线性语言和顺序语言关于置换的判定问题

王兵山　肖计田　黄晓秋

S.Ginsburg 和 G.F.Rose 在 [1] 中利用可定义集合及顺序可定义集合的概念，得到了cf$l$（上下文无关语言）和 sl（顺序语言）关于gsm（广义顺序机）和 csm（完全顺序机）的判定问题之不可解性。本文用更初等的方法，不仅得到了ll和sl关于gsm 和csm 的判定问题之不可解性，而且还得到了ll（线性语言）和 sl 关于置换和同态的判定问题之不可解性，顺便还得到了 ll 和 sl 关于补运算的不封闭性。

我们首先引进一些概念和记号。注意，凡是文中没有说明的概念和符号，都可以在[1]和[3]中找到。

设$\Sigma=\{a,b\}$且$e\notin\Sigma$，并定义同态$\tau:\{a,b,\ e\}\to\Sigma^*$如下：

$$\tau(a)=bab,\quad \tau(b)=baab,\quad \tau(e)=baaab.$$

对 Σ^+ 中的任意字表

$$W=w_1,\cdots,\ w_n\qquad n\geqslant 1$$

我们令

$$M'(W)=\{ba^{i_k}\cdots ba^{i_1}ew_{i_1}\cdots w_{i_k}\ |1\leqslant i_j\leqslant n \text{ 且 } 1\leqslant j\leqslant k\}$$

此外，对 Σ^+ 中的任意两个字表

$$Y=y_1,\cdots,y_n\quad \text{和}\quad Z=z_1,\cdots,z_n\qquad n\geqslant 1$$

再令

$$M'(Y,Z)=M'(Y)e(M'(Z))^R$$

$$M'_s=\{x_1ex_2ex_2^Rex_1^R\ |x_1,\ x_2\in\Sigma^*\}$$

$$M(Y,Z)=\tau(M'(Y,Z))$$

$$M_s=\tau(M'_s)$$

$$L(Y,Z)=\Sigma^+\diagdown(M(Y,Z)\cap M_s)$$

命题 1　语言 $L_1=\Sigma^+\diagdown\{waw^R\ |w\in\Sigma^*\}$ 既是 sl，又是ll.

证明　我们取文法

$$G_1=\langle\{S_0,\ S_1\},\ \Sigma,P_1,S_0\rangle$$

其中 P_1 由以下的生成式组成：

$$S_0\to b$$

$$S_0\to aa\qquad S_0\to ab\qquad S_0\to ba\qquad S_0\to bb$$

$$S_0\to aS_0a\qquad S_0\to bS_0b\qquad S_0\to aS_1b\qquad S_0\to bS_1a$$

$$S_1\to a\qquad S_1\to b$$

本文1983年1月12日收到

$$S_1 \to aS_1 \quad S_1 \to bS_1$$

则显然有 $L(G_1)=L_1$。因为 G_1 既是线性文法，又是顺序文法。所以 L_1 既是 ll，又是 sl。

命题 2 语言 $L_2=\{\tau(w_1ew_2ew_3ew_4)|w_1,\cdots,w_4\in\Sigma^*$ 且 $w_1ew_2\notin M'(Y)\}$ 既是 sl，又是 ll.

证明 我们取文法

$$G_2=\langle\{S_2,\cdots,S_6\},\ \Sigma,\ P_2,\ S_2\rangle$$

其中 P_2 由以下的生成式组成：

$$S_2\to S_2\tau(a) \quad S_2\to S_2\tau(b) \quad S_2\to S_3\tau(e)$$
$$S_3\to S_3\tau(a) \quad S_3\to S_3\tau(b) \quad S_3\to S_4\tau(e)$$
$$S_3\to\tau(ee) \quad S_3\to\tau(a)S_5\tau(e)$$

$$S_4\to\tau(ba^{n+1})S_5 \quad S_4\to\tau(bb)S_5$$
$$S_4\to\tau(e)S_6 \quad S_4\to\tau(be)S_6$$
$$S_4\to\tau(ba^i)S_4\tau(y_i)$$
$$S_4\to\tau(ba^ie\alpha)$$
$$S_4\to\tau(ba^ie\beta)$$
$$S_4\to\tau(ba^ib)S_5\tau(\beta)$$
$$\alpha,\beta\in\Sigma^*,\ |\alpha|<|y_i|,\ |\beta|=|y_i| \text{ 且 } \beta\neq y_i$$
$$i=1,\cdots,n.$$

$$S_5\to\tau(e)$$
$$S_5\to\tau(a)S_5 \quad S_5\to\tau(b)S_5 \quad S_5\to\tau(e)S_6$$

$$S_6\to\tau(a) \quad S_6\to\tau(b)$$
$$S_6\to\tau(a)S_6 \quad S_6\to\tau(b)S_6$$

则显然有 $L_2=L(G_2)$。因为 G_2 既是线性文法，又是顺序文法。所以 L_2 既是 ll，又是 sl。

命题 3 语言$L_3=\{\tau(w_1ew_2ew_3ew_4)|w_1,\cdots,w_4\in\Sigma^*$ 且 $w_4^Rew_3^R\notin M'(Z)\}$既是$sl$，又是 ll。

证明 和命题 2 的证明类似，我们取

$$G_3=\langle\{S_7,\cdots,S_{11}\},\ \Sigma,P_3,S_7\rangle$$

其中 P_3 由以下的生成式组成：

$$S_7\to\tau(a)S_7 \quad S_7\to\tau(b)S_7 \quad S_7\to\tau(e)S_8$$
$$S_8\to\tau(a)S_8 \quad S_8\to\tau(b)S_8 \quad S_8\to\tau(e)S_9$$
$$S_8\to\tau(ee) \quad S_8\to\tau(e)S_{10}\tau(a)$$

$$S_9\to S_{10}\tau(a^{n+1}b) \quad S_9\to S_{10}\tau(bb)$$
$$S_9\to S_{11}\tau(e) \quad S_9\to S_{11}\tau(eb)$$

$$S_9 \to \tau(z_i^R) S_9 \tau(a^i b)$$
$$S_9 \to \tau(\alpha e a^i b)$$
$$S_9 \to \tau(\beta e a^i b)$$
$$S_9 \to \tau(\beta) S_{10} \tau(b a^i b)$$
$$\alpha, \beta \in \Sigma^*, \quad |\alpha| < |z_i|, \quad |\beta| = |z_i| \text{ 且 } \beta \neq z_i^R$$
$$i = 1, \cdots, n.$$

$$S_{10} \to \tau(e)$$
$$S_{10} \to S_{10}\tau(a) \qquad S_{10} \to S_{10}\tau(b) \qquad S_{10} \to S_{11}\tau(e)$$
$$S_{11} \to \tau(a) \qquad S_{11} \to \tau(b)$$
$$S_{11} \to S_{11}\tau(a) \qquad S_{11} \to S_{11}\tau(b)$$

则显然有 $L_3 = L(G_3)$. 因为 G_3 既是线性文法，又是顺序文法。所以 L_3 既是 ll，又是 sl。

定理 1

i) $L(Y,Z)$ 既是 sl，又是 ll；

ii) $M(Y,Z) \cap M_s \neq \phi$ 当且仅当关于Y,Z的 PCP 无解；

iii) $M(Y,Z) \cap M_s = \phi$ 当且仅当 $M(Y,Z) \cap M_s$ 为 cfl.

证明 因为 τ 为1－1的，所以有

$$M(y,z) \cap M_s = \tau(M'(y,z) \cap M_s')$$
$$= \{\tau(ba^{i_k} \cdots ba^{i_1} e y_{i_1} \cdots y_{i_k} e z_{i_k}^R \cdots z_{i_1}^R e a^{i_1} b \cdots a^{i_k} b) |$$
$$1 \leqslant i_j \leqslant n \text{ 且 } 1 \leqslant j \leqslant k, \ y_{i_1} \cdots y_{i_k} = z_{i_1} \cdots z_{i_k}\}$$

因此ii)真，根据 $uvwxy$ 字定理[3]，iii)也真。

为证i)也真，我们再令

$$L_{11} = \{ba^{i_1} \cdots ba^{i_k} \mid 1 \leqslant i_j \leqslant n \text{ 且 } 1 \leqslant j \leqslant k\}$$
$$L_{12} = \{y_{i_1} \cdots y_{i_k} \mid 1 \leqslant i_j \leqslant n \text{ 且 } 1 \leqslant j \leqslant k\}$$
$$L_{13} = \{z_{i_k}^R \cdots z_{i_1}^R \mid 1 \leqslant i_j \leqslant n \text{ 且 } 1 \leqslant j \leqslant k\}$$
$$L_{14} = \{a^{i_k} b \cdots a^{i_1} b \mid 1 \leqslant i_j \leqslant n \text{ 且 } 1 \leqslant j \leqslant k\}$$

则显然 L_{11}，L_{12}，L_{13} 和 L_{14} 都是正规集。因为正规集对連结、求补和同态等运算都封闭[3]，所以知道 $L_4 = \Sigma^+ \setminus \tau(L_{11} e L_{12} e L_{13} e L_{14})$ 也是正规集。这表明 L_4 既是 sl[1]，又是 ll。其次，又因为

$$L(Y,Z) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$$

所以 $L(Y,Z)$ 也既是 sl，又是 ll，即i)为真。

推论 2 sl 和 ll 对求补运算不封闭。

定理 3 以下的判定问题是不可解的：

对任意两个 sl（或 ll）L_1 及 L_2，是否有对正规集封闭的置换 f 使 $f(L_1) = L_2$？

证明 沿用以上的记号。我们取

$$L_1=\Sigma^+ \quad 且 \quad L_2=L(Y,Z)$$

1° 若$M(Y,Z)\cap M_s=\phi$，则 $L_1=L_2$. 只要令

$$f(a)=a \qquad f(b)=b$$

则f显然是一个对正规集封闭的置换且 $f(L_1)=L_2$

2° 若$M(Y,Z)\cap M_s\neq\phi$,则由定理1的iii)知道,$M(Y,Z)\cap M_s$ 不是cfl.因此$L_2=\Sigma^+\setminus M(Y,Z)\cap M_s$也不是正规集。但因 $L_1=\Sigma^+$ 是正规集，所以就不会存在对正规集封闭的置换f使 $f(L_1)=L_2$.

由1°和2°得到，存在对正规集封闭的置换f使$f(L_1)=L_2$，当且仅当 $M(Y,Z)\cap M_s=\phi$. 根据定理1的ii) 知道,$M(y,z)\cap M_s=\phi$ 当且仅当关于 Σ^+中的Y及Z之PCP无解，已知关于 Σ^+ 中Y及Z的PCP无解[2]，所以本定理成立。

推论 4 以下的判定问题都是不可解的：

对任意两个sl（或ll）L_1及L_2，是否存在

i）同态h使 $h(L_1)=L_2$?

ii）置换f使 $f(L_1)=L_2$?

iii) ε-无关置换 f_1 使$f_1(L_1)=L_2$?

iv）限于抹去k个連续符号的置换 f_2 使 $f_2(L_1)=L_2$?

v）gsm g使 $g(L_1)=L_2$?

vi）csm g_1使 $g_1(L_1)=L_2$?

证明 因为h，f，f_1，f_2，g和g_1都对正规集是封闭的[3]，所以由定理2即得出本推论。

参考文献

[1] S.Ginsburg and Gene F.Rose
Some Recursively Unsolvable Problems in ALGOL-Like Language
1963 JACM 10:1 29-47

[2] EMIL L.Post
A Variant of a Recursively Unsolvable Problem 1946 Bull. Am. Math. Soc. , 52 264～268

[3] John E.Hopcroft and Jeffrey D.Ullman
Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation 1979.

Some Decisoin Problems in a Linear Languages and Sequential Languages for a Substitution

Wang Bing-shan Xiao Ji-tian Huang Xiao-qiu

Abstract

In this paper, we examined the decision problems in a linear languages (for short LL) and Sequential languages (for short SL) for a Substitution. Following results are proved:

Theorem 3 The problems of determining of given LL's (or SL's) L_1 and L_2 whefher or not there exists a substitution f mapping regular sets into regular sets is undecidable.

Corollary 4 They are all undecidable to determine of arbitrary LL's (or SL's) L_1 and L_2 whether or not a f so that $f(L_1)=L_2$, where

i) f is a homomorphism, or

ii) f is a substitution, or

iii) f is a ε-free substitution, or

iv) f is a k-limited erasing substitution, or

v) f is a generalized sequential machine, or

vi) f is a complete sequential machine.