

扰动引力作用时自由飞行 弹道计算的新方法

任 萱

摘 要 地球外部引力势可用球谐函数模型表示,通常模型的参数为 r 、 θ 、 λ ,极点为北极。此模型直接用于自由飞行弹道计算,由于要进行递推计算,随着模型阶数的增加,计算速度将会下降。

本文用球谐函数变换方法[2]获得一新模型,模型的参数为 r (地心距), β (射程)和 ζ (侧向偏差),极点是重新选择的。作了某些近似后,使用新模型求解弹道,由于避免了递推计算,从而提高了计算速度。

实际计算表明,当模型阶数为30时,新模型的计算速度可提高6-7倍,精度为几米。

一、地球引力场与自由飞行弹道

远程弹道式自由飞行器飞行高度一般在180公里以上,飞行时间在半小时左右,因而可认为只受地球引力的作用。

地球引力势通常用球谐函数表示,其表达式为:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^s \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm} \cos m\lambda^* + \bar{s}_{nm} \sin m\lambda^*) \bar{p}_{nm}(\cos\theta) \right] \quad (1)$$

其中

- μ —— 引力常数与地球质量的乘积;
- a_e —— 地球椭球体长半轴;
- \bar{c}_{nm} 、 \bar{s}_{nm} 正常化的位系数;
- \bar{p}_{nm} —— 正常化的勒让德函数;
- θ —— 余纬;
- n 、 m —— 勒让德函数的阶和级;
- s —— 引力势模型的最高阶数;
- λ^* —— 地理经度。

若 λ 为地球不动外壳上的经度,则

$$\lambda^* = \lambda - \Omega t \quad (2)$$

其中

Ω ——地球自转角速度；

t ——以自由飞行开始点 K 作为时间零点，由此零点计算的飞行时间。

用(1)表示引力势时，模型截断到 s 阶。模型的阶数愈高则愈能反映引力势的细微变化，因而引力势模型的阶数有愈来愈高的趋势。本文模拟计算中采用的引力势模型为[3]中给出的 30 阶的 GEM-8 模型。

在惯性空间以球坐标系作为计算坐标系时，自由飞行的运动方程为：

$$\begin{cases} \dot{v}_r = r[\dot{\omega}_\theta^2 + (\omega_\lambda \sin\theta)^2] + g_r \\ \dot{\omega}_\theta = \frac{1}{2}\dot{\omega}_\lambda^2 \sin 2\theta - 2\frac{v_r}{r}\omega_\theta + \frac{1}{r}g_\theta \\ \dot{\omega}_\lambda = -2\omega_\lambda\left(\frac{v_r}{r} + \omega_\theta \operatorname{ctg}\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}g_\lambda \\ \dot{r} = v_r \\ \dot{\theta} = \omega_\theta \\ \dot{\lambda} = \omega_\lambda \end{cases} \quad (3)$$

其中 g_r 、 g_θ 、 g_λ 为引力加速度的天向、南向和东向分量。

考虑到勒让德函数的微分公式[4]：

$$\frac{d\bar{p}_{nm}}{d\theta} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{p}_{n1} & m=0 \\ -\sqrt{(n-m)(n+m+1)} \bar{p}_{n,m+1} + m \operatorname{ctg}\theta \bar{p}_{nm} & 0 < m \leq n \end{cases} \quad (4)$$

则有

$$\begin{aligned} g_r &= \frac{\partial U}{\partial r} \\ &= -\frac{\mu}{r^2} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^s (n+1) \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \left[\bar{c}_{n0} \bar{p}_{n0} + \sum_{m=1}^n (\bar{c}_{nm} \cos m(\lambda - \Omega t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{s}_{nm} \sin m(\lambda - \Omega t) \bar{p}_{nm} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} g_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ &= \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^s \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \left\{ -\bar{c}_{n0} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{p}_{n1} + \sum_{m=1}^n [\bar{c}_{nm} \cos m(\lambda - \Omega t) \right. \\ &\quad \left. + \bar{s}_{nm} \sin m(\lambda - \Omega t)] \cdot [m \operatorname{ctg}\theta \bar{p}_{nm} - \sqrt{(n-m)(n+m+1)} \bar{p}_{n,m+1}] \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$g_\lambda = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \lambda}$$

$$= \frac{\mu}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=1}^n m [-\bar{c}_{nm} \sin m(\lambda - \Omega t) + \bar{s}_{nm} \cos m(\lambda - \Omega t)] \bar{p}_{nm} \right\} \quad (7)$$

给定惯性空间的初始状态参数为：

$$t=0; \quad u_r = u_{rk}, \quad \omega_\theta = \omega_{\theta k}, \quad \omega_\lambda = \omega_{\lambda k}, \quad r = r_k, \quad \theta = \theta_k, \quad \lambda = \lambda_k$$

用数值方式积分(3)式，可求得自由飞行的状态参数。

在实际计算中， $\bar{p}_{nm}(\cos\theta)$ 的计算可用递推公式^[1,4]，也可用下列公式^[5]：

$$\bar{p}_{nm}(t) = \sqrt{\nu(2n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{2^n} (1-t^2)^{\frac{m}{2}}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-m-2k)!} t^{n-m-2k} \quad (8)$$

其中

$$\nu = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 2 & m \neq 0 \end{cases}$$

$$\gamma = \left[\frac{n-m}{2} \right]$$

不论用何种方法计算 $\bar{p}_{nm}(\cos\theta)$ ，随着阶数的增加，耗费的机时大为增加，在自由飞行弹道计算中，工作量最大的是 $\bar{p}_{nm}(\cos\theta)$ 的计算。

本文将用球谐函数变换的方法，建立对于新选取的极点的引力势模型，然后针对自由飞行的特点，再作适当简化。用这一新模型进行自由飞行弹道计算，将使计算速度大为提高，并且计算结果的误差也很小。

二、极点的选择和 $\theta_0, \lambda_0, \sigma_k$ 的确定

当地球引力势为 $U = \mu/r$ 时，自由飞行弹道为平面椭圆弹道，设弹道动量矩 \bar{h} 与地球不动外壳交点为 o 点（见图 1）。

若在不动外壳上，以 o 点作为极点，以通过 o 点和北极 N 的子午线（不包含 N 点的弧段）作为逆时针度量的 σ 角的初始子午线。椭圆弹道上任一点 P 在此坐标系内的坐标为 (r, η, σ) ， r 为地心距， η 为以 o 为极点时的“余纬”（对椭圆弹道， $\eta = 90^\circ$ ，即沿“赤道”飞行）， σ 为以 o 为极点时的“经度”，则射程角 β 为

$$\beta = \sigma - \sigma_k \quad (9)$$

其中 σ_k 为自由段起始点 K 的 σ 角。

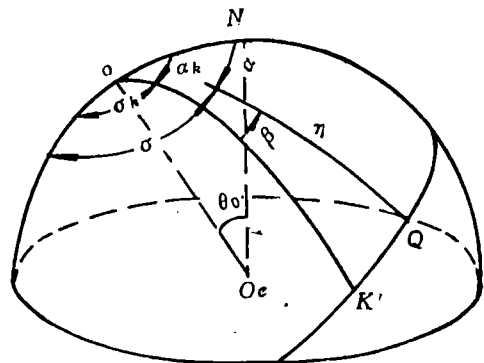


图 1 K', Q 分别为 K, P 在地球上的投影

当引力势取下列表达式:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 + \bar{c}_{20} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \bar{p}_{20} \right] \quad (10)$$

这一引力势称为正常势, 对应的自由飞行弹道称为标准弹道, 标准弹道将偏离椭圆弹道, 令

$$\xi = 90^\circ - \eta \quad (11)$$

ξ 为标准弹道对椭圆弹道的侧向角偏差, 这一偏差对于远程自由飞行器是不大的 (在 1° 之内)。

N 点为极点时, o 点的地心余纬 θ_o 、经度 λ_o 及 σ_k 可由自由飞行起始点的状态参数 $\theta_k, \lambda_k, \dot{\theta}_k, \dot{\lambda}_k$ 来确定, 其步骤如下:

K 点椭圆弹道的方位角 A_k 为

$$A_k = \frac{\pi}{2} + \arctg \left(\frac{\dot{\theta}_k}{\dot{\lambda}_k \sin \theta_k} \right)$$

由图 3, 按球面三角公式可得

$$\theta_o = \arctg \left(\frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_o} \right) \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} \cos \theta_o = \sin \theta_k \sin A_k \\ \sin \theta_o = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_o} \end{cases}$$

$$\lambda_o = \lambda_k - \arctg \left(\frac{\sin \Delta \lambda_o}{\cos \Delta \lambda_o} \right) \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} \sin \Delta \lambda_o = \cos A_k / \sin \theta_o \\ \cos \Delta \lambda_o = -\operatorname{ctg} \theta_o / \operatorname{ctg} \theta_k \end{cases}$$

$$\sigma_k = \pi - \arctg \left(\frac{\sin \alpha_k}{\cos \alpha_k} \right) \quad (14)$$

$$\begin{cases} \sin \alpha_k = \sin \theta_k \sin \Delta \lambda_o \\ \cos \alpha_k = \cos \theta_k / \sin \theta_o \end{cases}$$

三、引力势球谐函数表达式的变换

若在 $t=0$ 时刻开始, 令地球停止旋转, 即 $\Omega=0$, 则可得一假想的引力势表达式, 即 t 时刻自由飞行弹道上坐标为 (r, θ, λ) 的 P 点的假想引力势 $U_{\Omega=0}$ 为

$$U_{\Omega=0} = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm} \cos m\lambda + \bar{s}_{nm} \sin m\lambda) p_{nm}(\cos \theta) \right] \quad (15)$$

实际上地球以角速度 Ω 绕极轴旋转, 因而在旋转地球上与上述 P 点对应的点为 P' 点。 P' 点的坐标为 $(r, \theta, \lambda - \Omega t)$, 故在 (15) 中将 λ 取为 λ^* ($\lambda^* = \lambda - \Omega t$), 即可获得

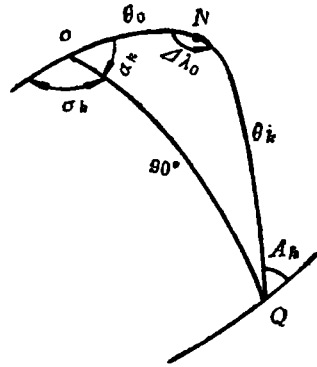


图 2 Q 为 P 在地球上的投影

实际的引力势 U 的表达式, 也就是(1)式。

将以北极 N 为极点, 以 r, θ, λ^* 为参数的实际引力势表达式 (1) 式变换为以 o 点为极点, 以 r, η, σ 为参数的实际引力势的新表达式, 考虑到(15)式与(1)式的差别, 变换可分两步进行。第一步将(15)式变换为以 o 为极点的表达式, 第二步将变换后的表达式考虑地球旋转角速度的修正。

第一步 首先将 $\lambda = \lambda_o + \Delta\lambda$ 代入(15)式, 并令

$$\begin{cases} \bar{c}_{nm}^{**} = \bar{c}_{nm} \cos m \lambda_o + \bar{s}_{nm} \sin m \lambda_o \\ \bar{s}_{nm}^{**} = \bar{s}_{nm} \cos m \lambda_o - \bar{c}_{nm} \sin m \lambda_o \end{cases} \quad (16)$$

则(15)式成为

$$U_{\Omega=0} = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm}^{**} \cos m \Delta\lambda + \bar{s}_{nm}^{**} \sin m \Delta\lambda) p_{nm}(\cos \theta) \right] \quad (17)$$

注意到

$$\alpha = 180^\circ - \sigma \quad (18)$$

则由[2]可知, (17)式变换为以 o 为极点以 r, η, σ 为参数的表达式如下:

$$U_{\Omega=0} = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{k=0}^n [\bar{A}_{nk}^{**} \cos k(180^\circ - \sigma) + \bar{B}_{nk}^{**} \sin k(180^\circ - \sigma)] p_{nk}(\cos \eta) \right\} \quad (19)$$

[2]中给出了变换前的未正常化的位系数 c_{nm}^{**}, s_{nm}^{**} 与变换后的未正常化的位系数 A_{nk}^{**}, B_{nk}^{**} 之间的关系式。本文经推导后, 给出了变换前后正常化位系数之间的关系如下:

$$\begin{cases} \bar{A}_{nk}^{**} = \sum_{h=0}^n \bar{c}_{nm}^{**} \bar{a}_{nm}^h \\ \bar{B}_{nk}^{**} = \sum_{h=0}^n \bar{s}_{nm}^{**} \bar{b}_{nm}^h \end{cases} \quad (20)$$

其中 $\bar{a}_{nm}^h, \bar{b}_{nm}^h$ 的递推公式为:

1. 递推初值

$$\begin{cases} \bar{a}_{nm}^0 = \bar{p}_{nm} / \sqrt{2n+1} \\ \bar{b}_{nm}^0 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

其中 $n=2-s, 0 \leq m \leq s$

$$\begin{cases} \bar{a}_{10}^1 = \sin \theta_o \\ \bar{a}_{11}^1 = -\cos \theta_o \\ \bar{b}_{10}^1 = 0 \\ \bar{b}_{11}^1 = 1 \end{cases} \quad (22)$$

2. $\bar{a}_{nn}^h, \bar{b}_{nn}^h$ 的递推公式

令

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{2\sqrt{2n(2n-1)}} \\ \alpha_1 = 2\sqrt{(n+k)(n-k)} \\ \alpha_2 = \xi\sqrt{(n+k)(n+k-1)} \\ \alpha_3 = \sqrt{(n-k)(n-k-1)} \end{cases} \quad (23)$$

其中

$$\xi = \begin{cases} \sqrt{2} & k=1 \\ 1 & k \geq 2 \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \bar{a}_{nn}^k = \alpha_0 [\alpha_1 \sin \theta_0 \bar{a}_{n-1, n-1}^k + \alpha_2 (\bar{b}_{n-1, n-1}^{k-1} - \cos \theta_0 \bar{a}_{n-1, n-1}^{k-1}) \\ \quad + \alpha_3 (\bar{b}_{n-1, n-1}^{k+1} + \cos \theta_0 \bar{a}_{n-1, n-1}^{k+1})] \\ \bar{b}_{nn}^k = \alpha_0 [\alpha_1 \sin \theta_0 \bar{b}_{n-1, n-1}^k + \alpha_2 (\bar{a}_{n-1, n-1}^{k-1} - \cos \theta_0 \bar{b}_{n-1, n-1}^{k-1}) \\ \quad + \alpha_3 (\bar{a}_{n-1, n-1}^{k+1} + \cos \theta_0 \bar{b}_{n-1, n-1}^{k+1})] \end{cases} \quad (24)$$

其中

$$n=2-s \quad k=1-n$$

3. $\bar{a}_{n+1, m}^k, \bar{b}_{n+1, m}^k$ 的递推公式

令

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{2\sqrt{(n+m+1)(n-m+1)}} \\ \beta_1 &= 2\sqrt{(n+k+1)(n+1-k)} \\ \beta_2 &= \alpha_2 \\ \beta_3 &= -\sqrt{(n-k)(n-k+1)} \end{aligned} \quad (25)$$

则

$$\begin{aligned} \bar{a}_{n+1, m}^k &= \beta_0 [\beta_1 \cos \theta_0 \bar{a}_{nm}^k + \beta_2 \sin \theta_0 \bar{a}_{nm}^{k-1} + \beta_3 \sin \theta_0 \bar{a}_{nm}^{k+1}] \\ \bar{b}_{n+1, m}^k &= \beta_0 [\beta_1 \cos \theta_0 \bar{b}_{nm}^k + \beta_2 \sin \theta_0 \bar{b}_{nm}^{k-1} + \beta_3 \sin \theta_0 \bar{b}_{nm}^{k-1}] \end{aligned}$$

其中

$$n=1-s, \quad k=1-n \quad (26)$$

利用上述递推公式可求得 $\bar{a}_{nm}^k, \bar{b}_{nm}^k$, 从而可由 $\bar{c}_{mn}^{**}, \bar{s}_{nm}^{**}$ 求得 $\bar{A}_{nk}^{**}, \bar{B}_{nk}^{**}$ 。

为了将(19)式以参数 r, η, β 表达, 令

$$\bar{A}_{nk}^{**} = \bar{A}_{nk}^* \quad (27)$$

$$\bar{B}_{nk}^{**} = \begin{cases} -\bar{B}_{nk}^* & k=\text{偶数} \\ \bar{B}_{nk}^* & k=\text{奇数} \end{cases} \quad (28)$$

注意到

$$\sigma = \sigma_k + \beta$$

并令

$$\begin{aligned} \bar{A}_{nk} &= \bar{A}_{nk}^* \cos k\sigma_k + \bar{B}_{nk}^* \sin k\sigma_k \\ \bar{B}_{nk} &= \bar{B}_{nk}^* \cos k\sigma_k - \bar{A}_{nk}^* \sin k\sigma_k \end{aligned} \quad (29)$$

则(19)式成为

$$U_{\Omega=0} = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^s \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{k=0}^n (\bar{A}_{nk} \cos k\beta + \bar{B}_{nk} \sin k\beta) \bar{v}_{nk}(\cos\eta) \right] \quad (30)$$

第二步 对(30)式进行地球旋转的修正。

由于自由飞行时轨道上的P点, 在 $\Omega=0$ 时, 其坐标为 (r, θ, λ) 或 (r, η, σ) , 而考虑地球旋转后, 其坐标分别为 $(r, \theta, \lambda - \Omega t)$ 或 $(r, \eta + \Delta\eta, \sigma + \Delta\sigma)$ (见图3)。

由于 Ωt 为小量, 可用线性化方法求 $\Delta\eta, \Delta\sigma$ 。

由球面三角公式可知:

$$\begin{cases} \cos\theta = \cos\theta_0 \cos\eta - \sin\theta_0 \sin\eta \cos\sigma \\ \sin\sigma = \sin\theta \sin\Delta\lambda / \sin\eta \end{cases} \quad (31)$$

故有

$$\begin{cases} \Delta\sigma = \frac{\cos\theta_0 + \text{ctg}\eta \sin\theta_0 \cos\sigma}{\sin\theta_0 \sin\sigma} \Delta\eta \\ \Delta\eta = \sin\sigma \sin\theta_0 \Omega t \end{cases} \quad (32)$$

考虑到 $\eta \cong 90^\circ, \sigma = \sigma_k + \beta$, 则

$$\begin{cases} \Delta\sigma = -\cos\theta_0 \Omega t \\ \Delta\eta = -\sin(\sigma_k + \beta) \sin\theta_0 \Omega t \end{cases} \quad (33)$$

由于

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= \Delta\sigma \\ \eta &= 90^\circ + \xi \end{aligned} \quad (34)$$

令

$$\begin{aligned} \beta_\Omega &= \beta + \Delta\beta \\ \xi_\Omega &= \xi + \Delta\xi \\ \eta_\Omega &= \eta + \Delta\eta \end{aligned}$$

将(33)代入上式, 则

$$\begin{cases} \beta_\Omega = \beta - \cos\theta_0 \Omega t \\ \eta_\Omega = 90^\circ + \xi + \Delta\eta = 90^\circ + \xi_\Omega = 90^\circ + \xi - \sin(\sigma_k + \beta) \sin\theta_0 \Omega t \end{cases} \quad (35)$$

$\beta_\Omega, \eta_\Omega$ 为引入了地球旋转后的 β, η 。将其代入(30)式, 即可得与(1)式相对应的新的地球引力势模型:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^s \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{k=0}^n (\bar{A}_{nk} \cos k\beta_\Omega + \bar{B}_{nk} \sin k\beta_\Omega) \bar{v}_{nk}(\cos\eta_\Omega) \right] \quad (36)$$

四、地球引力势和引力加速度的简化表达式

地球引力势(1)式可分为两部分, 即

$$U = \bar{U} + T \quad (37)$$

其中 \bar{U} 为正常引力势, 表达式为

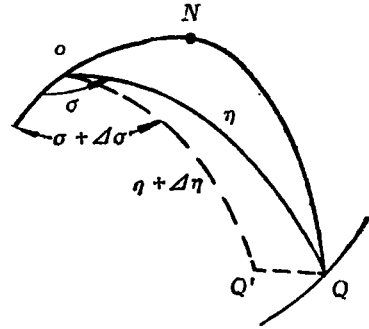


图3 Q, Q'分别为P和P'在地球上的投影

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 + \bar{c}_{20} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \bar{p}_{20}(\cos \theta) \right] \quad (38)$$

T 为扰动引力势, 表达式为

$$T = \frac{\mu}{r} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [\bar{c}_{nm} \cos m(\lambda - \Omega t) + \bar{s}_{nm} \sin m(\lambda - \Omega t)] \bar{p}_{nm}(\cos \theta) \right\}$$

其中

$$\bar{c}_{20} = 0 \quad (39)$$

先将 U 按上述变换方法变为以 o 为极点, 以 (r, β, η) 为参数的表达式, 由于 U 与地球旋转角速度无关, 故变换后的表达式为

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 + \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sum_{k=0}^2 (\bar{A}_{2k} \cos k\beta + \bar{B}_{2k} \sin k\beta) \bar{p}_{2k}(\cos \eta) \right] \quad (40)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A}_{20} &= \frac{1}{2} \bar{c}_{20} (3 \cos^2 \theta_0 - 1) \\ \bar{A}_{21} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{c}_{20} \sin 2\theta_0 \cos \sigma_k & \bar{B}_{21} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \bar{c}_{20} \sin 2\theta_0 \sin \sigma_k \\ \bar{A}_{22} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{c}_{20} \sin^2 \theta_0 \cos 2\sigma_k & \bar{B}_{22} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \bar{c}_{20} \sin^2 \theta_0 \sin 2\sigma_k \end{aligned} \quad (41)$$

扰动引力势变换后的表达式为

$$T = \frac{\mu}{r} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{k=0}^n (\bar{A}_{nk} \cos k\beta_{\Omega} + \bar{B}_{nk} \sin k\beta_{\Omega}) \bar{p}_{nk}[\cos(90^\circ + \zeta_{\Omega})] \right\} \quad (42)$$

其中 \bar{A}_{nk} , \bar{B}_{nk} 为在变换过程中取 $\bar{c}_{20} = 0$ 求得的位系数。

与正常引力势比较, 扰动势为小量。在扰动势中 ζ_{Ω} 为小角度, 当 $t=0$ 时, $\zeta_{\Omega}=0$, 以后随着飞行时间 t 增加而增大, 其最大值不超过 10° 。注意到这一点, 可将 $\bar{p}_{nk}[\cos(90^\circ + \zeta_{\Omega})]$ 在 $\zeta_{\Omega}=0$ 附近作台展开, 根据弹道计算的精度要求决定展开式应取的项数。实际计算表明, 展开式取到二阶项即适于弹道计算。

令

$$\begin{aligned} d_{nk} &= \bar{p}_{nk}(1) \\ c_{nk} &= \left. \frac{d\bar{p}_{nk}}{d\zeta_{\Omega}} \right|_{\zeta_{\Omega}=0} \\ &= \begin{cases} -\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{p}_{n1}(1) & k=0 \\ -\sqrt{(n-k)(n+k-1)} \bar{p}_{n,k+1}(1) & 1 \leq k \leq n \end{cases} \\ f_{nk} &= \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \bar{p}_{nk}}{d\zeta_{\Omega}^2} \right|_{\zeta_{\Omega}=0} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} (n-1)(n+2) \bar{p}_{n2}(1) & k=0 \\ \frac{1}{2} \sqrt{(n-k-1)(n-k)(n+k+1)(n+k+2)} \bar{p}_{n,k+2}(1) & 1 \leq k \leq n \end{cases} \end{aligned} \quad (43)$$

其中

$$\bar{p}_{nk}(1) = \begin{cases} 0 & n-k=\text{奇数} \\ (-1)^{\frac{n-k}{2}} \sqrt{\frac{\nu(2n+1)(n-k)!(n+k)!}{2^{2n-1}}} \frac{1}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{n+k}{2}\right)!} & n-k=\text{偶数} \end{cases}$$

$$\nu = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 2 & k \neq 0 \end{cases} \quad (44)$$

则

$$\bar{p}_{nk}[\cos(90^\circ + \xi_\Omega)] = d_{nk} + e_{nk}\xi_\Omega + f_{nk}\xi_\Omega^2 \quad (45)$$

上式可使勒让德函数的计算大为简化,但其精度将随飞行时间的增长而降低。不过,对于弹道计算而言,随飞行时间的增长,扰动引力势对飞行器的影响也减小,因而上式用于弹道计算仍有较高的精度。

将(45)代入(42),则 T 简化为

$$T = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{k=0}^n (\bar{A}_{nk} \cos k\beta_\Omega + \bar{B}_{nk} \sin k\beta_\Omega) (d_{nk} + e_{nk}\xi_\Omega + f_{nk}\xi_\Omega^2) \quad (46)$$

弹道计算中的引力分量也相应地分为正常引力分量和扰动引力分量,正常引力分量表达式为

$$\begin{cases} g_r = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \left\{ 1 + \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 \sum_{k=0}^2 (\bar{A}_{2k} \cos k\beta + \bar{B}_{2k} \sin k\beta) \bar{p}_{2k}[\cos(90^\circ + \xi)] \right\} \\ g_\xi = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 \sum_{k=0}^2 (\bar{A}_{2k} \cos k\beta + \bar{B}_{2k} \sin k\beta) \frac{d\bar{p}_{2k}}{d\xi} \\ g_\beta = \frac{-1}{r \cos \xi} \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 \sum_{k=1}^2 k (\bar{A}_{2k} \sin k\beta - \bar{B}_{2k} \cos k\beta) \bar{p}_{2k}[\cos(90^\circ + \xi)] \end{cases} \quad (47)$$

扰动引力表达式为

$$\begin{cases} \delta g_r = \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{k=0}^n (\bar{A}_{nk} \cos k\beta_\Omega + \bar{B}_{nk} \sin k\beta_\Omega) \\ \quad \times (d_{nk} + e_{nk}\xi_\Omega + f_{nk}\xi_\Omega^2) \\ \delta g_\xi = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{k=0}^n (\bar{A}_{nk} \cos k\beta_\Omega + \bar{B}_{nk} \sin k\beta_\Omega) (e_{nk} + 2f_{nk}\xi_\Omega) \\ \delta g_\beta = -\frac{1}{r \cos \xi} \frac{\partial T}{\partial \beta} = \frac{\mu}{r^2} \frac{1}{\cos \xi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{k=0}^n k (\bar{A}_{nk} \sin k\beta_\Omega - \bar{B}_{nk} \cos k\beta_\Omega) \\ \quad \times (d_{nk} + e_{nk}\xi_\Omega + f_{nk}\xi_\Omega^2) \end{cases} \quad (48)$$

引力加速度三分量为

$$\begin{cases} g_r = \bar{g}_r + \delta g_r \\ g_\xi = \bar{g}_\xi + \delta g_\xi \\ g_\beta = \bar{g}_\beta + \delta g_\beta \end{cases} \quad (49)$$

五、自由飞行弹道的实际计算及其结果

由于变换后的引力势表达式以 (r, ξ, β) 为参数, 因此, 以球坐标系 $o-r\eta\beta$ 作为计算坐标系较为方便, 此时, 自由飞行的运动方程为

$$\begin{cases} \dot{v}_r = r[\omega_\xi^2 + (\omega_\beta \cos \xi)^2] + g_r \\ \dot{\omega}_\xi = -\frac{1}{2}\omega_\beta^2 \sin 2\xi - 2\frac{v_r \omega_\xi}{r} + \frac{1}{r}g_\xi \\ \dot{\omega}_\beta = -2\omega_\beta \left(\frac{v_r}{r} - \omega_\xi \operatorname{tg} \xi\right) + \frac{1}{r \cos \xi}g_\beta \\ \dot{r} = v_r \\ \dot{\xi} = \omega_\xi \\ \dot{\beta} = \omega_\beta \end{cases} \quad (50)$$

其中 g_r 、 g_β 、 g_ξ 按(47)-(49)的公式计算。

对于给定 $t=0$ 时的初始条件

$$\begin{aligned} v_r &= v_{rk}, \quad \omega_\xi = \omega_{\xi k}, \quad \omega_\beta = \omega_{\beta k}, \\ r &= r_k, \quad \xi = 0, \quad \beta = 0 \end{aligned}$$

数值积分(50)式, 可得自由飞行弹道的状态参数。

作者按(3)式编制了数值积分程序, 同时也编制了球谐函数变换的程序以及(50)式的数值积分程序, 并用这两种方法进行了实际计算。将前者称为方法 I, 后者称方法 II, 两种方法用来计算射程角为 80° , 飞行时间为 1520 秒的典型的自由飞行弹道, 将计算结果进行比较, 可得出方法 II 对方法 I 的误差如下(表 1)。

表 1

t (飞行时间, 秒)	Δr (米)	$R\Delta\xi$ (米)	$R\Delta\beta$ (米)	Δg^* (毫伽)
0	0	0	0	0
400	0	0.003	0.0066	0.0075
800	0	0.3148	-0.033	0.6145
1200	-0.0010	1.3811	-0.2407	-1.2725
1520	-0.0004	1.6280	-0.3641	-3.766

* $g = \sqrt{g_r^2 + g_\beta^2 + g_\xi^2}$, Δg 为方法 II 对方法 I 的 g 的偏差。R 为地球平均半径, 6371.11 公里。

由结果看出, 方法 II 的精度很高, 位置误差为几米的量级, 但方法 II 避免了 p_{nm} 的递推计算, 计算速度提高了 6-7 倍。

为了检验球谐函数变换时, 地球旋转的影响, 在方法 I 的扰动引力计算中取 $\Omega \neq 0$, 即按 (5) 式-(7) 式的公式计算, 而在方法 II 中取 $\Omega = 0$, 即球谐函数变换时不加地球旋转的修正。两者比较可得误差于下表。

表 2

t 飞行时间, 秒	Δr 米	$R\Delta\zeta$ 米	$R\Delta\beta$ 米	Δg 毫伽
0	0	0	0	0
400	0.0007	-0.1317	-0.0311	0.175
800	0.0027	-1.4252	0.6247	0.773
1200	0.0041	-3.7600	1.2567	0.8858
1520	0.0041	-4.9163	1.3109	-1.4184

因此, 在球谐函数变换时, 即使不考虑地球旋转的修正, 造成的误差也是不大的。

六、结 论

用球谐函数变换方法将引力势模型(1)式进行变换, 并作适当简化后, 可得便于进行自由飞行弹道计算的引力势模型(46)式。新模型计算速度快, 并且精度很高, 可用于实际弹道计算。如果对弹道计算的精度要求稍稍降低, 则(46)式还可以进一步简化, 得出更简洁的表达式, 即(30)式给出的地球引力势模型。

参 考 文 献

- [1] 方俊, 重力测量与地球形状学(下册), 科学出版社, 1975
- [2] 许厚泽、蒋福珍, 关于重力异常球函数展式的变换, 测绘学报, 第7卷 1964年, 第4期
- [3] 陆镇麟, 人造地球卫星轨道计算方法,
- [4] 任萱, 地球外部空间扰动引力对弹道导弹运动的影响——对被动段运动的影响 国防科学技术大学学报, 1984年第3期
- [5] N. A海斯卡涅, H·莫里斯, (卢福康, 胡国理译), 物理大地测量学 测绘出版社. 1979

A New Method of Calculation for the Free Flight Trajectory when Vehicle is Effected by the Disturbing Cravity

Ren Xuan

Abstract

The external gravitational potential of the earth is shown by the spherical harmonics model. In general, the parameters of the model are r, θ, λ and the polar is the North Pole. When the model is applied directly to the calculation of the free flight trajectory, since the recurrent calculation can not be avoided, an increase in orders of model will result in a decrease in the speed of calculation. In this paper, the transitional method of the spherical harmonics^[2] is applied and a new model is gained. The parameters of the new model are r (geocentric radius), β (range), ζ (cross-deviation) and the polar is decided on after choice-making. With some approximations the new model is now being applied in the calculation of trajectory. With the recurrent calculation got rid of, the speed of calculation is increased. Practical calculations have shown that when the orders of the model are 30, the application of the new model enables us to enhance the speed of calculation 6 or 7 times and the error will be no more than several meters.