

## 改进的 Barrar 型中间轨道

—远程弹道飞行器自由飞行段的解析解

朱 龙 根

**摘 要** 本文提出了一种改进了的 Barrar 型中间轨道, 得到了远程弹道飞行器自由飞行段的解析解。利用不同的  $C$  值, 经过不同的组合, 可以求得 Kepler 椭圆轨道解, 以及考虑  $J_2$  或  $J_3$  项摄动的不同解。此方法宜于推广使用。几十条模拟弹道的计算结果表明: 此方法的计算量较小; 考虑  $J_2$  项摄动的方法误差 (射程和横程) 约为 10m, 考虑  $J_3$  项摄动时约为 10mm。

## 一、引 言

目前弹道飞行器的惯性制导主要有摄动制导、显式制导和中制导。显式制导的原理是利用在飞行器主动段飞行中惯性仪表所测得的加速度信息, 经导航计算机计算, 得到飞行器飞行中每一瞬间的速度和位置的显式信息, 然后将此信息输入到计算机中, 根据发射前存贮在计算机中的目标位置再来计算飞行器该瞬时命中目标所需要的速度向量。所需要的速度向量同实测速度向量的速度偏差被利用来产生控制推力方向的导引指令, 直至速度偏差为零, 这时发出关闭发动机的指令。显式制导不存在摄动制导中存在的方法误差, 发射前无须进行大量的计算准备, 而只须知道目标和发射点的位置坐标。中制导的原理是利用飞行器在自由段飞行时其弹载或地面测量装置测得的信息, 来计算出飞行器对目标的落点偏差, 并利用发动机进行落点偏差修正。上述两种方法都有一个如何由飞行器的瞬时速度和位置来计算飞行器落点的问题。

由于弹道飞行器在自由飞行段飞行高度较高, 飞行时间较短, 因而大气阻力可忽略不计。飞行器在地球引力作用下的运动情况是复杂的。如果取地球的较好近似——旋转对称体, 这时的地球引力势为:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin\varphi) \right] \quad (1)$$

其中:  $\mu$  —— 地球引力常数;  
 $r$  —— 飞行器的地心距;

$\varphi$ ——飞行器的地心纬度；

$P_n(\sin\varphi)$ —— $n$ 次勒让德多项式；

$J_n$ ——带谐系数；

$R$ ——地球赤道半径，取为 6378.16 公里。

为了研究方便，我们取一套无量纲单位：

距离单位为地球半径；

质量单位为地球质量（取为  $5.974266 \times 10^{24}$  克）；

时间单位为 806.8128 秒。

在这种情况下， $\mu=1$ ，地心距为  $O(1)$  量级，速度也为  $O(1)$  量级。

研究 (1) 式的近似方法之一是只取第一项，将自由段看成是椭圆轨道。但是，随着射程的增加，这种方法的误差越来越大，图 1 表示某弹道飞行器由于  $J_2$  项引入的射程偏差和横程偏差。

为了计入  $J_2$  项的摄动影响，John、Green、Stophon 等人进行了很多工作。本文利用中间轨道法来进行关于自由飞行段解析解的研究。所谓中间轨道就是一种比椭圆轨道更接近实际轨道的近似轨道，主要做法就是寻找一种可积的引力势来近似逼近地球引力势 (1) 式。五十年代以来，Sterne、Vinti、Barrar、Аксенов 等人都提出了不同的中间轨道。我们根据远程弹道飞行器自由段的特点和精度要求，采取 Barrar 型中间轨道，并且进行了下列改进：

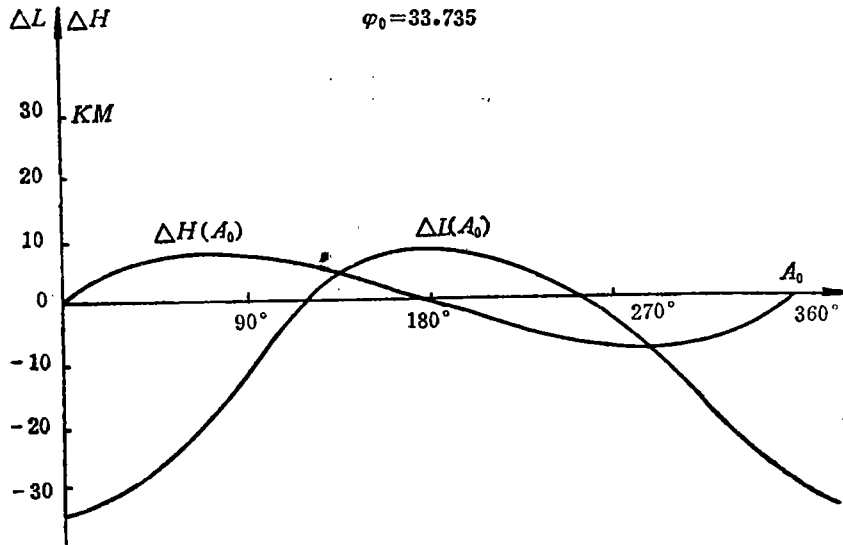


图 1 考虑  $J_2$  项时射程偏差  $\Delta L$  与发射方位角  $A_0$  之关系，横程偏差  $\Delta H$  与发射方位角  $A_0$  之关系

(1) 改变了  $u$  和中间轨道根数  $\Omega^*$ ， $\omega^*$  的定义，使当  $C=0$  时，中间轨道根数就完全转变成椭圆轨道根数。

(2) 利用不同的  $C$  值，经过不同的组合，可以得到椭圆轨道解和考虑  $J_2$  或  $J_3$  项摄动的不同解；

- (3) 当  $i$  接近  $90^\circ$  时的处理;
- (4)  $\sin i$  病态方程的解;
- (5) 椭圆积分的级数解;
- (6) 方案的推广运用。

该中间轨道我们称为改进的 Barrar 型中间轨道。这种方法的计算量小, 精度高, 并且一个方案具有多种用途。

## 二、改进的 Barrar 型中间轨道

### 1. 主要原理

改进的 Barrar 型中间轨道是将引力中心沿极轴移动距离  $C$ ,  $C$  的大小由问题的要求而确定。如图 2 所示, 其中  $O-xyz$  为地心坐标系,  $xy$  平面为赤道平面,  $Oz$  轴指向北极,  $Ox$  轴指向 1950.0 的春分点。在  $Oz$  上取一点  $O'$ , 使  $OO'=C$ , 过  $O'$  分别作  $Ox$  和  $Oy$  的

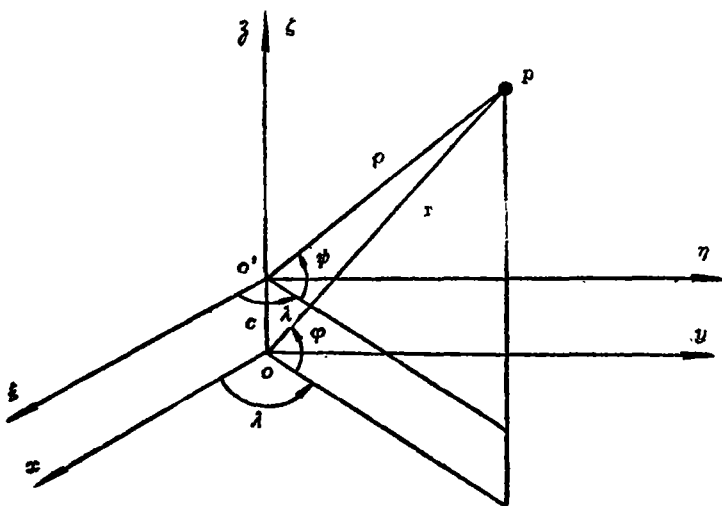


图 2

平行线  $O'\xi$  和  $O'\eta$ , 又取  $O'\zeta$  和  $Oz$  重合, 组成  $O'-\xi\eta\zeta$  坐标系, 这两个坐标系的球坐标  $r, \lambda, \varphi$  和  $\rho, \lambda', \psi$  的定义见图 2。这两个坐标系的关系:

$$\begin{aligned} x &= \xi & \sin \varphi &= \frac{z}{r} \\ y &= \eta & & \\ z &= \zeta + C & \sin \psi &= \frac{\zeta}{\rho} \end{aligned} \quad (2)$$

在  $O'-\xi\eta\zeta$  中取引力势

$$U^* = \mu \left( \frac{1}{\rho} - \frac{C \sin \psi}{\rho^2} \right) \quad (3)$$

将此式展开并变换到  $O-xyz$  中去, 则为

$$U^* = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)C^n}{r^n} P_n(\sin \psi) \right] \quad (4)$$

$P$ 点受引力势 $U^*$ 的作用在 $O'-\xi\eta\zeta$ 坐标系中的运动是完全可解的,就是说可以得到六个积分常数。如采用哈密尔顿—雅可比方法或解 Lagrange 方程方法,并且参考椭圆轨道的解法,便可得到与椭圆轨道根数相似的六个轨道根数: $a^*$ 、 $e^*$ 、 $i^*$ 、 $M^*$ 、 $\Omega^*$ 、 $\omega^*$ ,我们称它们为中间轨道根数。设 $P$ 点在 $t_0$ 时刻的运动状态为:

$$\bar{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$$

$$\dot{\bar{r}}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)^T$$

要求 $t$ 时刻的运动状态 $\bar{r}$ ,  $\dot{\bar{r}}$ 的运算过程如下:

(1) 由 $\dot{\bar{r}}_0$ ,  $\bar{r}_0$ 算出中间轨道根数;

(2) 由时刻 $t$ ,再通过中间轨道根数算出时刻 $t$ 的 $\bar{r}$ ,  $\dot{\bar{r}}$ (详细的推导从略)。下面列出主要的计算步骤。

2. 由 $\dot{\bar{r}}_0$ ,  $\bar{r}_0$ 计算中间轨道根数

(1) 计算辅助量

$$\bar{\rho} = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 - C \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\dot{\bar{\rho}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_0 \\ \dot{\eta}_0 \\ \dot{\zeta}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\rho_0^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2$$

$$V_0^2 = \dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \dot{\zeta}_0^2 \quad (7)$$

$$\bar{\rho}_0 \cdot \dot{\bar{\rho}}_0 = \xi_0 \dot{\xi}_0 + \eta_0 \dot{\eta}_0 + \zeta_0 \dot{\zeta}_0$$

$$U^* = \mu \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{C \xi_0}{\rho_0^3} \right) \quad (8)$$

$$C_1 = \xi_0 \dot{\eta}_0 - \eta_0 \dot{\xi}_0 \quad (9)$$

$$\sin \psi_0 = \frac{\zeta_0}{\rho_0} \quad (10)$$

$$\lambda_0 = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\eta_0}{\xi_0} \right) \quad (11)$$

(2) 计算中间轨道根数 $a_0^*$ ,  $e_0^*$ ,  $M_0^*$ ,  $f_0^*$

$$a_0^* = \frac{\mu}{2U_0^* - V_0^2} \quad (12)$$

$$n_0^* = \sqrt{\mu a_0^{*-3}} \quad (13)$$

$$\begin{cases} e_0^* \sin E_0^* = \frac{1}{\sqrt{\mu a_0^*}} (\bar{\rho}_0 \cdot \dot{\bar{\rho}}_0) \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} e_0^* \cos E_0^* = 1 - \frac{\rho_0}{a_0^*} \end{cases} \quad (15)$$

$$M_0^* = E_0^* - e_0^* \sin E_0^* \quad (16)$$

$$\operatorname{tg} \frac{f_0^*}{2} = \sqrt{\frac{1+e_0^*}{1-e_0^*}} \operatorname{tg} \frac{E_0^*}{2} \quad (17)$$

(3) 计算  $\sin i_0^*$ 

$$P_0^* = a_0^* (1 - e_0^{*2}) \quad (18)$$

$$e = \frac{2C}{P_0^*} \quad (19)$$

$$C_2 = \frac{C_1^2}{\mu P_0^*} \quad (20)$$

$$C_1^2 = \mu P_0^* \cos^2 i_0^* (1 - e \sin i_0^*) \quad (21)$$

## (4) 计算辅助参数

$$\sigma = \frac{1}{2} [1 + 2e \sin i_0^* + e^2 (4 - 3 \sin^2 i_0^*)]^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

$$s_1 = \frac{1}{2e} [1 - e \sin i_0^* - 4\sigma^2] \quad (23)$$

$$s_2 = \sin i_0^* \quad (24)$$

$$s_3 = \frac{1}{2e} [1 - e \sin i_0^* + 4\sigma^2] \quad (25)$$

$$\gamma = \frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1} \quad (26)$$

$$g_1 = \frac{s_1 - s_2}{1 - s_1} \quad (27)$$

$$g_2 = \frac{s_2 - s_1}{1 + s_1} \quad (28)$$

$$\sin 2u_0 = - \frac{s_1 + s_2 - 2 \sin \psi_0}{s_2 - s_1} \quad (29)$$

$$\cos 2u_0 = \frac{(\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2) \dot{\xi}_0 - (\dot{\xi}_0 \dot{\xi}_0 + \dot{\eta}_0 \dot{\eta}_0) \dot{\xi}_0}{\sqrt{\mu P_0^*} \sigma \rho_0 (s_2 - s_1) \sqrt{\frac{s_3 - \sin \psi_0}{s_3 - s_1}}} \quad (30)$$

$$u_0' = 2u_0 - \frac{\pi}{2} \quad (31)$$

(5) 计算  $\omega_0^*$  和  $\Omega_0^*$ 

$$\omega_0^* = \frac{1}{\sigma} F(u_0, \sqrt{\gamma}) - f_0^* - \frac{\pi}{2} \quad (32)$$

$$\Omega_0^* = \lambda_0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{C_2}}{2\sigma} \left\{ \frac{\pi(u_0, g_1, \sqrt{\gamma})}{(1-s_1)\sqrt{1+g_1}} + \frac{\pi(u_0, g_2, \sqrt{\gamma})}{(1+s_1)\sqrt{1+g_2}} \right\} \quad (33)$$

其中  $F(u_0, \sqrt{\gamma})$  为第一类椭圆积分,

$$F(u_0, \sqrt{\gamma}) = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{1-\gamma \sin^2 u}} \quad (34)$$

$\pi(u_0, g_i, \sqrt{\gamma})$  类似于第三类椭圆积分,

$$\pi(u_0, g_i, \sqrt{\gamma}) = \int_0^{u_0} \frac{\sqrt{1+g_i} du}{(1+g_i \sin^2 u)\sqrt{1-\gamma \sin^2 u}} \quad i=1, 2 \quad (35)$$

到此, 得到了中间轨道根数  $a_0^*$ ,  $e_0^*$ ,  $\omega_0^*$ ,  $\Omega_0^*$ ,  $\sin i_0^*$ ,  $M_0^*$ 。这些计算对一条弹道而言只需要计算一次, 如果能将  $\tilde{r}_0$ ,  $\dot{\tilde{r}}_0$  的参数由弹上传送到地面, 或由地面直接获得, 那么上述计算可以由地面计算机完成。

### 3. 计算时刻 $t$ 的 $\tilde{r}$ 和 $\dot{\tilde{r}}$

(1) 计算时刻  $t$  的  $M^*$ ,  $E^*$ ,  $f^*$

$$M^* = M_0^* + n_0^*(t - t_0) = 2Q\pi + m^* \quad (36)$$

其中  $Q$  为整数,  $m^* < 2\pi$ 。

$$m^* = E^* - e_0^* \sin E^* \quad (37)$$

$$\operatorname{tg} \frac{f^*}{2} = \sqrt{\frac{1+e_0^*}{1-e_0^*}} \operatorname{tg} \frac{E^*}{2} \quad (38)$$

(2) 计算  $u$

由(32)式得

$$\sigma \left( f^* + \omega_0^* + 2Q\pi + \frac{\pi}{2} \right) - F(u, \sqrt{\gamma}) = 0 \quad (39)$$

(3) 计算球坐标  $\rho$ ,  $\psi$ ,  $\lambda$

$$\rho = a_0^*(1 - e_0^* \cos E^*)$$

$$\sin \psi = s_1 + (s_2 - s_1) \sin^2 u$$

$$\lambda = \Omega_0^* - \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{C_2}}{2\sigma} \left\{ \frac{\pi(u, g_1, \sqrt{\gamma})}{(1-s_1)\sqrt{1+g_1}} + \frac{\pi(u, g_2, \sqrt{\gamma})}{(1+s_1)\sqrt{1+g_2}} \right\} \quad (40)$$

(4) 计算直角坐标

$$H = \sqrt{\mu p^*} (s_2 - s_1) \sigma \sin 2u \sqrt{1 - r \sin^2 u}$$

$$G = \sqrt{\mu p^*} e_0^* \sin E^* \cos^2 \psi - H \sin \psi$$

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos \psi \cos \lambda \\ \eta = \rho \cos \psi \sin \lambda \\ \zeta = \rho \sin \psi \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \frac{G\xi - \eta C_1}{\xi^2 + \eta^2} \\ \dot{\eta} = \frac{G\eta + \xi C_1}{\xi^2 + \eta^2} \\ \dot{\zeta} = \frac{1}{\rho} [\sqrt{\mu a_0^*} e_0^* \sin E^* \sin \psi + H] \end{cases} \quad (43)$$

由此可得  $\dot{r}, \dot{\bar{r}}$ 。

### 三、 $\sin i_0^*$ 的解法

(21)式等价于

$$e \sin^3 i_0^* - \sin^2 i_0^* - e \sin i_0^* + 1 - C_2 = 0 \quad (44)$$

虽然这是关于  $\sin i_0^*$  的一元三次代数方程，有公式解，但是由于各项系数相差悬殊，经计算表明这是个病态代数方程，用公式解误差很大。

由代数方程理论可知，在我们讨论的范围内， $e \ll 1$ ，(44)方程的判别式为

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (45)$$

$$\text{式中 } q = \frac{2 - 3C_2}{3e} - \frac{2}{27e^3}, \quad p = \frac{1}{3e^2} - 1$$

由于  $e \ll 1$ ， $C_2 \cong \cos i_0^*$ ，因此(44)式有三个不等的实根。根的范围为

$$|\sin i_0^*| \leq 1 + \max\{1, |e|, |1 - C_2|\} / |e|$$

或

$$|\sin i_0^*| \leq |1 + \frac{1}{e}|$$

将(44)式的左端记为  $f(\sin i_0^*)$ 。

$$\text{从 } f(1) = f(-1) < 0 \quad f(0) > 0$$

可以看出，三个根分别在下列区间内：

$$\text{当 } e > 0 \text{ 时， } (-1, 0), (0, 1), \left(1, 1 + \frac{1}{e}\right);$$

$$\text{当 } e < 0 \text{ 时， } \left(-1 - \frac{1}{e}, -1\right), (-1, 0), (0, +1)。$$

为了与椭圆轨道根数的定义相吻合，我们取位于  $(0, +1)$  的根，有了这个范围再用牛顿迭代法计算

$$\begin{aligned} \sin i_0^{*(n+1)} &= \sin i_0^{*(n)} \\ &- \frac{(1 - \sin^2 i_0^{*(n)})(1 - e \sin i_0^{*(n)}) - C_2}{3e \sin^2 i_0^{*(n)} - 2 \sin i_0^{*(n)} - e} \end{aligned} \quad (46)$$

其中，迭代初值为

$$\sin i_0^{*(0)} = \sqrt{1 - C_2} \quad (47)$$

几十条弹道的计算表明上式的收敛速度较快。部分远程弹道飞行器的计算情况如表 1 所示。这些弹道的自由段飞行时间约为 35 分钟, 射程角约为  $108^\circ$ 。表中的  $\varphi_0$  和  $A_0$  为弹道自由段起点的纬度和方位角。

表 1 不同弹道的  $\sin i_0^*$  的迭代次数

$\varphi_0 \backslash A_0$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$225^\circ$	$270^\circ$	$315^\circ$
$0^\circ$	1	4	6	4	1	4	6	4
$30^\circ$	1	4	4	4	1	4	4	4
$60^\circ$	1	8	4	8	1	8	4	8

#### 四、椭圆积分和 $u$ 的计算

在我们研究的情况中  $\gamma$  是个小量, 可以将第一类椭圆积分(34)式和第三类椭圆积分用级数展开方法计算, 即

$$\begin{aligned}
 F(u, \sqrt{\gamma}) &= \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\gamma \sin^2 u}} \\
 &= u \sum_{k=0}^n a_k^2 \gamma^k \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sin 2u \sum_{k=1}^n p_{u,k} a_k \gamma^k
 \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi(u, g, \sqrt{\gamma}) &= \int_0^u \frac{\sqrt{1+g} du}{(1+g \sin^2 u) \sqrt{1-\gamma \sin^2 u}} \\
 &= \begin{cases} (1-A_0) \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{1+g} \operatorname{tg} u) + \sqrt{1+g} \left\{ u \sum_{k=0}^n a_k A_k \gamma^k \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{4} \sin 2u \sum_{k=1}^n P_{u,k} A_k \gamma^k \right\}, & \left| \frac{r}{g} \right| < 1 \\ \sqrt{1+g} \left\{ u \sum_{k=0}^n a_k B_k - \frac{1}{4} \sin 2u \sum_{k=1}^n P_{u,k} B_k \right\}, & \left| \frac{r}{g} \right| > 1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{49}$$

其中

$$a_0 = 1, \quad a_k = \frac{2k-1}{2k} a_{k-1} \quad k=1, 2, \dots, n$$

$$P_{u,1} = 1, \quad P_{u,k} = \frac{2k-1}{2k} P_{u,k-1}$$

$$+ \frac{1}{k} \sin^{2k-2} u, \quad k=2, \dots, n$$

$$A_n = -a_{n+1} \beta, \quad A_{k-1} = \beta(A_k - a_k)$$

$$k=n, n-1, \dots, 1$$

(50)



式中  $\beta = -\frac{\gamma}{g}$

$$B_0=1, B_k=a_k\gamma^k - B_{k-1}g \quad k=1, \dots, n$$

$\operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{1+g\operatorname{tg}u})$  的取值与  $u$  同象限。具体计算时展开所取的项数要由  $|\gamma^n| < \varepsilon_p$  而定,  $\varepsilon_p$  为给定的数值计算精度。因为

$$\gamma = \frac{s_2 - s_1}{s_2 - s_1} = O(\varepsilon) = O\left(\frac{2C}{P_0^*}\right),$$

$n$  取的值并不大, 例如  $C_2 = \sqrt{J_2}$  时, 精确到  $10^{-10}$ , 各类弹道的  $n$  的取值见表 2。

表 2 不同弹道的级数项数

$\varphi_0 \backslash A_0$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$225^\circ$	$270^\circ$	$315^\circ$
$0^\circ$	12	10	4	10	11	10	4	10
$30^\circ$	12	11	9	11	11	11	8	10
$60^\circ$	11	11	10	11	11	11	10	11

由(39)式计算  $u$  是个解特殊超越方程的问题,  $u$  包含在第一类椭圆积分  $F(u, \sqrt{\gamma})$  中。由于

$$F(u, \sqrt{\gamma}) \approx u$$

因此取  $u^{(0)} = \sigma\left(f^* + \omega_0^* + 2Q\pi + \frac{\pi}{2}\right)$  (51)

用牛顿迭代法求  $u$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \left[ \sigma\left(f^* + \omega^* + 2Q\pi + \frac{\pi}{2}\right) - F(u^{(n)}, \sqrt{\gamma}) \right] \sqrt{1 - \gamma \sin^2 u} \quad (52)$$

收敛速度很快,  $F(u, \sqrt{\gamma})$  的迭代计算量不大。表 3 给出了各类弹道的迭代次数, 迭代误差控制为  $10^{-10}$ 。

表 3 不同弹道的  $u$  的迭代次数

$\varphi_0 \backslash A_0$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$225^\circ$	$270^\circ$	$315^\circ$
$0^\circ$	8	2	2	2	2	2	2	8
$30^\circ$	8	4	8	8	2	8	2	8
$60^\circ$	8	8	2	2	2	2	2	8

## 五、 $i_0^*$ 接近 $\pi/2$ 时的处理

当某条弹道在时刻  $t_0$  的  $i_0^*$  趋于  $\frac{\pi}{2}$  时, 由于

$$\begin{aligned}x &= \xi, & \dot{x} &= \dot{\xi} \\y &= \eta, & \dot{y} &= \dot{\eta}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}C_1 &= x\dot{y} - y\dot{x} \approx \sqrt{\mu P_0^*} \cos i_0^* \rightarrow 0, \quad C_2 \rightarrow 0 \\s_1 &\approx -\sin i_0^* \rightarrow -1, \quad s_2 = \sin i_0^* \rightarrow 1\end{aligned}$$

在(33)式中出现  $\frac{0}{0}$  型, 因而无法计算下去。

我们认为当  $\left| i_0^* - \frac{\pi}{2} \right| < 0.5^\circ$  时, 要用其他方法计算(33)式。由于此时  $\cos i_0^* \ll 1$ , 可以在  $\cos i_0^* = 0$  的近旁展开, 从而得不定式

$$\frac{C_1}{(1+s_1)\sqrt{1+g_2}} = \sqrt{\mu P_0^* (1 - e \sin i_0^*)} \sqrt{\frac{1-s_2}{1+s_1}} \quad (53)$$

$$\frac{1-s_2}{1+s_1} = \frac{2[3 - (1 - \sin i_0^*)](1+e)}{6(1-e) + (1+e)(1-14e)(1 - \sin i_0^*)} \quad (54)$$

而

$$\frac{C_1}{(1-s_1)\sqrt{1+g_1}} = \sqrt{\mu P_0^* (1 - e \sin i_0^*)} \sqrt{\frac{1+s_2}{1-s_1}} \quad (55)$$

代入(33)式, 得

$$\begin{aligned}\Omega_0^* &= \lambda_0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{1 - e \sin i_0^*}}{2\sigma} \left[ \sqrt{\frac{1+s_2}{1-s_1}} \Pi(u, g_1, \sqrt{\gamma}) \right. \\&\quad + \sqrt{\frac{2[3 - (1 - \sin i_0^*)](1+e)}{6(1-e) + (1+e)(1-14e)(1 - \sin i_0^*)}} \\&\quad \left. \cdot \Pi(u, g_2, \sqrt{\gamma}) \right] \quad (33)'\end{aligned}$$

用此式代替(33)式的计算。(40)式也应作相应的修改。

## 六、常数 C 的选择

(3)式中的 C 的大小确定了引力势的大小, 对中间轨道解有直接的影响。从下面的讨论可以看出, 常数 C 的不同值可解决不同的问题。

### 1. C=0 的情况

如果令  $C=0$ , (3)式转变成二体问题引力势, 从下面讨论可以看出, 此时改进的 Barrar 中间轨道根数也转变成二体问题的椭圆轨道根数。

显然  $a_0^*, e_0^*, E_0^*, f_0^*, M_0^*$  等中间轨道根数就是椭圆轨道根数  $a_0, e_0, E_0, f_0, M_0$ 。

由于  $e = \frac{2C}{P_0^*} = 0$ , 因此可得

$$\begin{aligned}C_1^2 &= \mu P_0^* \cos^2 i_0^* \\C_2 &= \cos^2 i_0^*\end{aligned}$$

$$s_1 = -\sin i_0^*$$

$$s_2 = \infty$$

$$\sigma = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = 0$$

$$g_1 = -2 \frac{\sin i_0^*}{1 + \sin i_0^*}$$

$$g_2 = \frac{2 \sin i_0^*}{1 - \sin i_0^*}$$

利用这些关系式, (29)式, (32)式和(35)式则分别成为

$$\sin \psi_0 = -\sin i_0^* \cos 2u = \sin i_0^* \sin u' \quad (56)$$

$$\omega_0^* = \frac{1}{2} \int_0^u du - f_0^* - \frac{\pi}{2} = u' - f_0 \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \Omega_0^* &= \lambda_0 + \frac{\pi}{2} - \left[ \frac{1}{1-s_1} \frac{\Pi(u, g_1, \sqrt{\gamma})}{\sqrt{1+g_1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1+s_1} \frac{\Pi(u, g_2, \sqrt{\gamma})}{\sqrt{1+g_2}} \right] \cos i_0^* \\ &= \lambda_0 + \frac{\pi}{2} - \cos i_0^* \left[ \frac{\operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{1+g_1} \operatorname{tg} u)}{(1-s_1)\sqrt{1+g_1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{1+g_2} \operatorname{tg} u)}{(1+s_1)\sqrt{1+g_2}} \right] \Big|_0^u \\ &= \lambda_0 - \lambda' \end{aligned} \quad (58)$$

式中

$$\operatorname{tg} \lambda' = \operatorname{tg} u' \cos i_0^*$$

由椭圆轨道根数可知,  $\sin i_0^*$ ,  $\omega_0^*$ ,  $\Omega_0^*$ 就是椭圆轨道根数 $\sin i_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\Omega_0$ 。

## 2. $C = \sqrt{J_2}$ 的情况

将 $q_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, 6$ )分别记为中间轨道解 $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , 由于 $q_i$ 是引力势(4)式 $U^*$ 的解,  $U^*$ 又是常数 $C$ 的函数, 因而在形式上可将 $q_i$ 写成

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(C) \\ &= p_{i0} + a_2 \cdot C^2 + 2a_3 C^3 + 3a_4 C^4 + \dots \end{aligned} \quad (59)$$

其中 $q_{i0}$ 为 $C=0$ 的解, 即第六章一小节中讨论的椭圆轨道解,

$$q_{i0} = q_i(0) \quad (60)$$

令  $C = \sqrt{J_2}$ , 则

$$q_i = q_{i0} + a_2 J_2 + 2a_3 J_2^{\frac{3}{2}} + \dots \quad (61)$$

由(61)式表示的方案称为非对称中心法, 此时考虑了 $J_2$ 摄动的影响, 但是引入的方法误差为 $O(2a_3 J_2^{\frac{3}{2}})$ , 约为200m或3m/s的量级。

3.  $C = \frac{\sqrt{J_2}}{C_L}$  和  $C = -\frac{\sqrt{J_2}}{C_L}$  的组合情况

分别令  $C = \frac{\sqrt{J_2}}{C_L}$  和  $C = -\frac{\sqrt{J_2}}{C_L}$ , 得

$$q_i = q_{i0} + \frac{J_2 a_2}{C_L^2} + \frac{2J_2^{\frac{3}{2}}}{C_L^3} a_3 + \frac{3J_2^2}{C_L^4} a_4 + \dots$$

$$q_i' = q_{i0} + \frac{J_2 a_3}{C_L^2} - \frac{2J_2^{\frac{3}{2}}}{C_L^3} a_3 + \frac{3J_2^2}{C_L^4} a_4 + \dots$$

则

$$\begin{aligned} \bar{q}_i &= \frac{(q_i + q_i') C_L^2}{2} + (1 - C_L^2) q_{i0} \\ &= q_{i0} + J_2 a_2 + a_4 \frac{3J_2^2}{C_L^2} + \dots \end{aligned} \quad (62)$$

显然, 此式对  $J_2$  项摄动来说, 引入的方法误差为  $O\left(a_4 \frac{3J_2^2}{C_L^2}\right)$ , 约为 10m 或 0.01m/s 的量级。(62) 式在物理上相当于两次按比例移动引力中心后取其平均值, 因而此方案称为比例对称中心和方法。当然  $C_L$  不能很大, 否则,  $a_2$  等系数不反映  $J_2$  摄动的影响。

例如, 分别分  $C_L = 1, 2$ , (62) 式成为

$$\bar{q}_i = \frac{(q_i + q_i')}{2} = q_{i0} + J_2 a_2^{(1)} + 3J_2^2 a_4^{(1)} + \dots \quad (63)$$

和

$$\bar{q}_i = 2(q_i + q_i') - 3q_{i0} = q_{i0} + J_2 a_2^{(2)} + \frac{3J_2^2}{4} a_4^{(2)} + \dots \quad (64)$$

4.  $C = \frac{\sqrt[3]{J_3}}{2}$  和  $C = -\frac{\sqrt[3]{J_3}}{2}$  的组合情况

分别令  $C = \frac{\sqrt[3]{J_3}}{2}$  和  $C = -\frac{\sqrt[3]{J_3}}{2}$ , 得

$$q_i = q_{i0} + \sqrt[3]{\frac{J_3^2}{4}} b_2 + J_3 b_3 + 3\sqrt[3]{\frac{J_3^4}{16}} b_4 + 4\sqrt[3]{\frac{J_3^5}{32}} b_5 + \dots$$

$$q_i' = q_{i0} + \sqrt[3]{\frac{J_3^2}{4}} b_2 - J_3 b_3 + 3\sqrt[3]{\frac{J_3^4}{16}} b_4 - 4\sqrt[3]{\frac{J_3^5}{32}} b_5 + \dots$$

则

$$\bar{q}_i = \frac{(q_i - q_i')}{2} = q_{i0} + J_3 b_3 + 4\sqrt[3]{\frac{J_3^5}{32}} b_5 + \dots \quad (65)$$

此式为引力项  $J_3$  的摄动, 引入的方法误差为  $O(10^{-10})$ , 约为 10mm 或 0.0008mm/s

量级。这种精度非常高。我们称这种方法为对称中心差方法。

## 七、等高偏差的求法

以上推导出来的方法可以直接用于求等时偏差，即求经过某一飞行时间，由于  $J_2$  或  $J_3$  摄动而引起的相对于椭圆轨道的偏差。由于改进的 Barrar 型中间轨道数与相应的椭圆轨道根数非常接近，关于椭圆轨道修正的一些理论可以直接得到运用。例如，在此基础上可以推出考虑  $J_2$  项摄动的朗贝尔方法，解决空间交会和对接等问题。下面以等高偏差的求法为例，说明本文提出的方法的推广运用。

等高偏差与等时偏差相似，不同的仅是它是求导弹飞行到某一高度时的偏差。利用等时偏差和椭圆轨道修正，可以得到下列的计算过程。

(1) 由要求的地心高度  $R_C$ ，不考虑摄动时，可以计算出椭圆轨道的飞行时间  $t^{(0)}$ 。

(2) 由  $t^{(0)}$ ，利用本文介绍的方法，可得中间轨道根数  $a_0^*$ ， $e_0^*$ ， $\dots$ ， $M_0^*$ ，和  $t^{(0)}$  时刻的地心距  $r_c$ ， $f^*$ 。

(3) 由  $\delta R = r_c - R_C$ ，可得

$$\Delta M = \frac{\sqrt{1 - e_0^{*2}} \delta R}{e_0^* a_0^* \sin f^*} \quad (66)$$

$$\Delta_h t = a_0^{* \frac{3}{2}} \Delta M \quad (67)$$

进一步精确的飞行时间为

$$t = t^{(0)} - \Delta_h t \quad (68)$$

用  $t$  代替  $t^{(0)}$ ，重复上述(2)~(3)步骤，直至  $\delta R$  满足精度要求。这样  $t$  时刻的等时偏差就是高度为  $R_C$  时的等高偏差。

## 八、计算实例

为了验证本文导出的改进的 Barrar 型中间轨道方法的精度，我们计算了几十条典型的远程弹道飞行器的轨迹，其被动段射程约为  $108^\circ$ ，飞行时间约为 35 分钟。

计算中的精确解是用 Cowell 数值积分方法求得的，取开头积分步长  $H_{RK}$  为整个积分区间的  $1/500$ ，主程序的积分步长  $H_C$  为  $H_{RK}$  的五倍，数值积分误差位置为  $10^{-4}m$ ，速度为  $10^{-4}mm/s$ ，满足验证的精度要求。下述的方法误差是指数值解和中间轨道解之差。

表(4)为非对称中心法的计算结果，方法误差是相对于  $J_2$  摄动的，即解析解是按(61)式解的。表中  $\Delta L$  为射程偏差， $\Delta H$  为横程偏差。由表(4)可见用此法计算误差较大。

表5为(62)式的结果， $C_L$  分别取为 1, 2, 3 三种情况计算。方法误差是指考虑  $J_2$  项摄动的误差，即精确数值解是按

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \frac{J_2}{r^2} P_2(\sin \varphi) \right]$$

数值积分的。从表中可以看出比例系数  $C_L$  是有作用的， $C_L=2$  的方法误差一般的比  $C_L=1$  的小，尤其当  $C_L=1$  时的方法误差较大时， $C_L=2$  的效果更为明显。例如当  $C_L=1$ ，

表 4 非对称中心的方法误差 ( $\varphi=30^\circ$ )

方位角 $A_0$	方 法 误 差 (单位: 公里, 米/秒)							
	$\Delta \dot{x}$	$\Delta \dot{y}$	$\Delta \dot{z}$	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta z$	$\Delta L$	$\Delta H$
0	-0.02	0.14	0.36	0.03	-0.20	0.28	0.08	0.00
90°	-2.52	-0.40	-0.51	-1.80	0.76	0.34	1.50	-0.23
135°	-1.21	0.21	-0.72	-0.78	0.84	-0.48	0.89	-0.20
180°	-0.20	1.19	-1.52	-0.17	1.02	-0.63	0.58	0.83
225°	1.09	0.59	-0.72	0.45	1.04	-0.49	0.89	0.21
270°	2.52	0.43	-0.51	1.48	1.30	0.34	1.54	0.23
315°	1.58	-0.63	1.84	0.45	0.03	1.67	1.17	-0.73

表 5 对称中心和的方法误差 ( $C_L=1, 2, 3$ )

方位角 $A_0$	比例 $C_L$	方 法 误 差 (单位: 米)					
		$\varphi_0=0^\circ$		$\varphi_0=30^\circ$		$\varphi_0=60^\circ$	
		$\Delta L$	$\Delta H$	$\Delta L$	$\Delta H$	$\Delta L$	$\Delta H$
0°	1	-39.6	-0.1	14.8	-0.1	-71.2	-0.2
	2	2.1	-0.3	14.9	-0.7	-0.6	-1.0
	8	9.9	-0.8	14.9	-1.8	12.5	-2.6
45°	1	-25.8	-13.8	71.3	12.2	-25.0	33.6
	2	-11.3	-18.8	10.5	-1.9	2.0	2.9
	8	-8.6	-19.7	-0.8	-4.5	7.1	-2.8
90°	1	78.7	0.0	34.4	-29.4	17.7	15.0
	2	30.7	0.0	3.5	5.3	4.0	-0.9
	8	21.7	0.0	-2.2	8.3	1.5	-3.8
135°	1	-25.8	13.8	13.0	-3.3	22.1	4.3
	2	-11.3	18.8	10.8	9.9	0.6	-4.1
	8	-8.6	19.7	10.3	12.3	-3.5	-5.7
180°	1	-39.8	-0.4	9.2	-0.3	21.3	-0.3
	2	2.1	-1.9	13.8	-1.5	-3.3	-1.4
	8	9.8	-5.4	15.0	-4.2	-7.8	-3.9
225°	1	-25.8	-13.8	13.0	3.3	22.1	-4.4
	2	-11.3	-18.8	10.8	-9.9	0.5	4.1
	8	-8.6	-19.7	10.4	12.3	-3.5	5.8
270°	1	-78.7	0.0	34.4	29.4	17.7	-15.0
	2	-30.7	0.0	3.5	-5.3	4.0	0.9
	8	-21.7	0.0	-2.3	-11.7	1.5	3.8
315°	1	-25.8	13.8	71.3	-12.1	-25.0	-33.6
	2	-11.3	18.8	10.5	1.9	2.0	-2.9
	8	-8.6	19.7	-0.8	4.8	7.1	2.9

$\varphi_0 = 30^\circ$ 时,  $A_0 = 45^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 315^\circ$ 的 $\Delta L$ 较大, 分别为 71.3、34.4、34.4、71.3 米, 而  $C_L = 2$  时, 能将这误差缩小为 10.5、3.5、3.5、10.5 米。 $\Delta H$  也有类似的情况, 因此  $C_L = 2$  较好, 其方法误差  $\Delta L, \Delta H$  约为 10 米, 这就满足很多方面的运用要求, 因而是个较理想的方案。

表 6 为对称中心差方法的计算结果, 即(65)式的解。从表中可以看出用这种方法考虑  $J_3$  摄动影响效果很好, 方法误差极小, 完全可以代替数值积分方法。

表 6 对称中心差的方法误差 ( $\varphi_0 = 30^\circ$ )

方位角	方 位 误 差 (单位: $10^{-3}$ 毫米/秒, 毫米)							
$A_0$	$\Delta \dot{x}$	$\Delta \dot{y}$	$\Delta \dot{z}$	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta z$	$\Delta L$	$\Delta H$
$0^\circ$	-53.4	-5.76	24.33	-29.26	-2.00	4.26	4.36	-26.60
$45^\circ$	30.16	12.35	-17.26	11.75	-3.17	-14.26	-15.63	0.88
$90^\circ$	13.23	18.05	25.83	7.25	-0.03	10.73	1.88	9.89
$135^\circ$	-2.42	9.38	7.16	-1.05	3.87	5.89	5.46	2.49
$225^\circ$	1.93	8.97	7.16	-0.63	5.49	5.89	6.87	-1.85
$270^\circ$	-17.22	12.26	25.83	-6.73	-1.22	10.73	2.87	-9.35
$315^\circ$	-32.51	2.06	-17.21	-10.12	-6.78	-14.21	-15.54	-0.88

## 参 考 文 献

- [1] Sterne, T.E., Astron. J., 63(1958), P.28—40
- [2] Vinti, J.P., Research NBS, 63B(1959), P.105—116
- [3] Barrar, R.B., Astron. J., 66(1961), P.11—15
- [4] 刘林, 赵德滋, 人造卫星运动理论, 南京大学教材, 1979
- [5] 刘林, 赵德滋, 中间轨道摄动法及其应用, 宇航学报, 第一期, 1982年1月, P.50~61
- [6] 紫金山天文台, 处理  $J_2$  项的中间轨道法
- [7] 程国采, 中间轨道法在中制导制导方法中的应用 湖南省宇航学会学术报告会论文 1982
- [8] 任萱, 地球引力势  $J_2$  项引起的弹道飞行器自由飞行运动参数偏差的近似解析解, 湖南省宇航学会学术报告会论文, 1982
- [9] 金梁, 利用中间轨道法等时测高确定落点偏差的方法研究, 湖南省宇航学会论文, 1982
- [10] 李连仲, 弹道飞行器自由飞行轨道的解析解法, 航宇学报, 1982年第1期
- [11] 朱龙根, 平均根数法在研究弹道飞行器运动中的运用, 湖南省宇航学会学术报告会论文, 1983

# An Improved Barrar—Type Intermediate Orbit— Analytic Solutions for Free Flight Trajectory of Long—range Ballistic Vehicle

Zhu Longgen

## Abstract

An improved Barrar-type intermediate orbit is proposed in this paper and an analytic solution is reached. When the special C values are applied by means of different combinations, we can obtain the analytic solution due to the  $J_2$  or  $J_3$  oblateness perturbation for the long-range ballistic vehicle, as well as the solution of Kepler's ellipse. This method is worth to popularize, it's application to dozens of simulative trajectories have shown that this method not only helps to simplify the whole process of calculations but also results in smaller truncation error, the range error and lateral error for the  $J_2$  perturbation are approximately 10m while those for the  $J_3$  are about 10mm.