

用快速多项式变换(FPT)计算

二维 DFT 的混合算法

蒋 增 荣

提 要 本文首先提出用多项式逆变换计算二维 DFT 的方法 (k_2 是奇数或偶数分别讨论), 然后再讨论混合算法。对于 $N \times N (N=2^l)$ 二维 DFT, 混合算法所需的运算量为

$$Mu = \frac{1}{2} N^2 \log_2 N - \frac{1}{2} N^2 + N$$

$$Ad = 2N^2 \log_2 N$$

与通常以 2 为基的二维 FFT (行列算法) 比较, 加法次数相同, 乘法次数减少约 20—40%。

一、引 言

对于 $N \times N (N=2^l)$ 二维离散富里叶变换

$$X_{k_1, k_2} = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x_{n_1, n_2} W^{n_1 k_1} W^{n_2 k_2} \quad (k_1, k_2 = 0, 1, \dots, N-1)$$

$W = e^{-i2\pi/N}$, 我们在 [1] 中用多项式正变换给出了一个分离算法, H.J.Nussbaumer 在 [2] 中用多项式逆变换也给出了一个分离算法, 不难证明, 两者需要的运算量是相同的, 计算复杂性也类似, 前者对于 k_2 是奇数及偶数的 X_{k_1, k_2} 分开计算, 可用并行算法, 后者对于 $k_2 < \frac{N}{2}$ 及 $k_2 \geq \frac{N}{2}$ 的 X_{k_1, k_2} 分开计算。两者所用的方法均是利用多项式变换将二维 DFT 映射为一维 DFT, 然后再利用一维 FFT 得到快速计算的结果。

本文首先对于 k_2 是奇数及偶数两种不同情况给出用多项式逆变换计算 X_{k_1, k_2} 的方法, 然后再讨论混合算法, 所需运算量与 [1]、[2] 相同。

二、 k_2 为奇数及偶数时, X_{k_1, k_2} 的多项式逆变换算法

$N \times N (N=2^l)$ 二维 DFT 是

$$X_{k_1, k_2} = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x_{n_1, n_2} W^{n_1 k_1} W^{n_2 k_2}, \quad (k_1, k_2 = 0, 1, \dots, N-1) \quad (2.1)$$

其中 $W = e^{-i2\pi/N}$, x_{n_1, n_2} ($n_1, n_2 = 0, 1, \dots, N-1$) 是已知复数。

当 $k_2 = 2u$ ($u = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$) 时, 利用 $W^{\frac{N}{2}} = -1$ 就有

$$\begin{aligned} X_{k_1, 2u} &= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x_{n_1, n_2} W^{n_1 k_1} W^{2u n_2} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N-1} \left[\sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{n_1, n_2} W^{2u n_2} + \sum_{n_2=\frac{N}{2}}^{N-1} x_{n_1, n_2} W^{2u n_2} \right] W^{n_1 k_1} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x_{n_1, n_2} + x_{n_1, n_2 + \frac{N}{2}} \right) W^{n_1 k_1} W^{2u n_2}. \end{aligned}$$

同理, 当 $k_2 = 2u + 1$ ($u = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$) 时, 有

$$X_{k_1, 2u+1} = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} (x_{n_1, n_2} - x_{n_1, n_2 + \frac{N}{2}}) W^{n_1 k_1} W^{(2u+1)n_2}$$

记

$$\begin{aligned} y_{n_1, n_2} &= x_{n_1, n_2} + x_{n_1, n_2 + \frac{N}{2}}, \quad \left(n_1 = 0, 1, \dots, N-1; n_2 = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right) \\ z_{n_1, n_2} &= x_{n_1, n_2} - x_{n_1, n_2 + \frac{N}{2}}, \quad \left(n_1 = 0, 1, \dots, N-1; n_2 = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

于是有

$$\begin{aligned} X_{k_1, 2u} &= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{n_1, n_2} W^{n_1 k_1} W^{2u n_2}, \\ &\quad \left(k_1 = 0, 1, \dots, N-1; u = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} X_{k_1, 2u+1} &= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} z_{n_1, n_2} W^{n_1 k_1} W^{(2u+1)n_2}, \\ &\quad \left(k_1 = 0, 1, \dots, N-1; u = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

这样就把(2.1)式的计算化为(2.3)和(2.4)式的计算。

先讨论(2.3)式的计算。显然有

$$X_{k_1, 2u} = W^{-u} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{n_1, n_2} W^{n_1 k_1} W^{(2n_2+1)u}$$

记 $\langle (2n_2+1)n_1 \rangle = (2n_2+1)n_1 \bmod N$, 由于 $N = 2^t$, $2n_2+1$ 是奇数, 所以 $(2n_2+1, N) = 1$, 从而当 $n_1 = 0, 1, \dots, N-1$ 时, $\langle (2n_2+1)n_1 \rangle$ 是 $0, 1, \dots, N-1$ 的一个排列, 因此

$$X_{k_1, 2u} = W^{-u} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{\langle (2n_2+1)n_1 \rangle, n_2} W^{(2n_2+1)n_1 k_1} W^{(2n_2+1)u} \quad (2.5)$$

$$\left(k_1 = 0, 1, \dots, N-1; u = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right)$$

其中数阵 $[y_{\langle(2n_2+1)n_1\rangle, n_2}]$ 是数阵 $[y_{n_1, n_2}]$ 的一个排列, 如 $N=8$, $[y_{\langle(2n_2+1)n_1\rangle, n_2}]$ 为 8×4 数阵:

$$\begin{pmatrix} y_{00} & y_{01} & y_{02} & y_{03} \\ y_{10} & y_{31} & y_{52} & y_{73} \\ y_{20} & y_{61} & y_{22} & y_{63} \\ y_{30} & y_{11} & y_{72} & y_{53} \\ y_{40} & y_{41} & y_{42} & y_{43} \\ y_{50} & y_{71} & y_{12} & y_{33} \\ y_{60} & y_{21} & y_{62} & y_{23} \\ y_{70} & y_{51} & y_{32} & y_{13} \end{pmatrix}$$

记

$$\bar{Y}_{n_1, u}^{(2)} = \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{\langle(2n_2+1)n_1\rangle, n_2} W^{(2n_2+1)u} \left(n_1=0, 1, \dots, N-1; u=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \right) \quad (2.6)$$

作多项式序列 $\{\bar{X}_{n_1}^{(2)}(z)\}$:

$$\bar{X}_{n_1}^{(2)}(z) = \sum_{u=0}^{\frac{N}{2}-1} \bar{X}_{n_1, u}^{(2)} z^u \quad (n_1=0, 1, \dots, N-1) \quad (2.7)$$

于是有

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n_1}^{(2)}(z) z^{-n_1 k_1} &= \sum_{u=0}^{\frac{N}{2}-1} \bar{X}_{n_1, u}^{(2)} z^{u-n_1 k_1} \\ &= \sum_{u=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[\sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{\langle(2n_2+1)n_1\rangle, n_2} W^{(2n_2+1)u} \right] z^{u-n_1 k_1} \\ &= \sum_{u=-n_1 k_1}^{\frac{N}{2}-n_1 k_1-1} \left[\sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{\langle(2n_2+1)n_1\rangle, n_2} W^{(2n_2+1)(u+n_1 k_1)} \right] z^u \\ &= \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[\sum_{u=-n_1 k_1}^{\frac{N}{2}-n_1 k_1-1} W^{(2n_2+1)u} z^u \right] y_{\langle(2n_2+1)n_1\rangle, n_2} W^{(2n_2+1)n_1 k_1} \end{aligned}$$

如果 $(zW)^{\frac{N}{2}}=1$, 即 $z^{\frac{N}{2}}+1=0$, 那么若 $-n_1 k_1 = m_1 \cdot \frac{N}{2} + r_1$ ($0 \leq r_1 < \frac{N}{2}$), 有

$$\begin{aligned} \sum_{u=-n_1 k_1}^{\frac{N}{2}-n_1 k_1-1} W^{(2n_2+1)u} z^u &= \sum_{u=m_1 \cdot \frac{N}{2} + r_1}^{\frac{N}{2}+m_1 \cdot \frac{N}{2} + r_1-1} W^{(2n_2+1)u} z^u \\ &= \sum_{u=r_1}^{\frac{N}{2}+r_1-1} W^{(2n_2+1)u} z^u = \sum_{u=r_1}^{\frac{N}{2}-1} W^{(2n_2+1)u} z^u + \sum_{u=\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}+r_1-1} W^{(2n_2+1)u} z^u \\ &= \sum_{u=r_1}^{\frac{N}{2}-1} W^{(2n_2+1)u} z^u + \sum_{u=0}^{r_1-1} W^{(2n_2+1)u} z^u \\ &= \sum_{u=0}^{\frac{N}{2}-1} W^{(2n_2+1)u} z^u \pmod{(z^{\frac{N}{2}}+1)} \end{aligned}$$

因此

$$\bar{X}_{n_1}^{(2)} z^{-n_1 k_1} = \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{u=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{\langle (2n_2+1)n_1 \rangle, n_2} W^{(2n_2+1)n_1 k_1} W^{(2n_2+1)u} z^u \bmod (z^{\frac{N}{2}} + 1)$$

若记

$$X_{k_1}^{(2)}(z) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \bar{X}_{n_1}^{(2)} z^{-n_1 k_1} \bmod (z^{\frac{N}{2}} + 1), \quad (k_1 = 0, 1, \dots, N-1) \quad (2.8)$$

则由(2.5)式有

$$\begin{aligned} X_{k_1}^{(2)}(z) &= \sum_{u=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[\sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{\langle (2n_2+1)n_1 \rangle, n_2} W^{(2n_2+1)n_1 k_1} W^{(2n_2+1)u} \right] z^u \\ &= \sum_{u=0}^{\frac{N}{2}-1} W^u X_{k_1, 2u} z^u, \quad (k_1 = 0, 1, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

这样由(2.6)~(2.9)式就得到

$$\left\{ \begin{aligned} X_{k_1}^{(2)}(z) &= \sum_{n_1=0}^{N-1} \bar{X}_{n_1}^{(2)} z^{-n_1 k_1} \bmod (z^{\frac{N}{2}} + 1), \quad (k_1 = 0, 1, \dots, N-1) \\ X_{k_1}^{(2)}(z) &= \sum_{u=0}^{\frac{N}{2}-1} W^u X_{k_1, 2u} z^u \quad (k_1 = 0, 1, \dots, N-1) \\ \bar{X}_{n_1}^{(2)}(z) &= \sum_{u=0}^{\frac{N}{2}-1} \bar{X}_{n_1, u}^{(2)} z^u \quad (n_1 = 0, 1, \dots, N-1) \\ \bar{X}_{n_1, u}^{(2)} &= W^u \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{\langle (2n_2+1)n_1 \rangle, n_2} W_{N/2}^{n_2 u}, \\ &\quad \left(n_1 = 0, 1, \dots, N-1; u = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \right) \end{aligned} \right. \quad (I)$$

其中 $W_{N/2} = W^2 = e^{-i4\pi/N}$ 。由(I)式看出计算 $X_{k_1, 2u}$ 的步骤:

(1) 先计算 $\bar{X}_{n_1, u}^{(2)}$, 这首先重排 $[y_{n_1, n_2}]$ 获得 $N \times \frac{N}{2}$ 数阵 $[y_{\langle (2n_2+1)n_1 \rangle, n_2}]$, 然后对

这数阵的每一行(共 N 行)进行 DFT, 这共要计算 N 个 $\frac{N}{2}$ 点的一维 DFT:

$$\sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{\langle (2n_2+1)n_1 \rangle, n_2} W_{N/2}^{u n_2}, \quad (n_1 = 0, 1, \dots, N-1)$$

由于 $N = 2^t$, 这可以用一维 FFT 计算, 最后再作与 $1, W, \dots, W^{\frac{N}{2}-1}$ 的乘积。如以

$M\left(\frac{N}{2}\right)$ 和 $A\left(\frac{N}{2}\right)$ 表示用 FFT 计算 $\frac{N}{2}$ 点 DFT 所需的复乘及复加的次数, 那么算出 $\bar{X}_{n_1, u}^{(2)}$

共需

$$M_1 = NM\left(\frac{N}{2}\right) + N\left(\frac{N}{2} - 1\right)$$

$$A_1 = NA\left(\frac{N}{2}\right)$$

次复乘及复加。

(2) 形式多项式序列 $\{\bar{X}_{n_1}^{(2)}(z)\}$ 。这可不计算计算量。

(3) 计算 $X_{k_1}^{(2)}(z)$, 不难看出 [3], 这是以不可约多项式 $z^{\frac{N}{2}}+1$ 为模、 z 为根的多项式逆变换, 由于 $z \cdot (-z^{\frac{N}{2}-1}) \equiv 1 \pmod{(z^{\frac{N}{2}}+1)}$ 。所以 $z^{-1} \equiv -z^{\frac{N}{2}-1}$, 因此计算这多项式逆变换不需要乘法, 只需加法。由于 $N=2'$, 故可快速多项式变换 (FPT) 计算, 这共需 $N \log_2 N$ 对次数为 $\frac{N}{2}-1$ 的多项式的加法, 所以共需复加的次数为

$$A_2 = \frac{1}{2} N^2 \log_2 N$$

(4) 最后由 $X_{k_1}^{(2)}(z)$ 的系数 $b_{k_1, u}^{(2)}$ 乘以 W^{-u} 就得到 $X_{k_1, 2u}$, 这共需

$$M_2 = N \left(\frac{N}{2} - 1 \right)$$

次复乘。

由 (2.2) 式计算 y_{n_1, n_2} 需要

$$A_3 = \frac{1}{2} N^2$$

次复加。因此按 (I) 式全部算出 $X_{k_1, 2u} \left(k_1 = 0, 1, \dots, N-1; u = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \right)$ 所需的复乘及复加次数为

$$M_{2u} = M_1 + M_2 = N M \left(\frac{N}{2} \right) + 2N \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \quad (2.10)$$

$$A_{2u} = A_1 + A_2 + A_3 = N A \left(\frac{N}{2} \right) + \frac{1}{2} N^2 \log_2 N + \frac{1}{2} N^2 \quad (2.11)$$

再讨论 (2.4) 式的计算, 将 (2.4) 式改写作

$$X_{k_1, 2u+1} = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} (z_{n_1, n_2} W^{n_2}) W^{n_1 k_1} W^{2n_2 u}$$

将它与 (2.3) 式比较, 除了用 $z_{n_1, n_2} W^{n_2}$ 代替 y_{n_1, n_2} 外, 结构完全一样, 同样可推得

$$\left\{ \begin{aligned} X_{k_1}^{(1)}(z) &= \sum_{n_1=0}^{N-1} \bar{X}_{n_1}^{(1)}(z) z^{-n_1 k_1} \pmod{(z^{\frac{N}{2}}+1)}, \quad (k_1 = 0, 1, \dots, N-1) \\ X_{k_1}^{(1)}(z) &= \sum_{u=0}^{\frac{N}{2}-1} W^u X_{k_1, 2u+1} z^u \quad (k_1 = 0, 1, \dots, N-1) \\ \bar{X}_{n_1}^{(1)}(z) &= \sum_{u=0}^{\frac{N}{2}-1} \bar{X}_{n_1, u}^{(1)} z^u \quad (n_1 = 0, 1, \dots, N-1) \\ \bar{X}_{n_1, u}^{(1)} &= W^u \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} (z_{(2n_2+1)n_1, n_2} W^{n_2}) W^{\frac{n_2 u}{N/2}}, \\ &\quad \left(n_1 = 0, 1, \dots, N-1; u = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \right) \end{aligned} \right. \quad (\text{I})$$

(Ⅱ)式的计算基本上和(I)式一样,不同地方是在重排得到的数阵 $[z < (2n_2 + 1)n_1, n_2]$ 上乘以 W^{n_2} ,也就是增加与 $1, W, \dots, W^{\frac{N}{2}-1}$ 的 $N\left(\frac{N}{2} - 1\right)$ 次复乘。因此按(Ⅱ)式计算出 $X_{k_1, 2u+1}\left(k_1=0, 1, \dots, N-1; u=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1\right)$ 所需的复乘及复加的次数为

$$M_{2u+1} = NM\left(\frac{N}{2}\right) + 3N\left(\frac{N}{2} - 1\right) \quad (2.12)$$

$$A_{2u+1} = NA\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{1}{2}N^2\log_2 N + \frac{1}{2}N^2 \quad (2.13)$$

这样就得到用多项式逆变换计算 X_{k_1, k_2} 的流程图(如图1所示)。

按(I)及(Ⅱ)计算出全部 $X_{k_1, k_2}(k_1, k_2=0, 1, \dots, N-1)$ 所需运算量(复乘及复加)为:

$$Mu = M_{2u} + M_{2u+1} = 2NM\left(\frac{N}{2}\right) + 5N\left(\frac{N}{2} - 1\right)$$

$$Ad = A_{2u} + A_{2u+1} = 2NA\left(\frac{N}{2}\right) + N^2\log_2 N + N^2$$

用基-2一维FFT计算 $\frac{N}{2}$ 点DFT, 不计与1及 i 的平凡乘法, 有 $M\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{2} \log_2$

$$\frac{N}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{N}{2} + 2, A\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{N}{2} \log_2 \frac{N}{2} \text{故}$$

$$Mu = \frac{1}{2}N^2\log_2 N + \frac{1}{2}N^2 - N \quad (2.14)$$

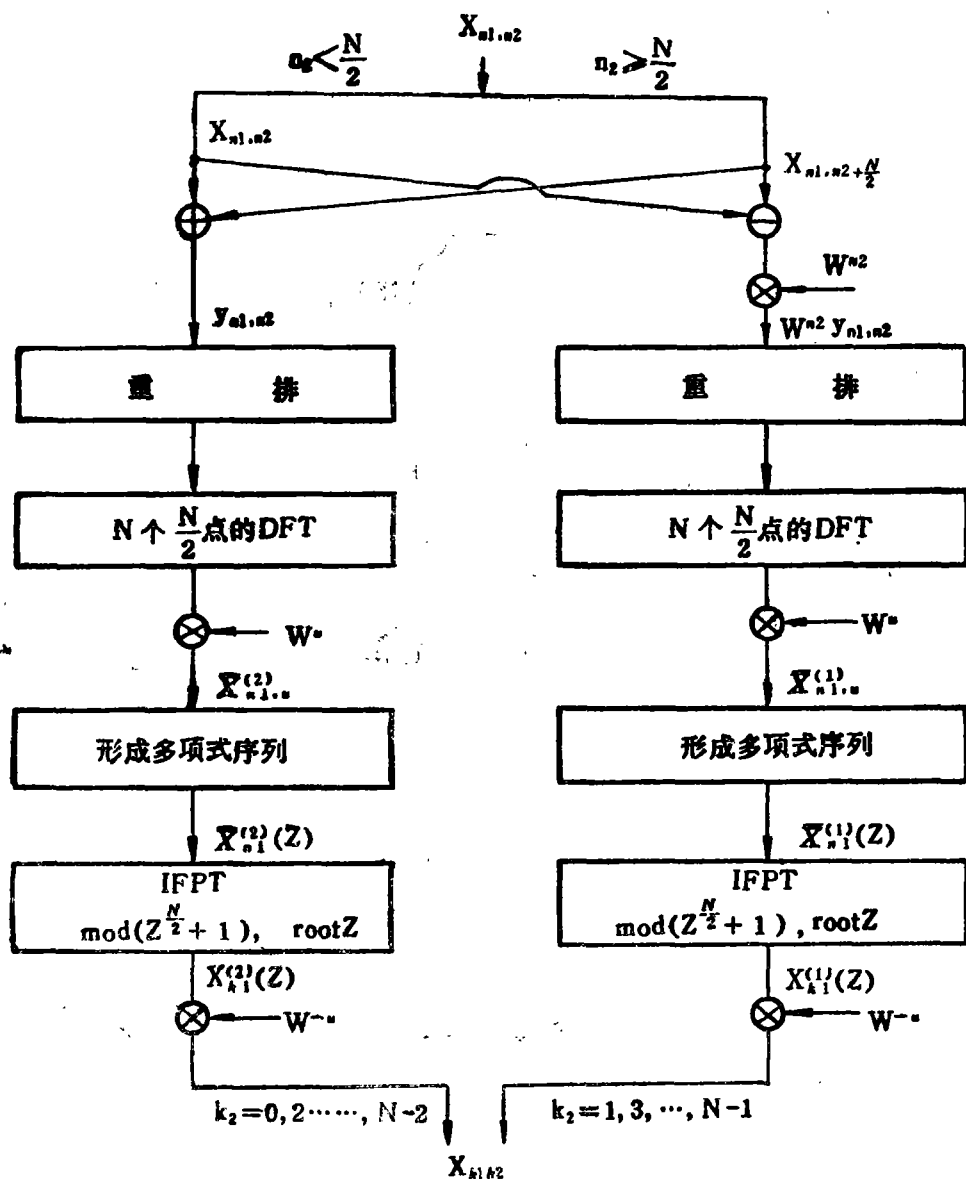
$$Ad = 2N^2\log_2 N \quad (2.15)$$

通常基-2FFT计算(行列算法)二维DFT($N \times N$)所需运算量(复乘及复加)为:

$$M'u = 2NM(N) = N^2\log_2 N - 3N^2 + 4N \quad (2.16)$$

$$A'd = 2NA(N) = 2N^2\log_2 N \quad (2.17)$$

不难看出, 当 N 增加时, Mu 比 $M'u$ 增加得慢些, 当 $N \geq 2^7$ 时, $Mu \leq M'u$, N 愈大, 运算量愈节省, 当 $N = 2^{10}$ 时, $Mu = 5504000$, $M'u = 7344128$, 减少约25%。加法次数相同。

图 1 k_2 为奇数及偶数时, X_{k_1, k_2} 的多项式逆变换分离算法流程图

三、混 合 算 法

上一段是利用多项式逆变换计算 X_{k_1, k_2} , 其主要之点是利用多项式逆变换将二维 DFT ($N \times N$) 映射为 $(2N \text{ 个 } \frac{N}{2} \text{ 点})$ 一维 DFT (映射所需的附加乘法共有 $5N(\frac{N}{2} - 1)$)

次), 通常二维 DFT 的行列算法 (二维 FFT) 虽然也是通过一维 DFT 来计算, 但需要计算 $2N$ 个 N 点的一维 DFT, 因此当 N 适当大, 满足 $2N\left(\frac{N}{4}\log_2 N - \frac{1}{2}N\right) \geq 5N\left(\frac{N}{2} - 1\right)$, 即 $N \geq 128$ 时, 利用上段方法, 运算量可获得节省。

但是和 [1] 中叙述的利用多项式正变换或 [2] 中提出的利用多项式逆变换 (X_{k_1, k_2} 和 $X_{k_1, k_2 + \frac{N}{2}}$ 分开计算, 这里 $k_2 = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$) 计算 X_{k_1, k_2} 的方法比较, 上段方法所需的附加乘法多了 $2N\left(\frac{N}{2} - 1\right) = N^2 - 2N$ 次, 这主要是计算 $X_{k_1, 2u+1}$ 所需附加乘法多了些, 如果利用本段的混合算法, 这多出的乘法便可省去。

混合算法是这样的: $X_{k_1, 2u}$ 仍用 [1] 计算, 步骤同前, 所需运算量也如 (2.10), (2.11) 式所示, $X_{k_1, 2u+1}$ 则用多项式正变换计算。计算方法如下:

由 (2.4) 式知

$$X_{k_1, 2u+1} = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} z_{n_1, n_2} W^{n_1 k_1} W^{(2u+1)n_2},$$

$$\left(k_1 = 0, 1, \dots, N-1; u = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\right)$$

其中 $z_{n_1 n_2}$ 如 (2.2) 式所示。仍用 $\langle (2u+1)k_1 \rangle$ 表示 $(2u+1)k_1 \bmod N$, 当 $k_1 = 0, 1, \dots, N-1$ 时, $\langle (2u+1)k_1 \rangle$ 是 $0, 1, \dots, N-1$ 的一个排列。

因此

$$X_{\langle (2u+1)k_1 \rangle, 2u+1} = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} z_{n_1, n_2} W^{(2u+1)n_1 k_1} W^{(2u+1)n_2} \quad (3.1)$$

$$\left(k_1 = 0, 1, \dots, N-1; u = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\right)$$

从而有

$$X_{\langle (2u+1)k_1 \rangle, 2u+1} = \sum_{n_1=0}^{N-1} \left[\sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} z_{n_1, n_2} z^{n_2} \right] z^{n_1 k_1 \bmod (z^{\frac{N}{2}} + 1)}, (z - W^{2u+1})$$

$$\left(k_1 = 0, 1, \dots, N-1; u = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\right) \quad (3.2)$$

事实上将上式右端的 z 用 W^{2u+1} 代换便得到 (3.1) 式。又由于 $W = e^{-i2\pi/N}$, 所以 $z^{\frac{N}{2}} + 1 \equiv 0 \bmod (z - W^{2u+1})$ 。

为便于计算, 将 (3.2) 式等价地写作

$$X_{n_1}^{(1)}(z) = \sum_{n_2=0}^{N-1} z_{n_1, n_2} z^{n_2} \quad (n_1=0, 1, \dots, N-1) \quad (3.3)$$

$$\bar{X}_{\langle(2u+1)k_1\rangle}^{(1)}(z) \equiv \sum_{n_1=0}^{N-1} X_{n_1}^{(1)}(z) z^{n_1 k_1} \bmod (z^{\frac{N}{2}} + 1) \quad (3.4)$$

$$\left(k_1=0, 1, \dots, N-1; u=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \right)$$

$$X_{\langle(2u+1)k_1\rangle, 2u+1} \equiv \bar{X}_{\langle(2u+1)k_1\rangle}^{(1)}(z) \bmod (z - W^{2u+1}) \quad (3.5)$$

$$\left(k_1=0, 1, \dots, N-1; u=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \right)$$

由于 z_{n_1, n_2} 是由给定数阵 $[x]$ 确定的, 所以(3.3)式的多项式序列是已知的, 由 [3] 知,

(3.4)式是以不可约多项式 $z^{\frac{N}{2}} + 1$ 为模, z 为根的多项式变换(正变换), 它可用 F P T 计算($N=2^l$), 且只需

$$A_1 = \frac{1}{2} N^2 \log_2 N \quad (3.6)$$

次复加, 不要乘法。由于模是 $\frac{N}{2}$ 次的, 所以(3.4)式计算结果必为

$$\bar{X}_{\langle(2u+1)k_1\rangle}^{(1)}(z) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{k_1, l}^{(1)} z^l, \quad (k_1=0, 1, \dots, N-1) \quad (3.7)$$

其中 $y_{k_1, l}^{(1)}$ 为与 z 无关的常数。代入(3.5)式便有

$$\begin{aligned} X_{\langle(2u+1)k_1\rangle, 2u+1} &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} y_{k_1, l}^{(1)} W^{(2u+1)l} \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} (y_{k_1, l}^{(1)} W^l) W^{\frac{N}{2}l}, \quad \left(k_1=0, 1, \dots, N-1; u=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

不难看出这是以

$$\left(y_{k_1, 0}^{(1)}, W y_{k_1, 1}^{(1)}, W^2 y_{k_1, 2}^{(1)}, \dots, W^{\frac{N}{2}-1} y_{k_1, \frac{N}{2}-1}^{(1)} \right)^T \quad (3.9)$$

作为输入序列的 $\frac{N}{2}$ 点的一维 D F T, 由于 $\frac{N}{2} = 2^{l-1}$, 所以 (3.8) 式可用 F F T 计算, 这

共需计算 N 个 $\frac{N}{2}$ 点的 D F T 以及 $N \left(\frac{N}{2} - 1 \right)$ 次附加乘法 (与 $1, W, \dots, W^{\frac{N}{2}-1}$ 相乘)。

这样用多项式正变换计算 $X_{k_1, 2u+1}$ 共需计算 N 个 $\frac{N}{2}$ 点一维 D F T、 $N \left(\frac{N}{2} - 1 \right)$ 次附

加乘法、一个 N 点的 F P T、 $\frac{1}{2} N^2$ 个由 x_{n_1, n_2} 获得 z_{n_1, n_2} 的加法以及一个重排, 所需的

运算量为

$$M_{2u+1} = NM\left(\frac{N}{2}\right) + N\left(\frac{N}{2} - 1\right) \quad (3.10)$$

$$A_{2u+1} = NA\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{1}{2}N^2\log_2 N + \frac{1}{2}N^2 \quad (3.11)$$

按上述混合算法, 计算出所有 $X_{k_1, k_2} (k_1, k_2 = 0, 1, \dots, N-1)$, 所需运算量为

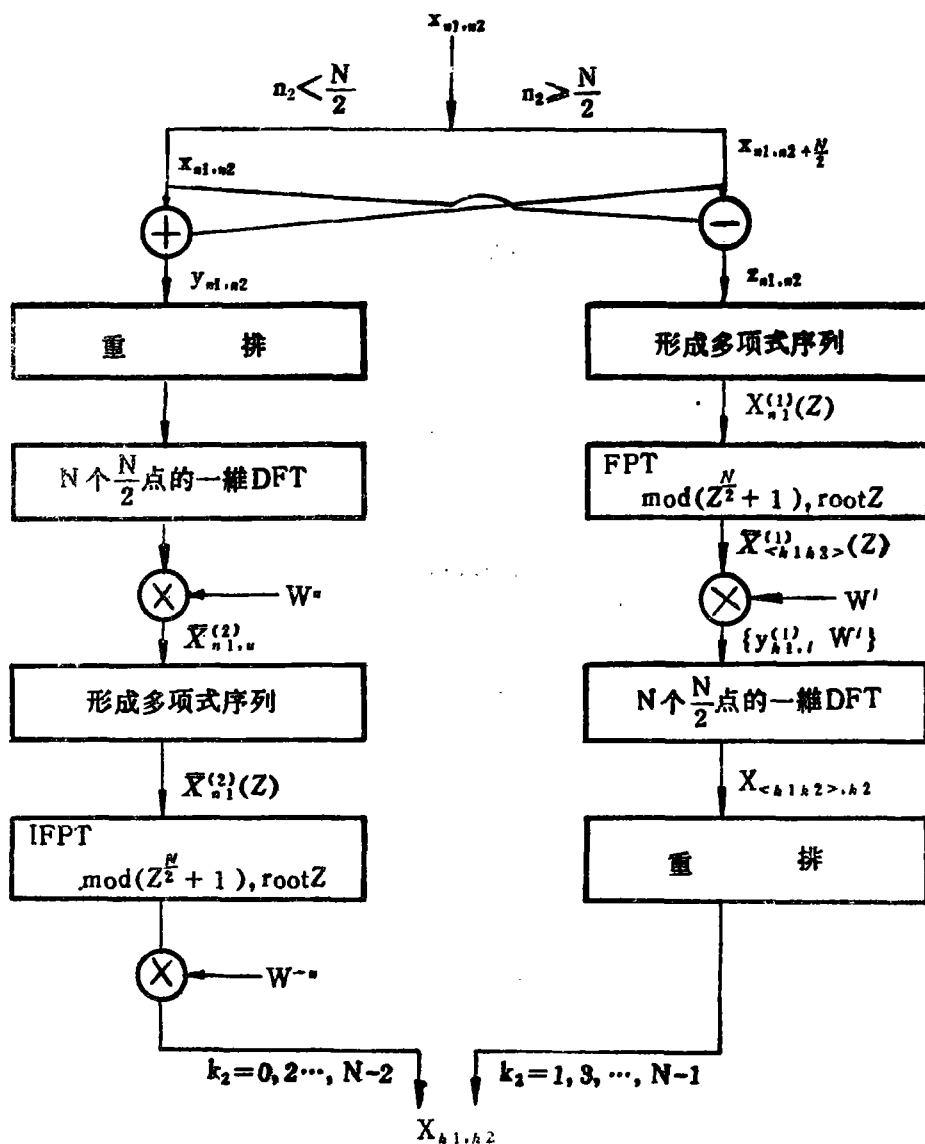


图 2 混合算法流程图

$$Mu = M_{2u} + M_{2u+1} = 2NM\left(\frac{N}{2}\right) + 3N\left(\frac{N}{2} - 1\right)$$

$$Ad = A_{2u} + A_{2u+1} = 2NA\left(\frac{N}{2}\right) + N^2 \log N + N^2$$

用基-2FFT 计算 $\frac{N}{2}$ 点 DFT, 不计乘 1 与 i 的平凡乘法, 最后得到混合算法所需运算量:

$$Mu = 2N\left(\frac{N}{4} \log_2 N - N + 2\right) + 3N\left(\frac{N}{2} - 1\right) = \frac{N^2}{2} \log_2 N - \frac{N^2}{2} + N \quad (3.12)$$

$$Ad = 2N \cdot \frac{N}{2} \log_2 \frac{N}{2} + N^2 \log_2 N + N^2 = 2N^2 \log_2 N \quad (3.13)$$

这与[1]及[2]的结果相同。与通常二维 DFT 的行列算法比较 ((2.16)及(2.17)式), 加法次数相同, 当 $N \geq 32$ 时, $Mu < M'u$, 一般可节省 30—40% 乘法次数, 具体比较参看[1]的表 1。

混合算法的流程图如图 2 表示。

参 考 文 献

- [1] 蒋增荣, “用快速多项式变换 (FPT) 计算二维离散富里叶变换 (DFT)”, 国防科技大学学报, 1982 年第四期。
- [2] H.J. Nussbaumer, “New Polynomial Transform Algorithms for Multidimensional DFT'S and Convolutions,” IEEE Trans., Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-29, No:1, February 1981.
- [3] 蒋增荣, “多项式变换及其在卷积计算中的应用”, 计算数学, 第五卷第三期, 1983.8.

A Mixed Algorithm for the Computation of Two-Dimensional DFT Using Fast Polynomial Transforms

Jiang Zeng-rong

Abstract

In this paper, first, We introduce a method for computation of two-dimensional DFT by inverse Polynomial Transforms (When k_2 is odd or even, We discuss respectively). Then We develop mixed algorithm to compute two-dimensional DFT, the arithmetic operand of this technique for the

$N \times N (N=2^l)$ two-dimensional DFT is

$$Mu = \frac{1}{2} N^2 \log_2 N - \frac{1}{2} N^2 + N$$

$$Ad = 2N^2 \log_2 N。$$

As Compared with the conventional radix-2 two-dimensional FFT, this mixed algorithm requires less number of multiplications (decrease by 20—40%) and same number of additions.