国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八五年第二期　总第五十期　No. 2 1985 Sum.50

带约束条件的最优停止问题

徐可岱

摘要　本文提出这样一类新的最优停止问题：设$\{x_n, y_n, \mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$是两个可积的适应随机序列，在使得$Ey_t \geqslant V_y - \alpha$的停时类中求$\{x_n, \mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$的最优停时，其中$\alpha$是一常数，$V_y$是$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$的值，且$V_y < \infty$。我们分别用Lagrange方法和推广了的Snell外壳方法给出了存在性定理，并进行了一些比较，指出了对多目标最优停止问题的一个应用。

一

假设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是一个概率空间，$\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$是它的一列非降的子$\sigma$-代数，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是关于$\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$的可积适应随机序列。令$T$为关于$\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$的几乎处处有限停时全体，$C = \{t \in T: Ex_t^- < \infty\}$，则通常的最优停止问题可以叙述如下：

(0)　Maximize　Ex_t,

其中　$t \in C$

若存在$t_0 \in C$，使得$Ex_{t_0} = \sup\limits_{t \in C} Ex_t$，则称$t_0$为问题(0)的最优解，或称为最优停止规则。对于问题(0)，现在已有一些比较完全的讨论和一般性的结果（参见[1]，[2]，[3]）。本文将考虑如下的问题：设$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$也是关于$\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$的可积适应随机序列，$B = \{t \in T: Ex_t^- < \infty, Ey_t^- < \infty\}$。$\alpha$是给定的实数，考虑：

(P)　Maximize　Ex_t,　(a)

其中　$t \in B$

并且　$Ey_t \geqslant \alpha$　(b)

称问题(P)为带约束条件的最优停止问题，其中(b)称为约束条件。若存在$t_0 \in B$，$Ey_{t_0} \geqslant \alpha$使得

$$Ex_{t_0} = \sup_{t \in B,\ Ey_t \geqslant \alpha} Ex_t \tag{1}$$

则称t_0为问题(P)的α-最优解，或称为α-最优停止规则。自然称问题(0)为无约束条件的最优停止问题。

如所周知，在规划论中，对于带约束条件的最优化问题，通常是利用对偶原理化为

一九八四年十二月收到

无约束条件的问题来求解的。文献[5]的作者考虑了约束条件为

$$t \geqslant \eta, \qquad t \in C$$

的最优停止问题，其中η是一个给定的几乎处处有限停时，他引入了乘子序列的概念，讨论了原问题和对偶问题以及它们之间的关系。文献[4]的作者则考虑了约束条件为

$$Et \leqslant \alpha \qquad t \in C$$

的最优停止问题，其中α为给定的常数。

作者在本文的第二部分，应用规划论的思想，给出了问题(P)的一个求解方法，推广了[4]的结果。另外，在无约束条件的最优停止问题中，对于给定的随机序列带有某些正则条件的最小控制上鞅起着根本的作用（参见[1]，[2]）。在本文第三部分，我们对问题(P)提出了一个新的序列$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$，给出了问题(P)的另一个求解方法，并进行了一些比较。最后，顺便指出了对随机向量序列最优停止问题（参见[6]）的一个应用。

二

除了前面所提到的以外，再给出下面的记号：

$C_{y,n}=\{t\geqslant n: \ t\in T, \ Ey_t^-<\infty\}$;

$C_{x,n}=\{t\geqslant n: \ t\in T, \ Ex_t^-<\infty\}$;

设 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$为一列实数，且$\alpha_1=\alpha$，

$D_n=\{t\geqslant n: \ t\in B, \ Ey_t\geqslant\alpha_n\}$;

$\gamma_n=\operatorname{ess}\sup\limits_{t\in C_{x,n}} E(x_t\mid\mathscr{F}_n)$;

$\beta_n=\operatorname{ess}\sup\limits_{t\in D_n} E(x_t\mid\mathscr{F}_n)$;

$V_{y,n}=\sup\limits_{t\in C_{y,n}} Ey_t$, $\qquad V_{x,n}=\sup\limits_{t\in C_{x,n}} Ex_t$;

$W_n=\sup\limits_{t\in D_n} Ex_t$; $\qquad n=1,2,3,\cdots\cdots$,

分别称$V_{x,1}$，$V_{y,1}$为随机序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$的值，本文总是假定$V_{x,1}<\infty$，$V_{y,1}<\infty$。

作函数

$$L(\lambda,t)=Ex_t+\lambda(Ey_t-\alpha), \ \lambda\geqslant 0, \ t\in B.$$

定义问题(P)的对偶问题为：

(D) Minimize $\theta(\lambda)$, $\qquad \lambda\geqslant 0$

其中$\theta(\lambda)=\sup\limits_{t\in B} L(\lambda,t)$, $\quad t\in B$, $\lambda\geqslant 0$.

满足

$$\theta(\lambda_0)=\inf_{\lambda>0}\ \theta(\lambda), \qquad \lambda_0\geqslant 0$$

的实数λ_0称为问题(D)的解，问题(P)又可以称为原问题。

定理 1 设$t^*\in B$，$\lambda^*\geqslant 0$。若对任意的$t\in B$，$\lambda\geqslant 0$，有

$$L(\lambda^*, t)\leqslant L(\lambda^*, t^*)\leqslant L(\lambda, t^*) \tag{2}$$

则t^*为问题(P)的最优解，λ^*为问题(D)的解。

证明 由定义和(2)式，我们有

$$\sup_{t\in B}(Ex_t+\lambda^*(Ey_t-\alpha))\leqslant Ex_{t^*}+\lambda^*(Ey_{t^*}-\alpha)$$

$$\leqslant\inf_{\lambda\geqslant 0}(Ex_{t^*}+\lambda(Ey_{t^*}-\alpha))\tag{3}$$

又由 $t^*\in B$，$\lambda^*\geqslant 0$，故(3)式应为两个等式。易知 $Ey_{t^*}\geqslant\alpha$，因而可得

$$Ex_{t^*}+\lambda^*(Ey_{t^*}-\alpha)=Ex_{t^*}+\inf_{\lambda\geqslant 0}\lambda(Ey_{t^*}-\alpha)=Ex_{t^*}$$

即有 $\lambda^*(Ey_{t^*}-\alpha)=0$。

现对任意的 $s\in B$，$Ey_s\geqslant\alpha$，有

$$\begin{aligned}Ex_s&\leqslant Ex_s+\lambda^*(Ey_s-\alpha)\leqslant\sup_{t\in B}(Ex_t+\lambda^*(Ey_t-\alpha))\\&=Ex_{t^*}+\lambda^*(Ey_{t^*}-\alpha)\\&=Ex_{t^*}\end{aligned}$$

所以 t^* 是 α－最优解。

对于任意的 $\bar\lambda\geqslant 0$，由前所证，有

$$\begin{aligned}\theta(\lambda^*)&=\sup_{t\in B}(Ex_t+\lambda^*(Ey_t-\alpha))\\&=Ex_{t^*}+\lambda^*(Ey_{t^*}-\alpha)\\&=\inf_{\lambda\geqslant 0}(Ex_{t^*}+\lambda(Ey_{t^*}-\alpha))\\&\leqslant Ex_{t^*}+\bar\lambda(Ey_{t^*}-\alpha)\\&\leqslant\sup_{t\in B}(Ex_t+\bar\lambda(Ey_t-\alpha))\\&=\theta(\bar\lambda)\end{aligned}$$

故 λ^*是(D)的解。

推论 对于 $t^*\in$ B，$\lambda^*\geqslant 0$，条件(2)与下列条件等价：

$$\left.\begin{aligned}&\theta(\lambda^*)=L(\lambda^*,\ t^*)\\&\lambda^*(Ey_{t^*}-\alpha)=0\\&Ey_{t^*}-\alpha\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

证明 (略)。

由推论可以得到本节的主要结果。

定理 2 若存在 $t_0\in$ B，及 $\lambda_0\geqslant 0$，使得 $Ey_{t0}\geqslant\alpha$，$\lambda_0(Ey_{t0}-\alpha)=0$，且

$$\sup_{t\in B}(Ex_t+\lambda_0Ey_t)=Ex_{t0}+\lambda_0Ey_{t_0}\tag{5}$$

则 t_0 是 α－最优解。

证明是显然的。

对于 $\lambda\geqslant 0$， 令

$$B_\lambda=\{t\in T:\ E(x_t+\lambda y_t)^-<\infty\}$$

可以看出，要使得问题(P)真正能够化为无约束条件的问题来解，还需要将(5)式中的 B 取代为 $B_{\lambda 0}$。对此，我们有

定理 3 (1) 若存在 $\mu>0$，使得

$$\sup_{t\in B_\mu}E(x_t+\mu y_t)<\infty$$

并且 $y_n\geqslant 0$，$n=1,2,\cdots$，则对任意的 $0\leqslant\lambda<\mu$，有 $B_\lambda=B$；

(2) 若$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$满足条件 $E\sup|y_n|<\infty$，则对任意的$\lambda\geqslant 0$，有$B_\lambda=B$.

证明 对于任意的$\lambda\geqslant 0$，任意的$t\in B$，由$(x_t+y_t)^-\leqslant x_t^-+y_t^-$，知必有$B\subset B_\lambda$。下面考虑相反的包含关系。

(1) 对于任意的$0\leqslant\lambda<\mu$，任意取$t'\in B_\lambda$，有

$$E(x_{t'}+\mu y_{t'})^-\leqslant E(x_{t'}+\lambda y_{t'})^-<\infty$$

于是$t'\in B_\mu$，因而$B_\lambda\subset B_\mu$，且

$$-\infty<E(x_{t'}+\lambda y_{t'})\leqslant\sup_{t\in B_\lambda}E(x_t+\lambda y_t)$$

$$\leqslant\sup_{t\in B_\mu}E(x_t+\mu y_t)<\infty$$

由此可知$x_{t'}+\lambda y_{t'}$是可积的。而已知$x_{t'}+\mu y_{t'}$可积，故可知$x_{t'}$，$y_{t'}$都可积，则$t'\in B$。这说明了$B_\lambda\subset B$。

(2) 对任意给定的$\lambda\geqslant 0$，任意的$t'\in B_\lambda$，由条件$E\sup\limits_n|y_n|<\infty$，知$E|y_{t'}|<\infty$，故

$$Ex_{t'}^-\leqslant E(x_{t'}+\lambda y_{t'})^-+E\lambda y_{t'}^+<\infty$$

因此$t'\in B$，即$B_\lambda\subset B$。

这样，由定理2，定理3，通过解随机序列$\{x_n+\lambda y_n\}_{n=1}^{\infty}$的无约束条件的最优停止问题，可以求解问题(P)，其中$\lambda\geqslant 0$为参数。取$y_n=-n$，$n=1,2,\cdots$，对定理3作一些修改即得[4]的基本结论。最后，我们指出，上述结果也可以用于多个约束条件的情况。

三

以下我们考虑$\alpha\leqslant V_{y,1}$的情况。

1. 有限情形。

所谓有限情形，就是指对于$\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^N$，$\{x_n\}_{n=1}^N$，$\{y_n\}_{n=1}^N$，$N<\infty$考虑相应的问题(P)的最优停止问题。此时重新规定，$\beta_{N+1}=\beta_N$，设$\varepsilon=V_{y,1}-\alpha$，$\alpha_n=V_{y,n}-\varepsilon$，$n=1,2,\cdots,N$。其他记号如前。

引理 1 对于$\{y_n,\mathscr{F}_n\}_{n=1}^M$，其中$M\leqslant\infty$。对于任意给定的$K<M$，若$t$为$\{y_n,\mathscr{F}_n\}_{n=K}^M$的无约束最优停止规则，则对任意的$A\in\mathscr{F}_K$，$t$也是$\{I_Ay_n,\mathscr{F}_n\}_{n=K}^M$的无约束条件的最优停止规则。

证明 如若不然，则存在停止规则$s\in T$，$s\geqslant K$，$E(y_sI_A)^-<\infty$，使得$Ey_tI_A<Ey_sI_A$。

令
$$t'=\begin{cases}s, & (\text{在}A\text{上})\\ t, & (\text{在}A^c\text{上})\end{cases}$$

则易知$t'\in T$，$t'\geqslant K$，且 $Ey_{t'}^-<\infty$。

但是
$$Ey_{t'}=Ey_sI_A+Ey_tI_{A^c}>Ey_tI_A+Ey_tI_{A^c}$$
$$=Ey_t=V_{y,k}$$

这与$V_{y,k}$的定义矛盾。故t应是$\{y_nI_A\}_{n=K}^M$的无约束最优停止规则。

引理 2 对于给定的正整数$n<N$，任意的$t\in D_n$，存在$t'\in D_{n+1}$，使得在$(t>n)$上，$t'=t$。

证明 令 s_0, t_0 分别为 $\{y_k, \mathscr{F}_k\}_{k=n+1}^N$，$\{y_k, \mathscr{F}_k\}_{k=n}^N$ 的无约束最优停止规则（由[1]中定理3.2知这样的 s_0, t_0 是存在的）。令

$$t'=\begin{cases} s_0, & (\text{在}(t=n)\text{上}) \\ t, & (\text{在}(t>n)\text{上}) \end{cases}$$

则易知 $t'\in T$，$t'\geqslant n+1$，$Eu_{t'}^-<\infty$。故 $t'\in C_{y,n+1}$，并有

$$\begin{aligned} Ey_{t'} &= Ey_{s0}I_{(t=n)}+Ey_tI_{(t>n)} \\ &= Ey_{s0}+Ey_tI_{(t>n)}-Ey_{s0}I_{(t>n)} \\ &= V_{y,n+1}+Ey_tI_{(t>n)}-Ey_{s0}I_{(t>n)} \end{aligned} \tag{6}$$

下面证明

$$Ey_{s0}I_{(t>n)}-Ey_tI_{(t>n)}\leqslant\varepsilon \tag{7}$$

如若不然，则存在 $\delta>0$，使得

$$Ey_{s0}I_{(t>n)}-Ey_tI_{(t>n)}=\varepsilon+\delta,$$

令

$$t^*=\begin{cases} t_0, & (\text{在}(t=n)\text{上}) \\ s_0, & (\text{在}(t>n)\text{上}) \end{cases}$$

则易知 $t^*\in C_{y,n}$，由引理1得

$$\begin{aligned} V_{y,n} &= Ey_{t0}\leqslant Ey_t+\varepsilon \\ &= Ey_tI_{(t=n)}+Ey_tI_{(t>n)}+\varepsilon \\ &\leqslant Ey_{t0}I_{(t=n)}+Ey_{s0}I_{(t>n)}+\varepsilon \\ &= Ey_{t^*}-\delta<Ey_{t^*} \end{aligned}$$

这与 $V_{y,n}$ 定义矛盾，故(7)式成立，再由(6)式即得

$$Ey_{t'}\geqslant V_{y,n+1}-\varepsilon$$

由 t' 的取法即知其满足要求。

引理 3 对每 $n=1,2,\cdots N$

$$\beta_n\leqslant x_n\vee E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n)。$$

证明 对于固定的 $1\leqslant n\leqslant N$，当 $n=N$ 时结论是显然。考虑 $1\leqslant n<N$ 情形。由引理2知，对任意的 $t\in D_n$，存在 $t'\in D_{n+1}$，使得在 $(t>n)$ 上，$t'=t$。故对任意的 $A\in\mathscr{F}_n$，有

$$\begin{aligned} \int_A x_t &= \int_{A(t=n)}x_n+\int_{A(t>n)}x_t \\ &= \int_{A(t=n)}x_n+\int_{A(t>n)}x_{t'} \\ &\leqslant \int_{A(t=n)}x_n+\int_{A(t>n)}\beta_{n+1} \\ &\leqslant \int_A x_n\vee E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n) \end{aligned}$$

由 A 的任意性知，有 $E(x_t|\mathscr{F}_n)\leqslant x_n\vee E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n)$。再由 t 的任意性及 β_n 的定义，则得

$$\beta_n\leqslant x_n\vee E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n)$$

现在用后退归纳法证明本段主要定理。

定理 4 在有限情形下，令

$$\tau_n=\inf\{k\geqslant n:\ x_k\geqslant E(\beta_{k+1}|\mathscr{F}_k)\},\ n=1,2,\cdots,N$$

则

(1) $E(x_{\tau_n}|\mathscr{F}_n)\geqslant\beta_n$，$n=1,2,\cdots,N$.

(2) 当 $\tau_n\in D_n$ 时，则 τ_n 对于 $\{\mathscr{F}_k\}_{k=n}^N$，$\{x_k\}_{k=n}^N$，$\{y_k\}_{k=n}^N$ 是 α_n—最优停止规则。$n=1,2,\cdots,N$.

证明 (1) 当 $n=N$ 时，因为 $Ey_N=V_{y,N}\geqslant V_{y,N}-\varepsilon=\alpha_N$，$\tau_N=N$，故结论显然成立。假设对 N，$N-1,\cdots,n+1$ 结论已成立，考虑 n 的情况。对任意的 $A\in\mathscr{F}_n$，有

$$\int_A x_{\tau_n}=\int_{A(x_n\geqslant E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n))}x_n+\int_{A(x_n<E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n))}x_{\tau_{n+1}}$$

$$\geqslant\int_{A(x_n\geqslant E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n))}x_n+\int_{A(x_n<E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n))}\beta_{n+1}$$

$$=\int_A x_n\vee E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n)$$

$$\geqslant\int_A\beta_n$$

因此，由 A 的任意性，得 $E(x_{\tau_n}|\mathscr{F}_n)\geqslant\beta_n$.

(2) 当 $\tau_n\in D_n$ 时，由(1)，对任意的 $t\in D_n$，有

$$E(x_{\tau_n}|\mathscr{F}_n)\geqslant E(x_t|\mathscr{F}_n)$$

故 $Ex_{\tau_n}\geqslant Ex_t$。则(2)成立。

2. 无限情形 在有限情形中，引理 2 起着主要的作用。但在无限情形中，相应的结论不成立。例如，设 $\Omega=[0,1]$，$\mathscr{F}=\mathscr{B}[0,1]$，$P$ 为 $[0,1]$ 上的 Lebesgue－测度，$A=[0,1/2]$，$B=[0,2/3]$，$y_1=I_A$，$y_n=(1-1/n)I_B$，$n=2,3,\cdots$，$\mathscr{F}_n=\sigma(y_1,y_2,\cdots,y_n)$。则 $V_{y,1}=V_{y,2}=2/3$。令 $\varepsilon=1/2$，取

$$t=\begin{cases}1,\ (\text{在}A\text{上}),\\2,\ (\text{在}A^c\text{上}),\end{cases}$$

则知 $t\in D_1$，但是易知不存在 $t'\in D_2$，使得在 $(t>1)$ 上，有 $t'=t$。这就需要修改 α_n 的定义。

令 $\varepsilon=V_{y,1}-\alpha$，取 $v>0$，及实数列 $\varepsilon_n\uparrow\uparrow(\varepsilon+v)$，$\varepsilon_1=\varepsilon$。设

$$D_n=\{t\in C_{y,n}:\ Ey_t\geqslant V_{y,n}-\varepsilon_n\},\ n=1,2,\cdots,$$

即取 $\alpha_1=Vy,_n-\varepsilon_n$。由于可取 v 任意小，所以这样可以看作是把 D_n 略微改变一下。对任意的 $A\in\mathscr{F}_n$，以 $V_{y,n}(A)$ 记随机序列 $\{y_kI_A\}_{k=n}^\infty$ 的值。

引理 4 对任意的 $t\in D_n$，存在 $t'\in D_{n+1}$，使得在 $(t>n)$ 上，$t'=t$。其中 $n=1,2,\cdots$。

证明 由 $\{\varepsilon_n\}$ 的取法知，$\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n>0$，故存在 $s_0\in C_{y,n+1}$，使得

$$Ey_{s_0}\geqslant V_{y,n+1}+\frac{\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n}{2}$$

令

$$t'=\begin{cases} s_0, & (\text{在}(t=n)\text{上}) \\ f, & (\text{在}(t\geqslant n+1)\text{上}) \end{cases}$$

则易知 $t'\in C_{y,n+1}$，且

$$\begin{aligned} Ey_{t'} &= Ey_{s0}I_{(t=n)}+Ey_tI_{(t>n)} \\ &= Ey_{s0}+Ey_tI_{(t>n)}-Ey_{s0}I_{(t>n)} \\ &\geqslant V_{y,n+1}-\frac{\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n}{2}+Ey_tI_{(t>n)}-Ey_{s0}I_{(t>n)} \end{aligned} \tag{8}$$

下面证明

$$Ey_{s0}I_{(t>n)}-Ey_tI_{(t>n)}\leqslant\varepsilon_n \tag{9}$$

如若不然，则存在$\delta>0$，使

$$Ey_{s0}I_{(t>n)}-Ey_tI_{(t>n)}=\varepsilon_n+\delta$$

取停止规则t_1，使得

$$Ey_{t_1}I_{(t=n)}\geqslant V_{y,n}(\{t=n\})-\eta_1$$

其中η_1为充分小的一个数，令

$$t^*=\begin{cases} t_1, & (\text{在}(t=n)\text{上}), \\ s_0, & (\text{在}(t>n)\text{上}), \end{cases}$$

故有

$$\begin{aligned} V_{y,n} &\leqslant Ey_t+\varepsilon_n=Ey_tI_{(t=n)}+Ey_tI_{(t>n)}+\varepsilon_n \\ &\leqslant Ey_{t_1}I_{(t=n)}+\eta_1+Ey_tI_{(t>n)}+\varepsilon_n \\ &= Ey_{t_1}I_{(t=n)}+\eta_1+Ey_{s0}I_{(t>n)}-\varepsilon_n-\delta+\varepsilon_n \\ &= Ey_{t^*}+\eta_1-\delta \end{aligned}$$

只要取η_1充分小，便有

$$V_{y,n}\leqslant Ey_t^*-\frac{\delta}{2}$$

这与$V_{y,n}$的定义矛盾，说明(9)式是成立的。再由(8)式，得

$$Ey_{t'}\geqslant V_{y,n+1}-\frac{\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n}{2}-\varepsilon_n\geqslant V_{y,n+1}-\varepsilon_{n+1}$$

由t'之定义，知其就是所求。

推论 5 设$n<m$，则对任意的$t\in D_n$，存在$t'\in D_{n+1}$，使得在$(t\geqslant m)$上，$t'=t$.

证明 用数学归纳法证明。对于$t\in D_n$，由引理 4，存在$t_1\in D_m$，使得在$(t\geqslant n+1)$上，$t_1=t$.假设已证得：对$k-1$，$(k\leqslant m-n)$，有$t_{k-1}\in D_{n+k-1}$，使得在$(t\geqslant n+k-1)$上，有$t_{k-1}=t$。考虑k的情况，因$t_{k-1}\in D_{n+k-1}$，故仍有引理 4 知，存在$t_k\in D_{n+k}$，使得在$(t_{k-1}\geqslant n+k)$上，有$t_k=t_{k-1}$；而$(t\geqslant n+k)\subset(t\geqslant n+k-1)$，故在$(t\geqslant n+k)$上有，$t_k=t_{k-1}=t$。由归纳法原理即得。

由引理 3 的证明可以看出，在无限情形中，相应引理 3 的结论也成立。即

$$\beta_n\leqslant x_n\vee E(\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n),\quad n=1,2\cdots$$

引理 6 若$t\in D_1$，则对每个$n=2,3,\cdots$,

(1) 在$(t\geqslant n)$上，有 $E(x_t\mid \mathscr{F}_n)\leqslant\beta_n$，

(2) 在$(t>n)$上，$E(x_t^-\mid\mathscr{F}_n)\geqslant E(\beta_{n+1}^-\mid\mathscr{F}_n)$。

证明 (1) 由引理 4 的推论，知存在$t'\in D_n$，使得在$(t\geqslant n)$上，$t'=t$。故在$(t\geqslant n)$上

$$E(x_t\mid\mathscr{F}_n)=E(x_{t'}\mid\mathscr{F}_n)\leqslant\beta_n$$

(2) 由(1)，可取$t''\in D_{n+1}$，使在$(t>n)$上，$t''=t$，且

$$E(x_t\mid\mathscr{F}_{n+1})=E(x_{t''}\mid\mathscr{F}_{n+1})\leqslant\beta_{n+1}$$

再由Jensen不等式，知在$(t>n)$上

$$\begin{aligned}E(x_t^-\mid\mathscr{F}_n)&=E(E(x_t^-\mid\mathscr{F}_{n+1})\mid\mathscr{F}_n)\\&\geqslant E(E(x_t\mid\mathscr{F}_{n+1})^-\mid\mathscr{F}_n)\\&\geqslant E(\beta_{n+1}^-\mid\mathscr{F}_n)\end{aligned}$$

引理 7 若$s,t\in D_1$，且对一切n，有

$$E(x_s\mid\mathscr{F}_n)\geqslant x_n,\qquad 在(s>n)上,$$

$$E(x_t\mid\mathscr{F}_n)\leqslant x_n,\qquad 在(s=n,\ t\geqslant n)上,$$

则必有 $Ex_s\geqslant Ex_t$。

证明 可参见[1]引理3.2的证明方法。

设$t\in B$，$t\geqslant n$，称t为n一可取的，指对任意的$j\geqslant n$有

$$E(x_t\mid\mathscr{F}_j)\geqslant x_j,\ 在(t>j)上,$$

简称1一可取的停止规则为可取的。

对于每个$n=1,2,3,\cdots$，令

$$\tau_n=\inf\{k\geqslant n:x_k\geqslant E(\beta_{k+1}\mid\mathscr{F}_k)\}$$

定理 5 (1) 若$\tau_1\in D_1$，且τ_1是可取的，则τ_1是α-最优停止规则。

(2) 若问题(P)存在α一最优停止规则t_0，且$t_0\geqslant\tau_1$，$Ey\tau_1\geqslant\alpha$，则τ_1也是问题(P)的α一最优停止规则。

证明 (1) 由τ_1可取性，在$(\tau_1>j)$上，有$E(x_{\tau_1}\mid\mathscr{F}_j)\geqslant x_j$，$j=1,2,\cdots$。再由引理6，对任意的$t\in D_1$，在$(t\geqslant j)$上，有$E(x_t\mid\mathscr{F}_j)\leqslant\beta_j$，$j=1,2\cdots$，故在$(\tau_1=j$, $t\geqslant j)$上，有

$$E(x_t\mid\mathscr{F}_j)\leqslant\beta_j\leqslant x_j\vee E(\beta_{j+1}\mid\mathscr{F}_j)=x_j$$

由引理7，即知$Ex_{\tau_1}\geqslant Ex_t$，因而$\tau_1$是$\alpha$一最优停止规则。

(2) 由$t_0\geqslant\tau_1$，有

$$\begin{aligned}\int x_{\tau_1}^-&=\int_{(\tau_1=t_0)}x_{t_0}^-+\int_{(\tau_1<t_0)}x_{\tau_1}^-\\&=\int_{(\tau_1=t_0)}x_{t_0}^-+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(\tau_1=k<t_0)}x_k^-\\&\leqslant\int_{(\tau_1=t_0)}x_{t_0}^-+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(\tau_1=k<t_0)}E(\beta_{k+1}^-\mid\mathscr{F}_k)\\&\leqslant\int_{(\tau_1=t_0)}x_{t_0}^-+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(\tau_1=k<t_0)}E(x_{t_0}^-\mid\mathscr{F}_k)\\&=Ex_{t_0}^-<\infty\end{aligned}$$

其中最后第二等式用到引理6。因而$\tau_1\in D_1$，再对x_{τ_1}重复地作类似(2)的步骤，可知

$Ex\tau_1 \geqslant Ex_{t_0}$。所以$\tau_1$也是$\alpha$一最优的停止规则。

令

$$\sigma_n = \inf\{k \geqslant n : x_k = \gamma_k\}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

我们知道，$\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$是控制$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的最小$C$-正则上鞅。对于$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$的无约束最优停止问题(0)，在一些条件下，$\sigma_n$具有最小性，最优性和唯一性等优良性质(参见[1], [3])。但是，对于带约束条件的最优停止问题是(P)，τ_1并不完全具有上述性质，$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$也并不完全具有类似$\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$的性质。其主要原因在于$D_n$中不满足上端运算封闭性，即当$t_1, t_2 \in D_n$时，$t_1 \vee t_2$不一定属于$D_n$。

例 令$\Omega = \{w_1, w_2, w_3\}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$，(其中$\mathscr{P}(\Omega)$表示$\Omega$的全体子集)。再令$A_1 = \{w_1\}$, $A_2 = \{w_2\}$, $A_3 = \{w_3\}$, $\mathscr{F}_1 = \{\phi, \Omega, A_1 \cup A_2, A_3\}$, $\mathscr{F}_2 = \mathscr{F}_3 = \mathscr{F}$。$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dfrac{1}{3}$。

$$x_1 = 8 \cdot I_{A1} + 8I_{A2} + 1 \cdot I_{A3},$$
$$x_2 = 4 \cdot I_{A1} + 6 \cdot I_{A2} + 5 \cdot I_{A3}$$
$$x_3 = 9I_{A1} + 2I_{A2} + 1I_{A3}$$
$$y_1 = 1I_{A1} + 1I_{A2} + 4I_{A3}$$
$$y_2 = 5I_{A1} + 4I_{A2} + 1I_{A3}$$
$$y_3 = 3I_{A1} + 2I_{A2} + 1I_{A3}$$

考虑$\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{3}$, $\{x_n\}_{n=1}^{3}$, $\{y_n\}_{n=1}^{3}$的带约束条件的最优停止问题(P)。

通过计算，易知$V_{y,1} = 13/3$, $V_{y,2} = 10/3$，取$\alpha = \alpha_1 = 11/3$, $\alpha_2 = 8/3$, $\alpha_3 = 4/3$，则停时$t_0 = 3I_{A1} + 2I_{A2} + 1I_{A3}$是$\alpha$一最优停止规则。再取$\lambda = 2$，则可以验证$t_0$还是$\{x_n + \lambda y_n, \mathscr{F}_n\}_{n=1}^{3}$的无约束条件最优停止规则；而且$t_0$, λ满足定理2的条件。但是此时可知有$\tau_1 = 1A_1 + 1A_2 + 2A_3$, τ_1不满足$Ey\tau_1 \geqslant \alpha$，而且$\tau_1$不是$\alpha$一最优停止规则。这也明说了，当问题$(P)$可以用第二部分的方法求解时，并不一定能由第三部分的方法求出最优解。

四

在文献[6]中，提出了随机向量序列的最优停止问题。这里我们给出一个命题，指出可以由解带约束条件的最优停止问题来求解随机向量序列的最优停止问题。

定义 $t \in B$称为是随机向量序列$\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$的**有效解**是指$B$中没有这样的停时$s$，使

$$(Ex_t, Ey_t) \leqslant (Ex_s, Ey_s)$$

其中对于(a, b), $(c, d) \in R^2$

$$(a, b) \leqslant (c, d)$$

表示$a \leqslant c$, $b \leqslant d$，且至少有一个为严格不等式。

按[6]中的提法，一般地，随机向量序列的最优停止问题就是求出所有有效解。

令

$$a_1=\sup_{t\in B} Ex_t,\qquad a_2=\sup_{t\in B} Ey_t,$$

$$F=\{t\in B: Ex_t=a_1\},$$

$$b_2=\begin{cases}\sup\limits_{t\in F} Ey_t, & \text{当 } F\neq\phi\\ -\infty & \text{当 } F=\phi\end{cases}$$

命题 $t^*\in B$是有效解的充分必要条件是存在$\alpha^*\in[b_2, a_2]$，使得t^*是α^*—最优停止规则且对任意的α^*—最优停止规则t，有$Ey_t=Ey_{t^*}$。

证明 必要性 首先，由定义知必有$Ey_{t^*}\geqslant b_2$。令$\alpha^*=Ey_{t^*}$。如果存在$s\in B$，使$Ey_s\geqslant\alpha^*=Ey_{t^*}$，则由于$t^*$是有效解，不可能有$Ex_{t^*}<Ex_s$。则$Ex_s\leqslant Ex_{t^*}$。因而$t^*$是$\alpha^*$—最优解。另外，若$t'$是一个$\alpha^*$最优解，即$Ex_{t^*}=Ex_{t'}$，$Ey_{t'}\geqslant\alpha^*=Ey_{t^*}$，同理，由于不存在$Ey_{t'}>Ey_{t^*}$，故必有$Ey_{t'}=\alpha^*=Ey_{t^*}$。

充分性 若t^*不是有效解，则存在$s\in B$，使得$(Ex_{t^*}, Ey_{t^*})\leqslant(Ex_s, Ey_s)$。由于$Ey_s\geqslant Ey_{t^*}\geqslant\alpha^*$，并且$t^*$是$\alpha^*$—最优解，不可能有$Ex_s>Ex_{t^*}$。因而，$Ex_s=Ex_{t^*}$，这样，$s$也是$\alpha^*$—最优解。由假设应有$Ey_s=Ey_{t^*}$，发生矛盾，故$t^*$是有效解。

参考文献

[1] 周元燊，H. Robbins, D, Siegmund。等著、何声武，汪振鹏译，最优停止理论，上海科学技术出版社。1983.

[2] A. N. Shiryayev, Optimal Stopping Rules, Spring-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1978.

[3] Xue Xing-hong, The uniqueness of optimal sequential decision, Invited paper, 44th Session of the International Statistical Institute, Madrid—Espana, September 12, September 22nd 1983.

[4] D. P. Kennedy, On a constraint optimal stopping problem. J. Appl. Prob. 19. 631—641 (1982),

[5] David, C. Nachman, Optimal Stopping with A Hovizon Constraint, MATHEMATICS OF OPERATIONS RESERCH, V0l. 5, NO. 1. February, 1980

[6] 金治明 多目标最优停止与约束最优停止，国防科大论文报告资料，83—7016

[7] Bacopoulos. A, Godini. G. Singer. I., Imfima of Sets in the Plane and Application to Vectorial Optimization, Rerue Roumaine de Mathematiques Puers et Application, V0l. 23, PP 343—360, 1978.

On the Optimal Stopping Problem with Some Constrained Conditions

Xu Kedai

Abstract

In this paper we consider a new kind of optimal stopping problems. Let $\{x_n, y_n, \mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ be an integrable and adapted stochastic process. We will find an optimal stopping rule for $\{x_n, \mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ in the class of stopping rule D such that for any $t \in$ D, $Ey_t \geqslant V_y - \alpha$, where α is a constant and V_y is the value of $\{y_n, \mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that $V_y < \infty$. Adopting the Lagrange's method and the generalized Snell's method we obtain some existence theorems respectively. Finally, we discuss the two methods and apply them to solve the optimal stopping problem of the stochastic sequence of randon vectors.