国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八五年第一期　总第四十九期　No.1 1985 Sum. 49

n阶线性常系数微分方程初条件不变性

吴成禧

提　要　本文讨论了n阶线性常系数微分方程初条件不变性，并用例子说明其应用。

一

对单输入—单输出的线性定常电路，输入—输出之间关系可用n阶线性常系数微分方程表达，即

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\cdot y^{(k)}=F(w) \tag{1}$$

其中y为输出，$y^{(k)}$为y的k阶导数，w为输入，$F(w)=\sum_{H=0}^{m} b_{m-H}\cdot w^{(H)}$，$w^{(H)}$为$w$的$H$阶导数。方程(1)的初条件为

$$y^{(k)}(0_-)\ (k=0,1,\cdots,n-1) \tag{2}$$

当由(1)式直接求其唯一解时，要求$y^{(k)}(0_+)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$。一般情况下，$y^{(k)}(0_+)\neq y^{(k)}(0_-)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$。即初条件要突变的。下面我们将讨论一种有用的所谓初条件不变性。

所谓n阶线性常系数微分方程初条件不变性可陈述如下：当且仅当方程(1)中的$F(w)$不包含冲击函数$f(t)\delta(t)$及其导数的奇异函数时，$y^{(k)}(0_+)=y^{(k)}(0_-)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$。

证明：充分性。在方程(1)中，$F(w)$不包含冲击函数$f(t)\delta(t)$及其导数的奇异函数，则$y^{(0)}=y$中必不包含阶跃函数$f(t)u(t)$。否则方程(1)左边将包含冲击函数$f(t)\delta(t)$及导数的奇异函数。同理，$y^{(k)}(t)$ $(k=1,\cdots,n-1)$，也必不包含阶跃函数$f(t)u(t)$。换句话说，$y^{(k)}(t)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$，它们在$t=0$处连续，即有$y^{(k)}(0_+)=y^{(k)}(0_-)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$。

必要性，是显然的　　　　　　　　　　证毕。

本文1983年11月5日收到

推论 1：当 $F(w)=0$，即对方程（1）的齐次方程，有 $y^{(k)}(0_+)=y^{(k)}(0_-)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$。

推论 2：设线性定常电路具有零状态为

$$\{v_{ci}(0_-)=0,i=1,2,\cdots,k\}\bigcup_{n=k+l}\{i_{Lj}(0_-)=0,\ j=1,2,\cdots,l)\}\qquad(3)$$

当$F(w)$不包含冲击函数 $f(t)\delta(t)$ 及其导数的奇异函数时，则 $y^{(k)}(0_+)=0(k=0,1,\cdots,n-1)$。

推论 3：当且仅当方程(1)中的 $F(w)$ 包含冲击函数 $f(t)\delta(t)$ 及其导数的奇异函数时，不存在 $y^{(k)}(0_+)=y^{(k)}(0_-)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$。

二

应用初条件不变性求解方程(1)可以避免求 $y^{(k)}(0_+)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$的麻烦。

设 $w=\sum\limits_{J=0}^{q}\overset{(J)}{\delta(t)}$，方程(1)及(2)之唯一解，即全响应 y

$$y=y_i+y_0\qquad(4)$$

其中零输入响应 y_i 是令 $w=0$ 或 $F(w)=0$ 所得下列方程之解

$$\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\cdot y_i^{(k)}=0\qquad(5)$$

及

$$y_i^{(k)}(0_-)=y^{(k)}(0_-)\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)。\qquad(6)$$

由推论 1，(6)式可用下面(7)式等值地替代

$$y_i^{(k)}(0_+)=y^{(k)}(0_-)\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)\qquad(7)$$

于是求解y_i，可直接引用 $t=0_-$ 之初条件。而零状态响应y_0是下列方程之解

$$\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\cdot y_0^{(k)}=\sum_{H=0}^{m}b_{m-H}\cdot w^{(H)}\qquad(8)$$

及

$$y_0^{(k)}(0_-)=0\ \ (k=0,1,2,\cdots,n-1)\qquad(9)$$

因为w为奇异函数，故由推论 3，对方程(8)及(9) 不存在 $y_0^{(k)}(0_+)=y^{(k)}(0_-)$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$。为了避免直接求$y_0^{(k)}(0_+)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$，令方程(8)之右边为$u(t)$，同时用 s_0 代替(8)式和(9)式中的 y_0 得到下列方程

$$\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\cdot s_0^{(k)}=u(t)\qquad(10)$$

及

$$s_0^{(k)}(0_-)=y_0^{(k)}(0_-)=0\ \ (k=0,1,\cdots,n-1)\qquad(11)$$

由初条件不变性或推论 2，(11)式可等值地由下列(12)式代替

$$s_0^{(k)}(0_+)=y_0^{(k)}(0_-)=0\ \ (k=0,1,\cdots,n-1)\qquad(12)$$

于是求解 s_0 可直接引用 $t=0_-$ 之初条件。当求出 s_0 之后，依据线性定常电路之性质立即有

$$y_0(t)=\sum_{J=0}^{q}\sum_{H=0}^{m}b_{m-H}s_0^{(H+I+J)} \tag{13}$$

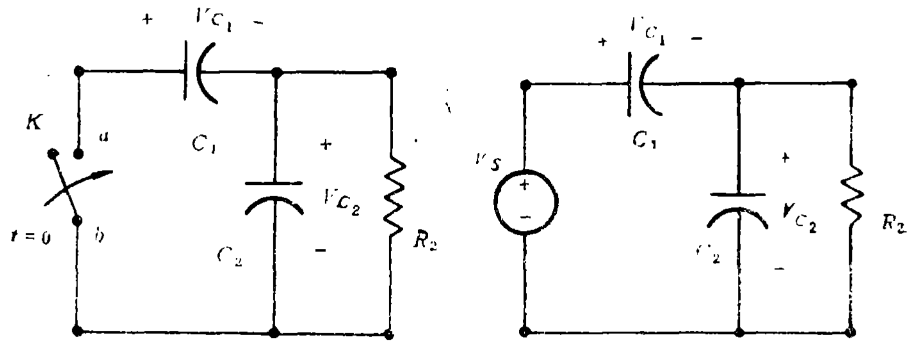
最后有全响应：

$$y(t)=y_i(t)+\sum_{J=0}^{q}\sum_{H=0}^{m}b_{m-H}s_0^{(H+I+J)} \tag{14}$$

其中 $y_i(t)$ 由方程(5)和(7)解出。

三

例 1 在图 1 (a)所示电路中，C_1、C_2和R_2均为线性定常元件，$t=0$时k闸瞬时闭合，求输出 $v_{c_1}(t)$，$t\geqslant 0$。电路的初始状态为 $v_{c_1}(0_-)=1$ 伏，$v_{c_2}(0_-)=0$。



(a) $v_{c_1}(0_-)=1$ 伏，$v_{c_2}(0_-)=0$　　(b) $v_s(t)=u(-t)$，$v_{c_1}(0_-)=1$ 伏，$v_{c_2}(0_-)=0$

图 1

我们可用图 1 (b)所示电路等值地来计算 $v_{c_1}(t)$，$t\geqslant 0$。由图 1 (b) 易得关于 v_{c_1} 的微分方程

$$\left(1+\frac{c_1}{c_2}\right)\frac{dv_{c_1}}{dt}+\frac{1}{C_2R_2}v_{c_1}=\frac{dv_s}{dt} \tag{15}$$

及

$$v_{c_1}(0_-)=1\text{ 伏} \tag{16}$$

$$v_s(t)=u(-t),\qquad \therefore\quad F(w)=-\delta(t) \tag{17}$$

依推论 3，这时状态要突变。下面我们利用初条件不变性求解$v_{c_1}(t)$。

$$v_{c_1}(t)=v_{c_1i}(t)+v_{c_1}(t) \tag{18}$$

其中 v_{c1i} 为下列方程之解

$$\left(1+\frac{c_1}{c_2}\right)\frac{dv_{c_1i}}{dt}+\frac{1}{C_2R_2}v_{c_1i}=0 \tag{19}$$

及

$$v_{c_1i}(0_-)=v_{c_1}(0_-)=1\text{ 伏} \tag{20}$$

由推论 1 知　　$v_{c_1i}(0_+)=v_{c_1i}(0_-)=v_{c_1}(0_-)=1$伏，

解得

$$v_{c1i}(t)=u(t)e^{-t/R_2(c_1+c_2)} \tag{21}$$

而 $v_{c10}(t)$ 为下列方程之解

$$\left(1+\frac{c_1}{c_2}\right)\frac{dv_{c10}}{dt}+\frac{1}{C_2R_2}v_{c10}=-\delta(t) \tag{22}$$

及

$$v_{c10}(0_-)=0 \tag{23}$$

由推论 3 知 $v_{c10}(0_+)\neq v_{c10}(0_-)$

先求下列方程之解

$$\left(1+\frac{c_1}{c_2}\right)\frac{ds_0}{dt}+\frac{1}{C_2R_2}s_0=u(t) \tag{24}$$

及

$$s_0(0_-)=v_{c10}(0_-)=0 \tag{25}$$

由初条件不变性，有 $s_0(0_+)=s_0(0_-)=v_{c10}(0_-)=0$,

求得 $s_0(t)=C_2R_2(1-e^{-t/R_2(c_1+c_2)})u(t)$

$$\therefore \quad v_{c10}(t)=-\frac{ds_0}{dt}=-\frac{c_2}{c_1+c_2}e^{-t/R_2(c_1+c_2)}u(t) \tag{26}$$

把(21)和(26)代入(18)得到最后结果

$$v_{c1}(t)=\frac{c_1}{c_1+c_2}e^{-t/R_2(c_1+c_2)}u(t) \tag{27}$$

由(27)式，令 $t=0^+$ 代入得

$$v_{c1}(0_+)=\frac{c_1}{c_1+c_2}\neq v_{c1}(0_-)$$

例 2 求下列微分方程之冲击响应

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=\frac{dw}{dt}+w \tag{28}$$

即 $w=\delta(t)$，$y(0_-)=\frac{dy}{dt}(0_-)=0$，求 $y_0(t)=h(t)$。

现在，先求

$$\frac{d^2s_0}{dt^2}+\frac{ds_0}{dt}+s_0=u(t) \tag{29}$$

及

$$s_0(0_-)=y(0_-)=0,\quad \frac{ds_0}{dt}(0_-)=\frac{dy}{dt}(0_-)=0 \tag{30}$$

由初条件不变性，有 $s_0(0_+)=y(0_-)=0$，$\frac{ds_0}{dt}(0_+)=\frac{dy}{dt}(0_-)=0$ 求得

$$s_0(t)=\left\{e^{-t/2}\left(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+1\right\}u(t) \tag{31}$$

最后得到（由(13)式）

$$h(t)=y_0(t)=\frac{d^2s_0(t)}{dt^2}+\frac{ds_0(t)}{dt}$$

$$=\left\{e^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\}u(t) \tag{32}$$

由(32)式，令 $t=0^+$ 代入得

$$y(0_+)=1\neq y(0_-).$$

Invariance of Initial Conditions for N-th Order Linear Differential Equations with Constant Coefficients

Wu Chengshi

Abstract

In this paper is discussed invariance of initial conditions for N-th order linear differential equations with constant coefficients, and a few instances are cited in illustration of its applications.