国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八五年第四期　总第五十二期　No.4　1985　Sum.52

固体推进剂的粘弹性损伤分析及有关理论探讨

（中文摘要）

研究生　沈怀荣
导师　周明鸿教授

作为一种燃料，复合固体推进剂（以下简称推进剂）为火箭提供巨大的动力。由推进剂制成的药柱必须有足够的强度和耐久性，以防止在贮存、运输及运行过程中发生破损。因此，在药柱的研制、设计中需要了解和掌握推进剂的力学性能，进行各种工况下药柱的结构完整性分析以及作必要的强度、刚度或稳定性计算和寿命预测。

推进剂材料是由高分子基体和固体颗粒（含量86～90%）混合而成，其力学性能依赖于时间、温度及加载和变形历史。在变形过程中还伴随有微孔穴、微裂纹的萌生、演变、聚结以及分子链、鍵断裂等损伤现象，其宏观表象相当复杂。对这类材料的力学性态进行理论和实验研究，不仅对发展生产有现实意义，对于开拓非线性粘弹力学和連续损伤力学等学科更具有重要的理论意义。

本文基于不可逆热力学和連续损伤力学的基本原理，分别引入粘性內变量和损伤內变量，推导了非线性粘弹损伤介质的一般本构关系。采用二阶损伤张量，提出了一种对称有效应力张量和损伤效果张量的表征方法。根据推进剂损伤的微观观测结果和工程简化分析的需要，进一步建立了简化的本构方程，并建立了定速拉伸和定载蠕变时的损伤演变方程。

通过一系列实验研究，获得了材料参数，并对所提理论进行了检验。

一、粘弹损伤介质本构关系的理论推导

为了描述粘滞与损伤两种不同的耗散机制，分别引入粘性內变量向量$\boldsymbol{Q}$和二阶损伤张量Ω。$\boldsymbol{Q}=\{q_1 q_2\cdots q_m\}^t$，用于表征材料的粘滞特征(如分子构象的变化)；$\Omega=[\omega_{ij}]$，表征微缺陷（如微孔穴、微裂纹）的演变。通过将Gibbs自由焓 $G=\hat{G}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{Q},\Omega,\boldsymbol{T})$代入热力学第二定律，并定义：

一九八五年十一月十五日收到

$$X=\rho_0\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{Q}} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{Y}=\rho_0\frac{\partial G}{\partial \Omega} \tag{2}$$

可得

$$\varepsilon=\rho_0\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{3}$$

$$\varepsilon=\frac{\partial G}{\partial T} \tag{4}$$

$$\phi=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Y}\cdot\dot{\Omega}-\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{g}/T\geqslant 0 \tag{5}$$

上列式中，$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{h}$，$\boldsymbol{g}$，ρ_0，η，T分别为Cauchy应力张量、Cauchy 应变张量、热流向量、温度梯度向量、质量密度、熵函数及绝对温度。ϕ表示总能量耗散率，右边第一项为粘滞耗散，X代表与$\boldsymbol{Q}$相应的粘滞能量耗散率向量；第二项为损伤耗散，$\boldsymbol{Y}$代表与Ω相应的损伤能量释放率张量；第三项为热耗散。从(1)到(5)式可见，只要选择合适的函数G和ϕ，即可决定本构方程和内变量演变方程。

在未受损伤的区域，材料具有线粘弹特征，因此仍采用熟知的热力学线性表象定律和Onsager原理来表征粘性内变量的演变规律，即

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{Q} \tag{6}$$

且

$$\boldsymbol{B}^t=\boldsymbol{B}$$

在损伤区，根据连续损伤力学的基本概念，Cauchy应力张量可改用有效应力张量$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$代替。有效应力张量一般可写成

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{M}(\Omega):\sigma \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{M}(\Omega)$为损伤效果张量，一般是Ω的四阶张量值函数。由于不同的理论上的简化，可缩并成二阶或零阶张量。

在等温条件下，Gibbs自由焓可表示为

$$\rho_0 G=\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^t:\boldsymbol{A}:\tilde{\boldsymbol{\sigma}}+\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{Q}-\frac{1}{2}\boldsymbol{Q}^t\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{Q}+f(\Omega) \tag{8}$$

其中$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{C}$分别为四、三、二阶与温度相关的材料常数张量，$f(\Omega)$ 是张量Ω的标量值函数。

对于多轴应力状态和各向异性损伤的一般情形，选用正则坐标系描述粘性内变量，则将(8)代入(1)和(3)式，并利用(6)和(7)，分别定义有效应变张量$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$和蠕变柔量张量分量$J_{ijkl}$为

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=(\boldsymbol{M}^t)^{-1}:\boldsymbol{\varepsilon} \tag{9}$$

$$J_{ijkl}=a_{ijkl}+\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{d_{ij\alpha}d_{kl\alpha}}{c_\alpha}\left(1-e^{-\frac{c_\alpha}{b_\alpha}t}\right) \tag{10}$$

我们得到非线性粘弹积分蠕变型本构关系的一般形式：

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}=\int_{-\infty}^{t} J_{ijkl}(t-\tau)\frac{\partial \tilde{\sigma}_{kl}(\tau)}{\partial \tau}d\tau \tag{11}$$

当材料中无损伤时，(11)式简化成线粘弹材料的本构方程；如果又无粘性时，该式就简化成弹性材料的本构关系。

为了避免不对称的有效应力张量给结构分析时带来的困难，本文建议下述方法：

首先在应力主轴坐标系中，由微元件平衡条件得到有效应力张量，

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{*}=\boldsymbol{\sigma}^{*}\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Omega}^{*})^{-1}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Omega}^{*})^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{*} \tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}^{*}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{T}^{t})=\begin{bmatrix} T_{1k}\omega_{kl}T_{1l} & & 0 \\ & T_{2k}\omega_{kl}T_{2l} & \\ 0 & & T_{3k}\omega_{kl}T_{3l} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$\boldsymbol{T}=[T_{ij}]$为从原坐标系到应力主轴坐标系间的转换张量。

返回原坐标系中时，即得：

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{T}^{t}\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{*}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{M}'\boldsymbol{\sigma} \tag{14}$$

其中

$$\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{T}^{t}\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Omega}^{*})^{-1}\cdot\boldsymbol{T} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{T}^{t}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{*}\cdot\boldsymbol{T} \tag{16}$$

当仍采用(7)式的形式时，则取

$$M_{ijkl}=M'_{ik}\delta_{jl} \tag{17}$$

不难证明，(14)式的有效应力张量是对称的。

二、推进剂本构方程与损伤演变方程的建立

在拉伸条件下，用扫描电镜对推进剂进行了微观观测和分析。推进剂未受力时，其中的固体颗粒分布和取向都是随机的和均匀的，从唯象角度可把推进剂看成均匀、连续、各向同性的粘弹介质；在损伤过程中，微缺陷尺寸量级在$10^{-3}\sim10^{-1}$mm之间变化，其中以发生在颗粒周围的脱湿微孔穴为主。对这类损伤，可用标量变量来表征（在一定尺度的单元内平均）。根据固体颗粒和微缺陷的尺寸，在测量局部变形时，取单元尺寸为3mm左右。

对各向同性材料，蠕变柔量张量只有两个独立的材料函数，可写成：

$$J_{ijkl}=[\delta_{ki}\delta_{jl}+\nu(t)(\delta_{ki}\delta_{jl}-\delta_{ij}\delta_{kl})]J(t) \tag{18}$$

其中δ_{ij}为Kroneker符号，$J(t)$为单轴蠕变柔量，$\nu(t)$为泊松比。将(18)式代入(11)得

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}=\int_{-\infty}^{t}\Gamma(t-\tau)\frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}(\tau)}{\partial\tau}d\tau-\delta_{ij}\int_{-\infty}^{t}K(t-\tau)\frac{\partial\tilde{\sigma}_{I}(\tau)}{\partial\tau}d\tau \tag{19}$$

其中$\Gamma(t)=[1+\nu(t)J(t)$，$K(t)=\nu(t)J(t)$，$\tilde{\sigma}_{I}=\tilde{\sigma}_{11}+\tilde{\sigma}_{22}+\tilde{\sigma}_{33}$。

采用标量时，(7)和(9)式简化成

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}&=\sigma/(1-\omega)\\ \tilde{\varepsilon}&=\varepsilon(1-\omega)\end{aligned} \tag{20}$$

根据实验结果，分别建立了蠕变和定速拉伸两种情况下的损伤演变方程。对于单轴蠕变，损伤演变速度为

$$\dot{\omega}=\begin{cases}(1-\omega)^{1-\beta}g(\sigma,T)/\beta & \varepsilon>\varepsilon_M>\varepsilon_d \\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{21}$$

其中β，ε_d，$g(\sigma,T)$为温度、应力、相关的材料参数。$g(\sigma,T)$由单轴蠕变破断实验确定，β由蠕变损伤测定结果确定。ε_M为应变史上的最大应变。

多轴情况下，需将单轴应力σ换成当量应力σ^*，

$$\sigma^*=\sqrt{2(1+\nu)\langle s_{\text{I}}\rangle+\frac{1-2\nu}{3}\langle\sigma_I\rangle^2} \tag{22}$$

其中 $\langle s_{\text{I}}\rangle=[(\langle\sigma_1\rangle-\langle\sigma_2\rangle)^2+(\langle\sigma_2\rangle-\langle\sigma_3\rangle)^2+(\langle\sigma_3\rangle-\langle\sigma_1\rangle)^2]/6$

$\langle\sigma_I\rangle=\langle\sigma_1\rangle+\langle\sigma_2\rangle+\langle\sigma_3\rangle$

对于单轴定速拉伸时，损伤演变速度为

$$\dot{\omega}=\begin{cases}\gamma(\varepsilon_u-\varepsilon_d)\left(\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_d}{\varepsilon_u-\varepsilon_d}\right)^{\gamma-1}\dot{\varepsilon} & \varepsilon>\varepsilon_M>\varepsilon_d \\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{23}$$

其中γ，ε_u、ε_d为材料参数，由实验确定。同样，在多轴情况下，需将ε换成当量应变ε^*，

$$\varepsilon^*=\sqrt{\frac{1}{1+2\nu^2}[2\nu\langle\varepsilon_{\text{I}}\rangle+(1-2\nu+2\nu^2)\langle\varepsilon_I\rangle^2]} \tag{24}$$

其中

$$\langle\varepsilon_{\text{I}}\rangle=\langle\varepsilon_1\rangle^2+\langle\varepsilon_2\rangle^2+\langle\varepsilon_3\rangle^2 \tag{25}$$

$$\langle\varepsilon_I\rangle=\langle\varepsilon_1\rangle+\langle\varepsilon_2\rangle+\langle\varepsilon_3\rangle \tag{26}$$

三、结构分析的有限元算法及程序制定

为了检验上述理论和分析工程中复杂的粘弹结构，需要进行相应的算法研究。

以平面问题为例，采用增量法及八结点等参单元和2×2高斯积分方案，编制了粘弹结构的有限元分析程序。

四、实验研究及材料参数确定

通过单轴定应力蠕变实验，得到用一般Kelvin模型元件表达的蠕变柔量为

$$J(t)=[58.82+20.54(1-e^{-2t})+6.875(1-e^{-0.2t})$$
$$+20.58(1-e^{-0.02t})+15.64(1-e^{-0.004t})]10^{-9}M^2/N$$

泊松比的测定是通过定速拉伸时测量纵横向应变而得到的。变形较小时，$\nu\approx0.45$。

为了获得定速拉伸损伤演变方程中的材料参数，进行了定速加载-卸载实验，得到：

$$\varepsilon_u=0.56,\ \varepsilon_d\approx0,\ \gamma=0.68$$

式(21)中，未知函数$g(\sigma,T)$可通过单向定载蠕变破断实验确定。即有

$$g(\sigma,T)=1/t_R(\sigma,T)$$

其中$t_R(\sigma,T)$为破断时间。

在常温时(29℃)，蠕变破断曲线为

$$\mathrm{Ln}(t_R)=A_0-A_1\sigma \tag{29}$$

考虑温度影响时，可表为

$$\frac{\mathrm{Ln}(t_R)-C}{1/T-1/T'}=B_0-B_1\sigma \tag{30}$$

上两式中，A_0，B_0，A_1，B_1，C，T'均为材料常数。

通过双向定载蠕变实验，初步检验了当量应力σ^*的有效性。

五、理论计算与实验结果的比较及星孔药柱分析算例

使用所编的有限元程序，对若干试件进行了理论分析。对于定速拉伸，最大应力处应变的非线性粘弹理论预测与实验结果之间偏差约为5%，而按线粘弹理论预测时，偏差约54%；对定载蠕变，接近破断时，应变的非线性理论预测与实验偏差约2～16%，而按线性理论，偏差约31%。

对开孔板受双向定载拉伸试验的分析结果表明，非线性理论预测与实验结果偏差约9%。

上述结果表明，考虑损伤效应的非线性粘弹理论能较好地表征推进剂材料的非线性粘弹特性。

对在内压和自重作用下的八星孔药柱分别进行了分析，按非线性理论预测的应变比线粘弹理论预测值约高19.8～22.7%。

六、几 点 结 论

1． 直到推进剂试件拉伸破断前，材料中的微缺陷尺度变化在10^{-3}至10^{-1}mm之间。

2． 本文提出的建立损伤介质本构方程和表征对称有效应力张量的方法应用方便。

3． 通过实验研究结果与理论计算结果的比较和星孔药柱的分析算例，检验了所建立的本构方程、损伤演变方程及结构有限元算法。初步表明：本文方法能较好地表征损伤推进剂材料的非线性粘弹特征；所编程序可以方便地分析工程中复杂的粘弹结构。

Viscoelasticity Damage Analysis for Solid Propellants and Some Research on Relative Theory

Shen Huairong   Chow Mingxi