国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八五年第三期　总第五十一期　No.3 1985 Sum. 51

信号的线性变量代换

罗永光

提　要　本文系统地探讨了对信号进行线性的变量代换的一般规律，分析了通常容易出错的原因，给出了实现这种代换的解析的及作图的系统性方法。

一、引　　言

信号的线性变量代换，无论在工程上或在教学实践中都是经常碰到的课题。但这一问题无论在谈论信号的书籍或教材中，还是在数学书籍中，都未正式当作一个课题而作出系统性的论述。教师苦于无书参考，学生作业则往往半数出错。本文将系统讨论这一课题，分析代换规律，给出代换方法。

信号的变量代换，就是已知信号 $f(t)$ 的函数式或波形，求信号 $f(y(t))$ 的函数式或波形。如其中 $y(t)=at+b$，就是作信号的线性变量代换。

二、信号函数式的线性变量代换

信号的线性变量代换，在已知信号函数式的情况下，就是直接以 $y(t)$ 代换 $f(t)$ 中所有的 t．容易出错的是代换后信号的定义域。信号定义域一般是以 t 的不等式表示的，此不等式中的 t 亦应代换成 $y(t)$，通过新不等式的求解而得出代换后信号的定义域。典型的情况是：

$$f(t)=\begin{matrix} g(t), & t_1\leqslant t\leqslant t_2 \\ 0, & 其余 \end{matrix} \tag{1}$$

经线性变量代换后的信号为：

$$f(t)=\begin{matrix} g(at+b), & t_1\leqslant at+b\leqslant t_2 \\ 0, & 其余 \end{matrix}$$

$$=\begin{cases} g(at+b), & \dfrac{t_1-b}{a}\leqslant t\leqslant\dfrac{t_2-b}{a}, \quad a>0 \\ 0, & 其余, \end{cases}$$

本文1985年1月5日收到

$$\begin{cases} g(at+b), & \dfrac{t_2-b}{a} \leqslant t \leqslant \dfrac{t_1-b}{a}, \quad a<0 \\ 0, & \text{其余}, \end{cases} \tag{2}$$

例 1 已知信号如图1(a)，求信号$f(-2t-4)$。

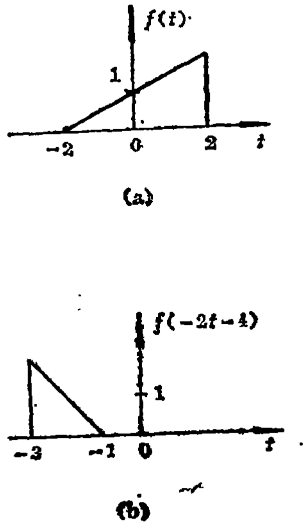

图 1

解： 信号 $f(t)$ 的函数式为

$$f(t)=\frac{1}{2}(t+2), \quad -2\leqslant t\leqslant 2$$

$$0, \qquad \text{其余} \tag{3}$$

按 (2) 式有

$$f(-2t-4)=\frac{1}{2}(-2t-4+2), \quad -2\leqslant -2t-4\leqslant 2$$

$$0, \qquad \text{其余} \tag{4}$$

其波形如图1(b).

三、信号波形的线性变量代换

如信号只是以波形的形式给出，而要求的是代换后的波形，此时有两种情况：一、由其波形较易于求得其解析表达式且其解析式较简单，则可以将信号的解析表达式求出后，再按前节的方法得出变量代换后的解析式，最后由此解析式画出代换结果的波形；二、由其波形不便求出其解析式，或其解析式虽勉强能得出但却过于复杂，不便于作图，此时就只能或最好采用直接作图的方法。

信号波形的线性变量代换之作图步骤不外折迭、平移和水平展缩三种。为得出作图的一般方法，有必要系统地分析这三种作图步骤的具体规律。

1. 信号波形的折迭

信号波形的折迭需要定出正确的折迭轴线。

信号波形的折迭是一种图形变换。如折迭前的信号为$f(t)$，折迭后的信号为$f(-t)$，则对应的折迭变换T_-为

$$T_-(t, f(t)) = (t, f(-t)) \tag{5}$$

很明显，$t\neq 0$处的图形都要被折迭，而$t=0$处的图形则在折迭变换下保持不变：

$$T_-(0, f(0)) = (0, f(-0)) = (0, f(0))$$

就是说，此时$t=0$是折迭变换下的不变轴线。

如折迭前的信号不是$f(t)$而是$f(y(t))$（在作本步折迭之前已作过某种线性变量代换），折迭后的信号要求为$f(-y(t))$，则此时对应的将是$y-f$平面上的折迭变换：

$$T_-(y, f(y)) = (y, f(-y), \tag{6}$$

同前述，此时（在$y-f$平面上）的折迭不变轴线是$y=0$而不再是$t=0$。但是我们最终需要的不是图形$(y, f(-y))$，而是图形$(t, f(-y(t)))$，即我们实际上都不是在$y-f$平面上而是在$t-f$平面上画出$f(-y(t))$的波形，故还应进一步在$t-f$平面上求出相应的折迭不变轴线，此轴线的时间（横）坐标当然还是应满足方程

$$y(t)=0 \tag{7}$$

这就是一般情况下的折迭轴方程。

2. 信号波形的平移

信号波形的平移需要定出正确的平移量。

波形平移也是一种变换。如平移前的信号为$f(t)$，平移后的信号为$f(t+b)$，则对应的平移变换$T_\varDelta$为

$$T_\varDelta(t, f(t)) = (t, f(t+b)) \tag{8}$$

我们以$f(0)$作为参考，因为$f(0)$的平移量即可代表整个波形的平移量。平移前$f(0)$对应于$t=0$，即坐标$(0, f(0))$，而平移后$f(0)$对应于$t+b=0$，即$t=-b$，亦即坐标$(-b, f(0))$。因此平移量$(\varDelta t)$是平移代换变量$y(t)=t+b=0$这一方程的解。注意，若$\varDelta t\geqslant 0$，则波形向时间t的正方向平移$\varDelta t$个单位，而若$\varDelta t\leqslant 0$，则波形向时间t的负方向平移$|\varDelta t|$个单位。

如平移前的波形不是$f(t)$而是$y(t)$（在作本步平移前已作过某种线性变量代换），要求平移后的信号为$f(y(t)+b)$，则可先如前述地求出由$(y, f(y))$到$(y, f(y+b))$的平移变换的平移量，它是新的代换变量$y+b=0$这一方程的解，是波形在$y-f$平面上的平移量。由于我们最终需要的是图形$(t, f(y(t)+b))$而不是$(y, f(y+b))$，故还应进一步求出对应的$\varDelta t$，即$t-f$平面上的平移量。很明显，$\varDelta t$依然应满足新的代换变量的方程，即应有

$$y(\varDelta t)+b=0 \tag{9}$$

这就是一般情况下的平移量方程

3. 信号波形的水平展缩

信号波形的水平展缩也可视为一变换。如水平展缩前后信号分别为 $f(t)$ 和 $f(xt)$，$(\alpha>0)$，则对应的变换 T_α 为

$$T_\alpha(t,f(t))=(t,f(\alpha t)),\ \alpha>0 \tag{10}$$

信号波形水平展缩的比例是好确定的：

当 $\alpha=1$ 时，信号波形无展缩（尺寸不变）；

当 $\alpha>1$ 时，信号波形水平压缩 α 倍（以有限时长信号为例，展缩后长度为展缩前长度的 $\frac{1}{\alpha}$)。

当 $\alpha<1$ 时，信号波形水平放大 $\frac{1}{\alpha}$ 倍。

问题的关键在于应以什么样的直线作为水平展缩的基准线。

很明显，$t\neq0$ 不能作为水平展缩的基准线之横标，因为除了 $\alpha=1$，即不需展缩的特殊情况以外，都恒有

$$(t,f(t))\neq(t,f(\alpha t))$$

只有 $t=0$ 处在水平展缩变换下保持不变，即

$$T_\alpha(0,f(0))=(0,f(\alpha\cdot0))=(0,f(0))$$

故此时水平展缩基线是方程 $t=0$。

如水平展缩前的信号不是 $f(t)$ 而是 $f(y(t))$（在作本步水平展缩之前已作过某种线性变量代换），展缩后的信号要求为 $f(\alpha y(t))$，则此时对应的将是 $y-f$ 平面上的水平展缩。按前述其展缩基线方程为 $y=0$。由于我们最终需要的不是图形 $(y,f(\alpha y))$ 而是图形 $(t,f(\alpha y(t)))$，故还应进一步在 $t-f$ 平面上求出相应的展缩基线。此基线之时间（横）坐标当然依旧应满足方程

$$y(t)=0 \tag{11}$$

这就是一般情况下的水平展缩之基准线方程。

信号波形的一般的线性变量代换可分解而视为折迭、平移和水平展缩等三种基本变的换组合。按三者安排次序的不同，有 $3!=6$ 种组合方式。如果不清楚以上的规律，在作完第一步后，第二步、第三步就往往容易出错。

为以资对照，依然以例 1 题为例。其作图程式有六种可能，以下只列出其中三种，余可类似得出。

例 2 $f(t)$ 的波形如图1(a)，用作图法求 $f(-2t-4)$。

其作图过程如图1(a)、(b)所示。注意，如不清楚代换规律，则往往容易在作图中产生以下错误：(1)、将图2(a)、(b)的二、三步画成图2(d)；(2)、将图2(a)、(b)的第三步画成图2(e)；(3)、将图 2(c)的第三步画成图 2(f)。另外，在作图中应该水平压缩的反弄成了水平放大也是粗心者易犯的毛病。在无解析式子可以对照的情况下，如不明白本文所列缘由，还往往难于说清这些错误的症结之所在。

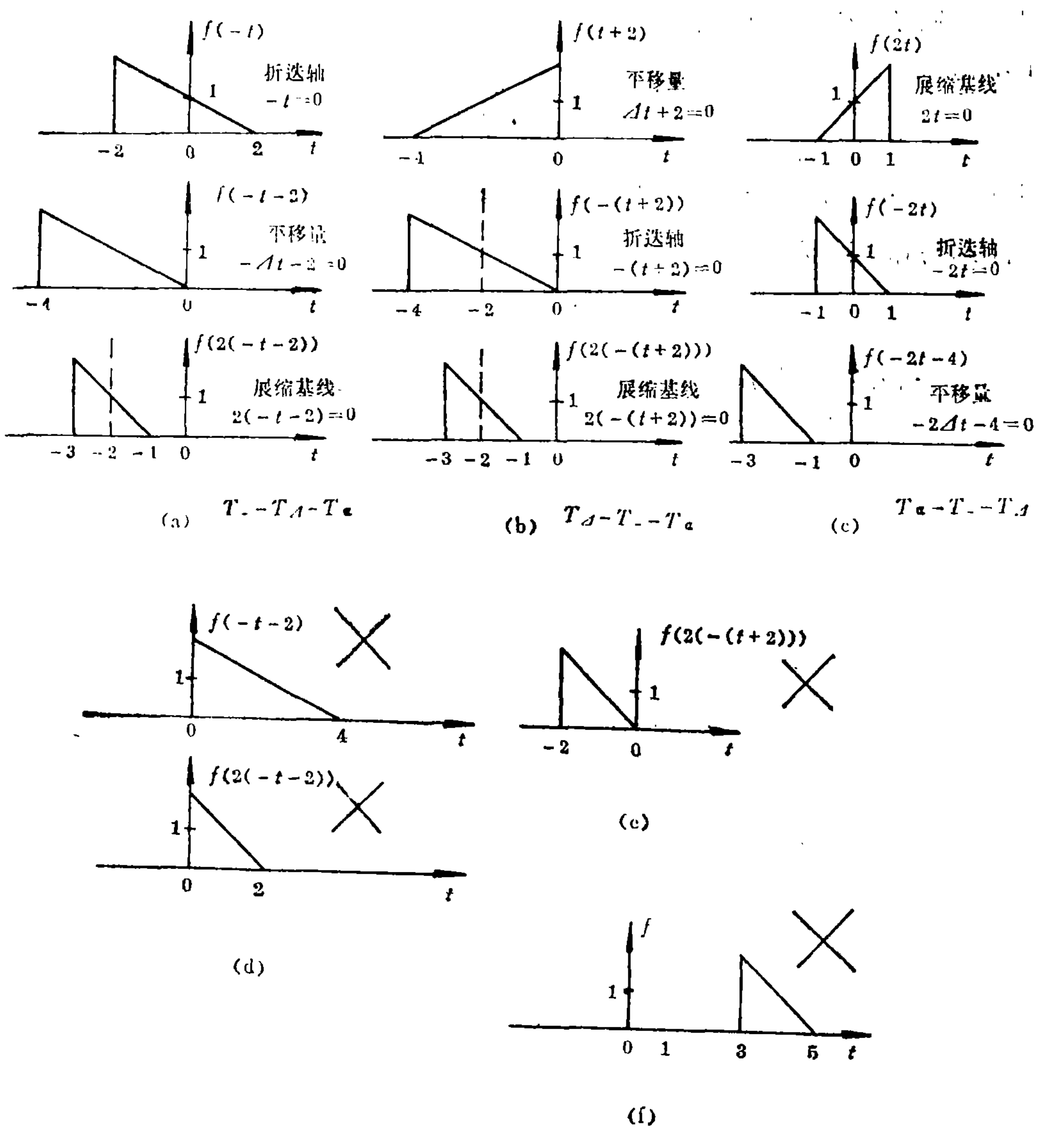

图 2

四、结 束 语

如果信号的函数形式已知，其变量的线性代换可通过将原函数式中所有的 t 全部换成 $at+b$ 而完成，应该记住的是定义域不等式中的所有的 t 也应代换。

如信号的函数形式不好确定，或很复杂，其变量的线性代换需要采用作图的方法。一般而言，作图可分三步，其可能程式有六种，关鍵在于正确定出折迭轴、水平展缩基线及平移量，本文找出了一般情况下三者的方程(7)、(9) 和 (11)。通常容易产生错误的原因就在于总把折迭轴和水平展缩基线固定在纵轴，总把平移量固定为 $-b$。按以上三方程，就无论采用哪一种作图程式都可确保不产生由于上述原因引起的差特。

信号线性变量代换规律的掌握，在付氏变换延迟特性与展缩特性的结合应用中将会

提供好处。比如当已知$f(t)$的频谱$F(\omega)$求$f(at+b)$的频谱时，经常会将延迟相位因子弄错。正确结果是

$$\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)e^{j\frac{b}{a}\omega}$$

因为平移量方程为$a\Delta t+b=0$，从而$\Delta t=-b/a$，而延迟相位为$\phi(\omega)=\Delta t\cdot\omega$，于是最后得延迟相位因子为$e^{-j\phi(\omega)}=e^{j\frac{b}{a}\omega}$。

Linear Replacement of the Argument for Signals

Luo Yongguang