x''_1=B''_{11}e^{s_1t}+B''_{12}e^{s_2t}+x_1(\infty)\\ x''_2=B''_{21}e^{s_1t}+B''_{22}e^{s_2t}+x_2(\infty)\end{cases} \tag{26}$$

令上式$t=0$

$$\begin{cases}0=B''_{11}+B''_{12}+x_1(\infty)\\ 0=B''_{21}+B''_{22}+x_2(\infty)\end{cases} \tag{27}$$

对解求导一次与原方程对照，令 $t=0$

$$\begin{cases}b_1W=B''_{11}S_1+B''_{12}S_2\\ b_2W=B''_{21}S_1+B''_{22}S_2\end{cases} \tag{28}$$

令原方程中 $t=\infty$

$$\begin{cases}0=a_{11}x_1(\infty)+a_{12}x_2(\infty)+b_1W\\ 0=a_{21}x_1(\infty)+a_{22}x_2(\infty)+b_2W\end{cases} \tag{29}$$

比较(28)、(29)两式得到

$$\begin{cases} B''_{11}S_1+B''_{12}S_2=-a_{11}x_1(\infty)-a_{12}x_2(\infty) \\ B''_{21}S_1+B''_{22}S_2=-a_{21}x_1(\infty)-a_{22}x_2(\infty) \end{cases} \tag{30}$$

由(27)与(30)两式解得

$$B''_{11}=\frac{(a_{11}-S_2)[-x_1(\infty)]+a_{12}[-x_2(\infty)]}{S_1-S_2} \tag{31}$$

$$B''_{12}=[-x_1(\infty)]-B''_{11} \tag{32}$$

$$B''_{22}=\frac{(a_{22}-S_1)[-x_2(\infty)]+a_{21}[-x_1(\infty)]}{S_2-S_1} \tag{33}$$

$$B''_{21}=[-x_2(\infty)]-B''_{22} \tag{34}$$

由(31)——(34)式算出 B''_{11}、B''_{12}、B''_{21} 与B''_{22}，将其代入解的表达式(26)，就得到了零状态响应。

现在我们回想一下，对一阶网络求零输入响应时的系数 $B'=x(0_+)$，如将其中的 $x(0_+)$换成$-x(\infty)$，就得到了求零状态响应时的系数 $B''=-x(\infty)$。这种有趣的现象在计算二阶网络时也存在,仔细观察求零输入响应的B'_{11}的(18)式和求零状态响应的B''_{11}的(31)的式，我们发现只要将(18)式中的 $x_1(0_+)$、$x_2(0_+)$ 换成$-x_1(\infty)$、$-x_2(\infty)$，就得到了(31)式。

2. 三要素法的再回顾

这一小节讨论的问题是：对于一阶网络，当输入为时间函数 $w(t)$，已知网络存在稳态解答时，怎样快速求其零状态响应。这时微分方程为

$$\begin{cases} \dot{x}''=ax''+bw(t) \\ x(0_+)=0 \end{cases}$$

设解为

$$x''=B''e^{St}+x_s(t) \tag{35}$$

式中 $x_s(t)$ 是 $t\to\infty$后变量 x 的稳态解。令解(35)式中$t=0_+$，将得到的$0=B''+x_s(0_+)$代入(35)式，得到

$$x''(t)=x_s(t)-x_s(0_+)e^{St} \tag{36}$$

式中 $x_s(0_+)$ 是稳态解 $x_s(t)$ 令 $t=0$ 时的数值。全响应

$$\begin{aligned} x(t)&=x'(t)+x''(t) \\ &=x(0_+)e^{St}+x_s(t)-x_s(0_+)e^{St} \\ &=x_s(t)+[x(0_+)-x_s(0_+)]e^{St} \end{aligned} \tag{37}$$

(37) 式是求解一阶网络全响应的更一般表达式。当输入为直流电源时，由于 $x_s(t)=x_s(0_+)=x(\infty)$ 代入(37)式，就得到了我们熟知的求解一阶网络的快速公式

$$x=x(\infty)+[x(0_+)-x(\infty)]e^{St}$$

怎样将这种分析法应用到求解二阶网络，这就是下一小节要讨论的问题。

3. 输入为时间函数 $w(t)$ 的情况

求零状态响应的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1''=a_{11}x_1''+a_{12}x_2''+b_1w(t)\\ \dot{x}_2''=a_{21}x_1''+a_{22}x_2''+b_2w(t)\\ x_1(0_+)=x_2(0_+)=0\end{cases}$$

假定网络存在稳态解，我们就可以设解为

$$\begin{cases}x_1''=B_{11}''e^{s_1t}+B_{12}''e^{s_2t}+x_{1s}(t)\\ x_2''=B_{21}''e^{s_1t}+B_{22}''e^{s_2t}+x_{2s}(t)\end{cases} \tag{38}$$

令(38)式中 $t=0$

$$\begin{cases}0=B_{11}''+B_{12}''+x_{1s}(0_+)\\ 0=B_{21}''+B_{22}''+x_{2s}(0_+)\end{cases} \tag{39}$$

对(38)式求导

$$\begin{cases}\dot{x}_1''=B_{11}''S_1e^{s_1t}+B_{12}''S_2e^{s_2t}+\dot{x}_{1s}(t)\\ \dot{x}_2''=B_{21}''S_1e^{s_1t}+B_{22}''S_2e^{s_2t}+\dot{x}_{2s}(t)\end{cases}$$

与原方程对照，令 $t=0$，得到

$$\begin{cases}b_1w(0_+)=B_{11}''S_1+B_{12}''S_2+\dot{x}_{1s}(0_+)\\ b_2w(0_+)=B_{21}''S_1+B_{22}''S_2+\dot{x}_{2s}(0_+)\end{cases} \tag{40}$$

在原方程中考虑到电路达到稳定后 $(t\to\infty)$，$x_1''=x_{1s}(t)$；$x_2''=x_{2s}(t)$，输入仍为 $w(t)$，$\dot{x}_1''=\dot{x}_{1s}(t)$；$\dot{x}_2''(t)=\dot{x}_{2s}(t)$，将这些关系代入原方程得到

$$\begin{cases}\dot{x}_{1s}(t)=a_{11}x_{1s}(t)+a_{12}x_{2s}(t)+b_1w(t)\\ \dot{x}_{2s}(t)=a_{21}x_{1s}(t)+a_{22}x_{2s}(t)+b_2w(t)\end{cases}$$

令上式中 $t=0$

$$\begin{cases}\dot{x}_{1s}(0_+)=a_{11}x_{1s}(0_+)+a_{12}x_{2s}(0_+)+b_1w(0_+)\\ \dot{x}_{2s}(0_+)=a_{21}x_{1s}(0_+)+a_{22}x_{2s}(0_+)+b_2w(0_+)\end{cases} \tag{41}$$

(41) 式代入(40)式

$$\begin{cases}B_{11}''S_1+B_{12}''S_2=-a_{11}x_{1s}(0_+)-a_{12}x_{2s}(0_+)\\ B_{21}''S_1+B_{22}''S_2=-a_{21}x_{1s}(0_+)-a_{22}x_{2s}(0_+)\end{cases} \tag{42}$$

由(39)(42)两式解出

$$B_{11}''=\frac{(a_{11}-S_2)[-x_{1s}(0_+)]+a_{12}[-x_{2s}(0_+)]}{S_1-S_2} \tag{43}$$

$$B_{12}''=[-x_{1s}(0_+)]-B_{11}'' \tag{44}$$

$$B_{22}''=\frac{(a_{22}-S_1)[-x_{2s}(0_+)]+a_{21}[-x_{1s}(0_+)]}{S_2-S_1} \tag{45}$$

$$B_{21}''=[-x_{2s}(0_+)]-B_{22}'' \tag{46}$$

将(43)—(46)式代入解的表达式(38)，即得零状态响应。(43)—(46)式是更一般的表达式，当输入为直流电源时，由于$x_{1s}(0_+)=x_1(\infty)$、$x_{2s}(0_+)=x_2(\infty)$，(43)—(46)式就变成了(31)—(34)式。

四、全 响 应

全响应(x)＝零输入响应(x')＋零状态响应(x'')。

例 2 电路如图9，$L=1$，$C=1/2$，$R_1=4$，$R_2=2$，已知 $v_C(0_-)=4$，$i_L(0_-)=1$，试求 $i_s=u(t)$ 时 $v_C(t)$ 的全响应。

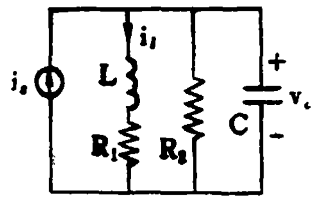

图 9

解 1 设 $x_1=v_C$，$x_2=i_L$

先求零输入响应 v_C'

$$a_{11}=-\frac{1}{R_2C}=-1$$

$$a_{22}=-\frac{R_1}{L}=-4$$

$$a_{12}=-\frac{1}{C}=-2$$

$$a_{21}=\frac{1}{L}=1$$

$$S^2+5S+6=0,\qquad S_1=-2,\ S_2=-3$$

$$x_1(0_+)=x_1(0_-)=4,\ x_2(0_+)=x_2(0_-)=1$$

解得

$$B'_{11}=\frac{(a_{11}-S_2)x_1(0_+)+a_{12}x_2(0_+)}{S_1-S_2}=(-1+3)\cdot4+(-2)\cdot1=6$$

$$B'_{12}=x_1(0_+)-B'_{11}=4-6=-2$$

$$\therefore\quad v_C'=6e^{-2t}-2e^{-3t}\qquad t\geqslant0$$

再求零状态响应v_c''

$$x_1(\infty)=i_s\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot R_2=4/3$$

$$x_2(\infty)=i_s\cdot\frac{R_2}{R_1+R_2}=1/3$$

$$B''_{11}=\frac{(a_{11}-S_2)[-x_1(\infty)]+a_{12}[-x_2(\infty)]}{S_1-S_2}=-2$$

$$B''_{12}=[-x_1(\infty)]-B''_{11}=2/3$$

$$\therefore\quad v_C''=-2e^{-2t}+\frac{2}{3}\cdot e^{-3t}+\frac{4}{3}\qquad t\geqslant0$$

全响应

$$v_C=v_C'+v_C''=4e^{-2t}-\frac{4}{3}e^{-3t}+\frac{4}{3}\qquad t\geqslant0$$

为了对比，我们再用其它两种方法求解。

解 2　用列v_C的微分方程进行求解（见图10）

由KCL：

$$i_L+i_2+i_C=i_s \tag{47}$$

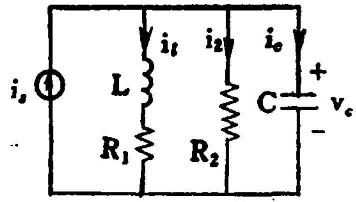

图　10

支路方程：

$$i_C=C\frac{dv_C}{dt}$$

$$i_2=\frac{v_C}{R_2} \tag{48}$$

$$v_C=L\frac{di_L}{dt}+R_1i_L \tag{49}$$

(48)、(49)两式代入(47)式

$$i_L=i_s-\frac{v_C}{R_2}-C\frac{dv_C}{dt} \tag{50}$$

求导一次

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{di_s}{dt}-\frac{1}{R_2}\ \frac{dv_C}{dt}-C\frac{d^2v_C}{dt^2} \tag{51}$$

(50)、(51)代入(49)

$$v_C=L\frac{di_s}{dt}-\frac{L}{R_2}\ \frac{dv_C}{dt}-LC\frac{d^2v_C}{dt^2}+R_1i_s-\frac{R_1}{R_2}v_C-R_1C\frac{dv_C}{dt}$$

化简得到以v_C为变量的二阶微分方程

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2}+\left(R_1C+\frac{L}{R^2}\right)\frac{dv_C}{dt}+\left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)v_C=L\frac{di_s}{dt}+R_1i_s$$

设 $v_C(0)=V_0$，$i_L(0)=I_0$

求初始条件

$$v_C(0_-)=V_0$$

$$i_L(0_-)=I_0=i_s(0)-\frac{V_0}{R_2}-C\frac{dv_C}{dt}(0)$$

$$\therefore\quad \frac{dv_C}{dt}(0)=\frac{1}{C}\left[i_s(0)-\frac{V_0}{R_2}-I_0\right]$$

代入数字

$$\frac{1}{2}\ \frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{5}{2}\ \frac{dv_C}{dt}+3v_C=\frac{di_s}{dt}+4i_s$$

$$v_C(0_-)=4,\quad \frac{dv_C}{dt}(0_-)=2\left(0-\frac{4}{2}-1\right)=-6$$

先求零输入响应v_C'这时方程为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ \dfrac{d^2v_C}{dt^2}+\dfrac{5}{2}\ \dfrac{dv_C}{dt}+3v_C=0\\[2ex] v_C(0_-)=4,\qquad \dfrac{dv_C}{dt}(0_-)=-6\end{cases}$$

解得 $S_1=-2$，$S_2=-3$

设解为

$$y=K_1e^{-2t}+K_2e^{-3t}$$

求导一次

$$\frac{dy}{dt}=-2K_1e^{-2t}-3K_2e^{-3t}$$

代入初始条件

$$\begin{cases}4=K_1+K_2\\-6=-2K_1-3K_2\end{cases}$$

解出 $K_1=6$，$K_2=-2$

$$\therefore\quad v_C'=6e^{-2t}-2e^{-3t}\qquad t\geqslant 0$$

再求零状态响应 v_C'' 这时方程为

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{5}{2}\frac{dv_C}{dt}+3v_C=\delta(t)+4u(t)$$

设解为

$$y=\left(K_1e^{-2t}+K_2e^{-3t}+\frac{4}{3}\right)\cdot u(t)$$

（参看参考文献 [2] 第六章）

求导一次

$$\frac{dy}{dt}=\left(K_1+K_2+\frac{4}{3}\right)\delta(t)+(-2K_1e^{-2t}-3K_2e^{-3t})\cdot u(t)$$

再求导一次

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\left(K_1+K_2+\frac{4}{3}\right)\frac{d\delta}{dt}+(-2K_1-3K_2)\delta(t)+(4K_1e^{-2t}+9K_2e^{-3t})\cdot u(t)$$

代入原方程比较系数得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\left(K_1+K_2+\frac{4}{3}\right)=0\\ \frac{5}{2}\left(K_1+K_2+\frac{4}{3}\right)-\frac{1}{2}(2K_1+3K_2)=1\end{cases}$$

解出 $K_1=-2$，$K_2=\frac{2}{3}$

$$\therefore\quad v_C''=\left(-2e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{-3t}+\frac{4}{3}\right)\cdot u(t)$$

或 $$v_C''=-2e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{-3t}+\frac{4}{3}\qquad t\geqslant 0$$

全响应 $$v_C=v_C'+v_C''=4e^{-2t}-\frac{4}{3}e^{-3t}+\frac{4}{3}\qquad t\geqslant 0$$

解 3 选 v_C 与 i_L 为状态变量，列状态方程进行求解。（见图10）
列出状态方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dv_C}{dt}=-\dfrac{1}{R_2C}v_C-\dfrac{1}{C}i_L+\dfrac{1}{C}i_s\\[2ex]\dfrac{di_L}{dt}=\dfrac{1}{L}v_C-\dfrac{R_1}{L}i_L\end{cases}$$

代入数字解得

$$S_1=-2,\quad S_2=-3$$

$\because n=2\quad e^{s_it}=K_0+K_1S_i$（见参考文献[3]§2.3）

$$\begin{matrix}S_1=-2\\S_2=-3\end{matrix}\qquad\begin{cases}e^{-2t}=K_0-2\\e^{-3t}=K_0-3K_1\end{cases}$$

解出

$$\begin{cases}K_0=3e^{-2t}-2e^{-3t}\\K_1=e^{-2t}-e^{-3t}\end{cases}$$

代入 e^{At} 展开式

$$\begin{aligned}e^{At}&=K_0\boldsymbol{I}+K_1\boldsymbol{A}\\&=(3e^{-2t}-2e^{-3t})\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+(e^{-2t}-e^{-3t})\begin{bmatrix}-1&-2\\1&-4\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}2e^{-2t}-e^{-3t}&-2e^{-2t}+2e^{-3t}\\e^{-2t}-e^{-3t}&-e^{-2t}+2e^{-3t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

零输入响应

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}'=e^{At}x(0)&=\begin{bmatrix}2e^{-2t}-e^{-3t}&-2e^{-2t}+2e^{-3t}\\e^{-2t}-e^{-3t}&-e^{-2t}+2e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}6e^{-2t}-2e^{-3t}\\3e^{-2t}-2e^{-3t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad v_C'=6e^{-2t}-2e^{-3t}\qquad t\geqslant 0$$

零状态响应

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}''&=\int_0^t e^{A(t-\tau)}bw(\tau)d\tau\\&=\int_0^t\begin{bmatrix}2e^{-2(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)}&-2e^{-2(t-\tau)}+2e^{-3(t-\tau)}\\e^{-2(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)}&-e^{-2(t-\tau)}+2e^{-3(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\cdot 1d\tau\\&=\int_0^t\begin{bmatrix}4e^{-2t}\cdot e^{2\tau}-2e^{-3t}\cdot e^{3\tau}\\2e^{-2t}\cdot e^{2\tau}-2e^{-3t}\cdot e^{3\tau}\end{bmatrix}d\tau\end{aligned}$$

我们只求 v_C'' 可以只积上面一项

$$v_C''=\int_0^t(4e^{-2t}e^{2\tau}-2e^{-3t}\cdot e^{3\tau})d\tau$$

$$=\frac{4}{3}-2e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{-3t}$$

全响应

$$v_C=v_C'+v_C''=4e^{-2t}-\frac{4}{3}e^{-3t}+\frac{4}{3}\qquad t\geqslant 0$$

从这个例子可以看出：用六要素法求解可以省去列微分方程，只要利用求解电路稳态的方法求出 $x_1(0_+)$、$x_2(0_+)$，$x_1(\infty)$、$x_2(\infty)$，S_1、S_2，六个要素，就可算出相应的系数而得到解答。所应用的只是代数运算，比较简便易行。

参 考 文 献

[1] 李国吉，等值电路法列写线性网络的状态方程，国防科技大学学报，1982 第三期

[2] C.A.狄苏尔，葛守仁著，基本电路理论（上），1979.

[3] 国防科大四系电子线路教研室编，电路分析基础补充讲义（网络图论与状态方程），1979.

Six-Element Method

(A Short-Cut Formula for Analyzing Second-Order Networks)

Li Guo-ji

Abstract

This paper presents a brief theortical analysis of the so-called three-element method, a short-cut formula for analyzing first-order networks, and then, applying the results to second-order networks, dere-lops some short-cut formulae for solving zero-input responses and zero-state responses in various cases. These formulae are referred to as six-element method. As in the case of three-element method, here one need not write any differential equations and make any differential and integral calculations. By making only some simple algebraic calculations, the responses of second-order networks can be obtained. For comparison, some examples are provided.