

关节倒摆的数字控制

陈 湧

提 要 关于倒摆控制, 早就引起了自动控制专家们的重视, 目前大都采用车—摆结构。本文作者对另一种结构的倒摆——关节倒摆的数字控制的有关问题进行了研究, 实现了关节倒摆在 up-up 和 down-up 两种典型状态下的计算机实时稳定控制和 down-up 系统摆上的计算机控制。文中给出了实验结果。

一、引 言

倒立摆系统的控制早在六十年代就引起了国外的重视。特别是 K. Furuta 等人从 1976 年开始对倒摆的控制问题进行了深入的研究, 先后实现了单倒摆的模拟稳定控制和采用 bang-o-bang 控制规律的摆上 (Swinging-up) 计算机控制 (1976); 二级倒摆的计算机稳定控制 (1978); 二级倒摆在倾斜导轨上位置的计算机控制 (1980)。在 1983 年又实现了三级倒摆的计算机稳定控制。又有 Mansour 和 Schaufelberger 也实现了单倒摆的摆上计算机控制 (1981), 所采用的是 bang-bang 控制加上非线性反馈的控制规律。以上各位专家所采用的实验模型为车—摆结构。而且, 对倒摆的控制也由模拟电路, 发展到利用计算机, 从控制手段上来说更为先进了。

国内对倒摆的控制问题的研究也早就引起了重视, 但从目前情况来看, 有必要对这一实验装置继续完善, 进行进一步的研究。而且, 倒摆控制问题的研究除了可以作为自动控制教学的一部分内容, 具有理论意义外, 还有一定的工程意义。

根据上述情况, 作者对倒摆的数字控制的有关问题进行了研究, 所采用的实验模型是关节倒摆*。这种倒摆的设计有其独到之处, 与车—摆模型比起来, 关节倒摆的结构更为简单, 从而造价更低, 占用场地更小, 同样具有所需要的动力学特性。

通过研究, 作者实现了关节倒摆在 up-up 和 down-up 两种典型状态下的计算机稳定控制和 down-up 系统摆上的计算机控制。

本文 1985 年 9 月 8 日收到

* 关节倒摆由国防科大 304 研究室设计。

二、关节倒摆的数学描述

图1所示的关节倒摆为双关节单级自由倒摆。它可以有四种平衡状态(图2),分别称作“down-down”状态(a),“down-up”状态(b),“up-down”状态(c),“up-up”状态(d)。其中,只有(b)、(d)两种状态杆 l_2 是处于倒立向上位置,对其进行控制具有典型意义。因此,作者研究了关节倒摆在这两种典型状态下的控制问题。

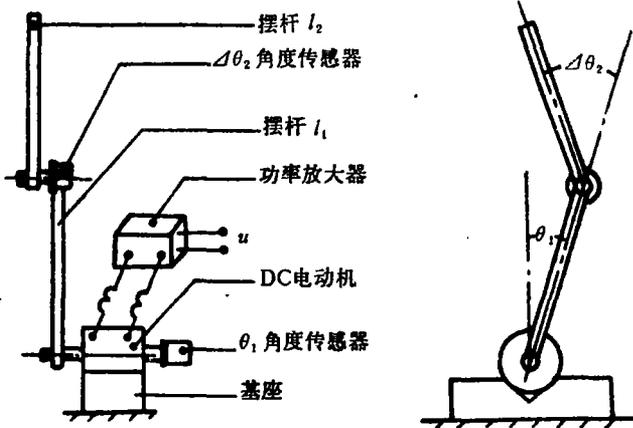


图1. 双关节单级自由倒摆

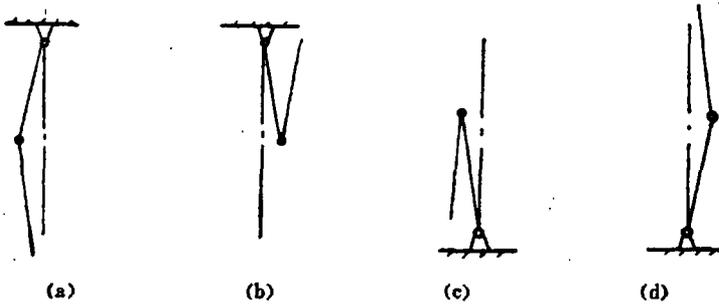


图2. 四种平衡状态

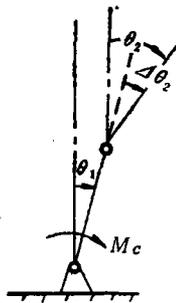


图3. up-up 状态

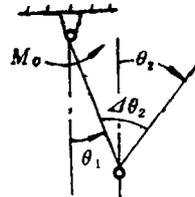


图4 down-up 状态

首先,对模型作如下假设:

- (1) 杆 l_1 和杆 l_2 为均质刚体。
- (2) 电机轴处的摩擦力矩与 $\Delta\theta_1$ 成比例; $\Delta\theta_2$ 传感器处的摩擦力矩与 $\Delta\theta_2$ 成比例。
- (3) 电机输出力矩 M_o 与控制电压 U 成比例, $M_o = K_T \cdot U$, K_T 为比例常数。

由图 3 和图 4 可得关节倒摆系统的动力学方程如下。

up-up 系统:

$$\left. \begin{aligned} 2a \cdot \Delta\theta_1 + c(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2)\cos\Delta\theta_2 - c \cdot \Delta\theta_1^2 \sin\Delta\theta_2 &= d\sin\Delta\theta_1 + K_T U - F_1 \Delta\theta_1 \\ 2b \cdot (\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) + c \cdot \Delta\theta_1 \cos\Delta\theta_2 + c \cdot \Delta\theta_1^2 \sin\Delta\theta_2 &= e\sin(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) - F_2 \Delta\theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

down-up 系统:

$$\left. \begin{aligned} (2a - c \cdot \cos\Delta\theta_2)\Delta\theta_1 + c \cdot \cos\Delta\theta_2 \cdot \Delta\theta_2 \\ = c(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1)^2 \sin\Delta\theta_2 - F_1 \Delta\theta_1 + d\sin\Delta\theta_1 + K_T U \\ (-2b + c \cdot \cos\Delta\theta_2)\Delta\theta_1 + 2b \cdot \Delta\theta_2 \\ = c \cdot \Delta\theta_1^2 \sin\Delta\theta_2 - F_2 \Delta\theta_2 + e\sin(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

方程 (2.1) 和 (2.2) 中系数为

$$a = \left(\frac{1}{6} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) l_1^2 + \frac{1}{2} J$$

$$b = \frac{1}{6} m_2 l_2^2$$

$$c = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2$$

$$d = \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 + m_3 \right) g l_1$$

$$e = \frac{1}{2} m_2 g l_2$$

式中,物理量的意义及大小参阅表 1.

表 1 关节倒摆系统物理参数

l_1 下杆长度	0.35 m
l_2 上杆长度	0.345 m
m_1 下杆质量	0.06024 kg
m_2 上杆质量	0.05851 kg
m_3 测 $\Delta\theta_2$ 的角度传感器质量	0.07143 kg
J 电机轴等效转动惯量	0.000567 kg·m ²
K_T 电动机电压—力矩比例系数	0.2 N·m/V
F_1 电机轴处等效摩擦系数	0.0348 kg·m ² /s
F_2 $\Delta\theta_2$ 传感器处等效摩擦系数	0.0005 kg·m ² /s
g 重力加速度	9.8 m/s ²

在研究关节倒摆的稳定控制时,把方程(2.1)、(2.2)在系统的平衡点 $\Delta\theta_1=0$ 、 $\Delta\theta_2=0$ 处进行线性化,且略去 F_1 、 F_2 对系统的影响。取状态变量为

$$\mathbf{X}=(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\dot{\theta}_1, \Delta\dot{\theta}_2)'$$

则系统状态方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{C}\mathbf{X} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

其中, $\Delta = 4ab - c^2$

up-up 系统:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & & I_2 \\ \hline \frac{2bd - ce}{\Delta} & \frac{-ce}{\Delta} & 0 \\ \frac{2ae + ce - zbd - cd}{\Delta} & \frac{2ae + ce}{\Delta} & \end{array} \right)$$

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{2bK_T}{\Delta} \\ -\frac{(2b+c)K_T}{\Delta} \end{array} \right), \quad \mathbf{c} = [I_2 : 0]$$

down-up 系统:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & & I_2 \\ \hline \frac{2bd + ce}{\Delta} & \frac{-ce}{\Delta} & 0 \\ \frac{2bd - cd - 2ae + ce}{\Delta} & \frac{2ae - ce}{\Delta} & \end{array} \right)$$

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{2bK_T}{\Delta} \\ \frac{(2b-c)K_T}{\Delta} \end{array} \right), \quad \mathbf{c} = [I_2 : 0]$$

计算得:

up-up:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 29.367 & -11.093 & 0 & 0 \\ -31.448 & 70.582 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14.739 \\ -37.169 \end{bmatrix}$$

down-up:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 51.55 & -11.09 & 0 & 0 \\ -69.5 & 48.39 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14.739 \\ -7.689 \end{bmatrix}$$

三、控制器设计

1. 稳定控制律的设计

给出二次型性能指标

$$J_R = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + R U) dt \quad (3.1)$$

其中 Q 为半正定对称矩阵, R 为正数。

可以求出使 J_R 取极小值的最优控制及对应的闭环系统在 S 平面上的最优极点, 经 Z 变换后得到 Z 平面上对应的极点。这样, 离散系统的控制律为

$$U(n) = -K_d \cdot X(n) \quad (3.2)$$

式中 K_d 可由 Ackermann 公式求出。

$$K_d = (0, \dots, 0, 1) \cdot [B_d, A_d B_d, \dots, A_d^{n-1} B_d]^{-1} \cdot \alpha_d(A_d) \quad (3.3)$$

$\alpha_d(z)$ 为期望的离散闭环系统特征多项式。

$$A_d = e^{A^T}, B_d = \left\{ \int_0^T e^{A^t} dt \right\} \cdot B$$

2. 观测器的设计

系统只有 $X_1 = \angle \theta_1$, $X_2 = \angle \theta_2$ 可直接测量, 故引入最小阶观测器 (Gopinath) 如下:

$$\left. \begin{aligned} \dot{Z} &= \hat{A}Z + \hat{B}Y + JU \\ \hat{X} &= \hat{C}Z + \hat{D}Y \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

把(3.4)式离散化后得离散观测器方程

$$\left. \begin{aligned} Z(n+1) &= \hat{A}_d Z(n) + \hat{B}_d Y(n) + J_d U(n) \\ \hat{X}(n) &= \hat{C}_d Z(n) + \hat{D}_d Y(n) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

式中

$$\hat{A}_d = e^{\hat{A}^T}, \hat{B}_d = \left\{ \int_0^T e^{\hat{A}^t} dt \right\} \cdot \hat{B}, J_d = \left\{ \int_0^T e^{\hat{A}^t} dt \right\} \cdot J$$

在计算机中实现 (3.5) 就得到状态的估计值。

四、计算机实时控制实验

在系统实验中,计算机采用Z8000单板机(钟频4MHz,字长16位);数-模、模-数转换用ADA-1612转换板。A/D、D/A转换的有效位数均为12位;A/D转换的时间约为 $30\mu\text{s}$,D/A转换的时间约为 $5\mu\text{s}$ 。计算机实时控制系统连接如下图所示。

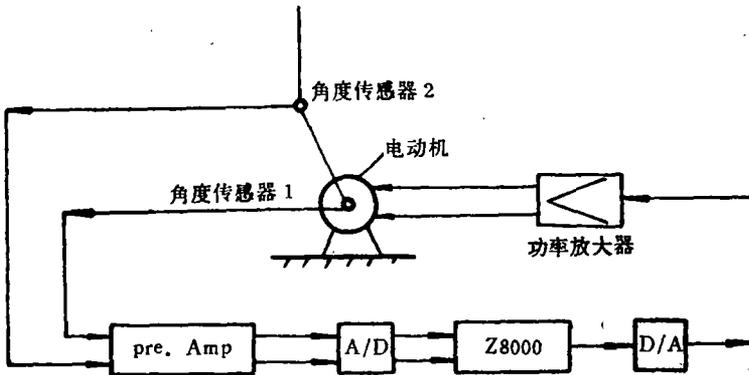


图 5. 计算机实时控制系统 (up-up 状态)

在用汇编语言编制实时控制程序时,作者深入地分析了系统的动态范围、信号的大小、数据运算的取值范围以及Z8000微处理机的汇编语言指令结构。对数据采用定点、补码运算,关键地方采用长字运算以减少数据运算过程中溢出的次数,从而减少了对溢出的处理次数,既保证了计算精度,又提高了程序运算速度,且使得采样周期“规格化”。实践证明:这样的处理方法是简便可行的。在汇编程序中,控制器所需要全部参数都可通过键盘修改,因此调试十分方便。

计算机实时稳定控制的汇编程序主要由START、SIGN、TRAS、LOOP、CTRL、OBSER、DELAY等程序段组成,其原理框图参阅图6,整个程序占内存不到0.5K字节(约400个字节)。

取采样周期 $T=0.8\text{ms}$,把观测器的极点(S平面)设置在 $-8, -8$ 处。则

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} I_2 \\ 8I_2 \end{bmatrix}$$

经数字模拟和实验调试,下面的参数使系统具有较好的稳定性能。

(1) up-up 系统

$$Q = \text{diag}(5, 1, 0.02, 0.02), \quad R = 1$$

$$K_a = -(20.19, 19.226, 5.095, 2.829)$$

$$\hat{A}_a = 0.993621 \cdot I_2,$$

$$\hat{B}_a = \begin{bmatrix} -0.02762 & -0.0088 \\ -0.025 & 0.00525 \end{bmatrix}, \quad \hat{J}_a = \begin{bmatrix} 0.001175 \\ -0.0296 \end{bmatrix}$$

图7给出了杆 l_2 受冲击干扰时的稳定控制实验曲线。从图中可以看出,在稳态时, $|\angle\theta_1| \leq 0.9^\circ$, $|\angle\theta_2| \leq 2.65^\circ$ 。

由实验知，稳定控制程序对实际系统参数的变化具有一定的适应性；随着采样周期的增加，关节倒摆的受控性能变差；另外，关节倒摆不只是能稳定在零状态附近，而且也能在较大范围内稳定。

(2) down-up 系统

$$Q = \text{diag}(20, 100, 1, 1), R = 1$$

$$K_d = (22.302, -30.676, 0.221, -4.438)$$

$$\hat{A}_d = 0.993621 \cdot I_2,$$

$$\hat{B}_d = \begin{bmatrix} -0.9928 \times 10^{-3} & -8.844 \times 10^{-3} \\ -0.0554 & -0.1245 \end{bmatrix}, \quad J_d = \begin{bmatrix} 0.01175 \\ -6.13 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

杆 l_2 受冲击干扰的实验曲线见图 8。

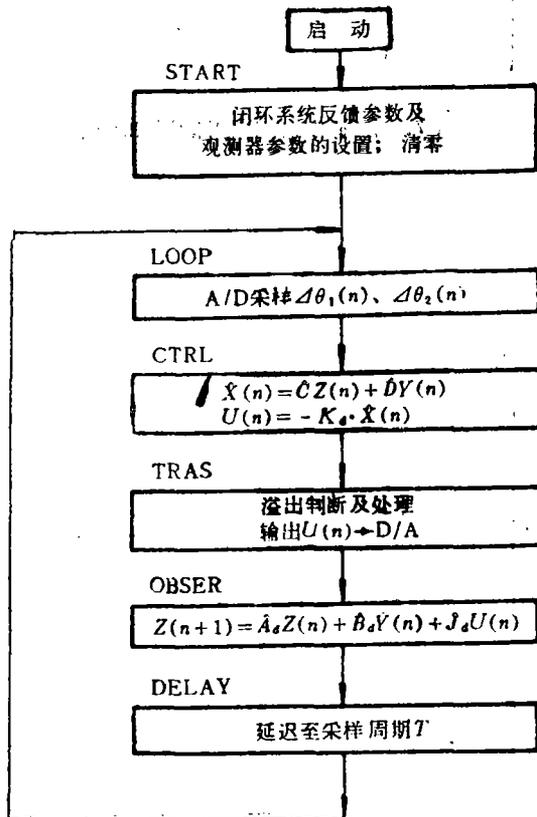


图 6. 实时控制程序框图

线型图 (Line Diagram)

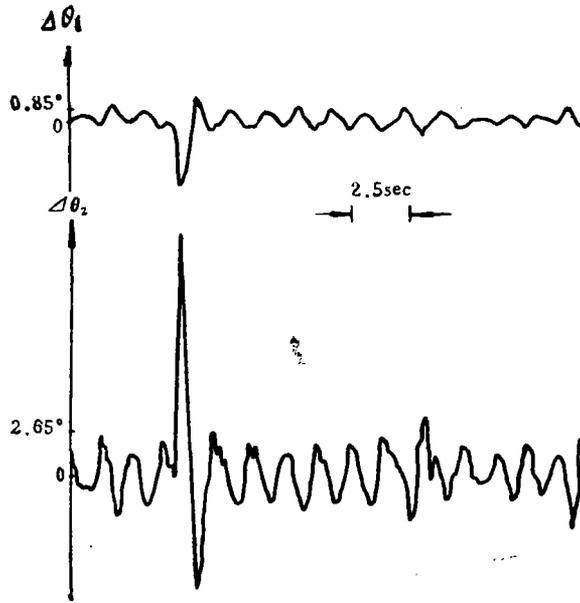


图 7. 杆 l_2 受冲击干扰时稳定控制曲线

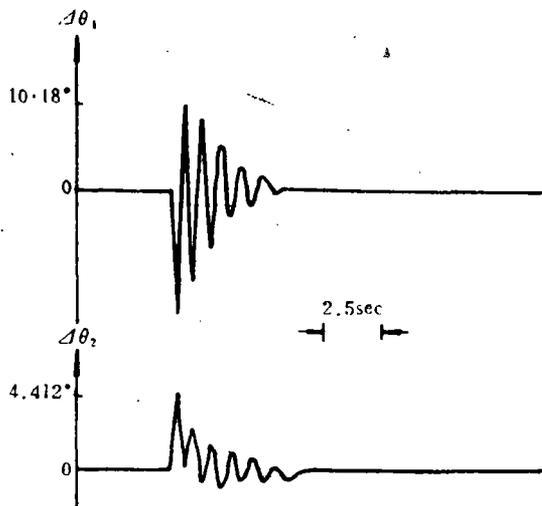


图 8. 杆 l_2 受冲击干扰时稳定控制曲线

五、down-up 系统的摆上控制

对关节倒摆系统，作者也研究了在 down-up 状态下的摆上控制问题。即：寻找控制函数 $U(t)$ ，把关节倒摆从初始的自然下垂位置(down-down状态)摆上成为 down-up 状态，然后切换稳定控制，使关节倒摆最终能稳定于 down-up 状态。从摆上控制的角度来说，只要能找到某个控制函数，把关节倒摆“摆上”即可。但为了避免冗余，这里采用时间最优控制来研究。即寻找一最优控制函数 $U^*(t)$ ，使关节倒摆从初始的 down-down 状态以最短的时间摆上成为 down-up 状态。

把方程 (2.2) 改写为：

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\theta}_1 \\ \Delta\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = f_0(\Delta\theta_2) \cdot \begin{bmatrix} 2b & -c \cdot \cos\Delta\theta_2 \\ 2b - c \cdot \cos\Delta\theta_2 & 2a - c \cdot \cos\Delta\theta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c(\Delta\dot{\theta}_2 - \Delta\dot{\theta}_1)^2 \sin\Delta\theta_2 - F_1 \cdot \Delta\dot{\theta}_1 + d \sin\Delta\theta_1 + K_T U \\ c\Delta\dot{\theta}_1^2 \sin\Delta\theta_2 - F_2 \cdot \Delta\dot{\theta}_2 + e \sin(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

式中 $|U(t)| \leq U_0 = 2.5V$

$$f_0(\Delta\theta_2) = (4ab - c^2 \cdot \cos^2\Delta\theta_2)^{-1}$$

令 $X = (\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\dot{\theta}_1, \Delta\dot{\theta}_2)^T$
 则 $\dot{X} = f(X, U)$ (5.2)

$$f_1 = x_3$$

$$f_2 = x_4$$

$$f_3 = f_0(x_2) \cdot 2bK_T U + (\text{不包括 } U \text{ 的项})$$

$$f_4 = f_0(x_2) \cdot (2b - c \cdot \cos x_2) \cdot K_T U + (\text{不包括 } U \text{ 的项})$$

我们希望把系统以初态

$$X(0) = (0, -\pi, 0, 0)^T \quad (5.3)$$

以最短时间转移到终态

$$X(t_f) = 0 \text{ 或 } \|X(t_f)\| \leq \varepsilon \quad (5.4)$$

ε 为给定正数

引入性能指标

$$J_{t_f} = \int_0^{t_f} 1 \cdot dt = t_f \quad (5.5)$$

最优控制 $U^*(t)$ 使 J_{t_f} 取极小值。

令哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H(X, P, U) &= 1 + P^T \cdot f(X, U) \\ &= f_0(x_2) \cdot K_T \cdot [2b p_3 + (2b - c \cdot \cos x_2) p_4] U \\ &\quad + (\text{不包括 } U \text{ 的项}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

其中， $\dot{P}(t)$ 为伴随函数，满足伴随方程

$$\dot{P}(t) = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad (5.7)$$

由极大值原理得

$$U^*(t) = -U_0 \cdot S_{gn}\{K_T \cdot f_0(x_2) \cdot [2bp_3 + (2b - c \cdot \cos x_2)p_4]\} \quad (5.8)$$

即最优控制是 bang-bang 控制。

对于 bang-bang 控制这样一种控制函数，如果我们知道控制量的初始值以及各开关时间，那么我们的问题就解决了。不幸的是，这些都不知道。由式(5.6)，(5.7)，(5.8)可以看出，要求出 $U^*(t)$ 的解析解是非常困难的，或几乎是不可能的。事实上，当 $n \geq 3$ 时，要想求出开关超曲面几乎是不可能的。因此，采用试探法进行数值仿真，先求出 $U^*(t)$ 的初步分析值，然后再经试验修正，最后得出一组可以实现摆上控制的参数如下：

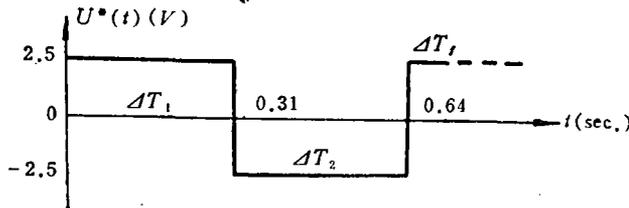


图 9

图 9 为摆上控制函数 $U^*(t)$ ，其中 ΔT_i 为“等待时间”，在此时间内，如果系统状态已达到给定精度，就转接稳定控制。由图可知，只要两次开关就可以使摆进入 down-up 稳定区域。

图 10、图 11 给出了摆上控制的物理过程示意图和实测曲线，而实现摆上控制的程序框图则如图 12 所示。

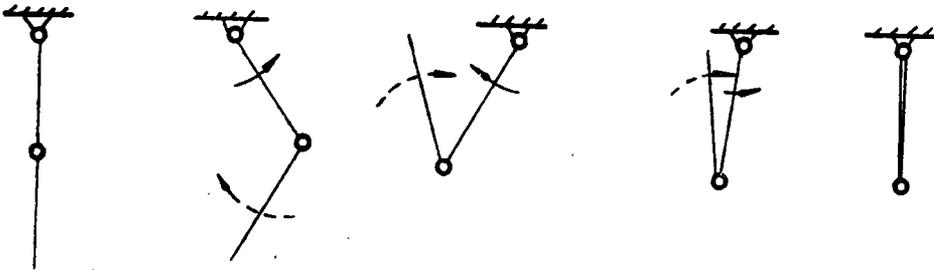


图 10

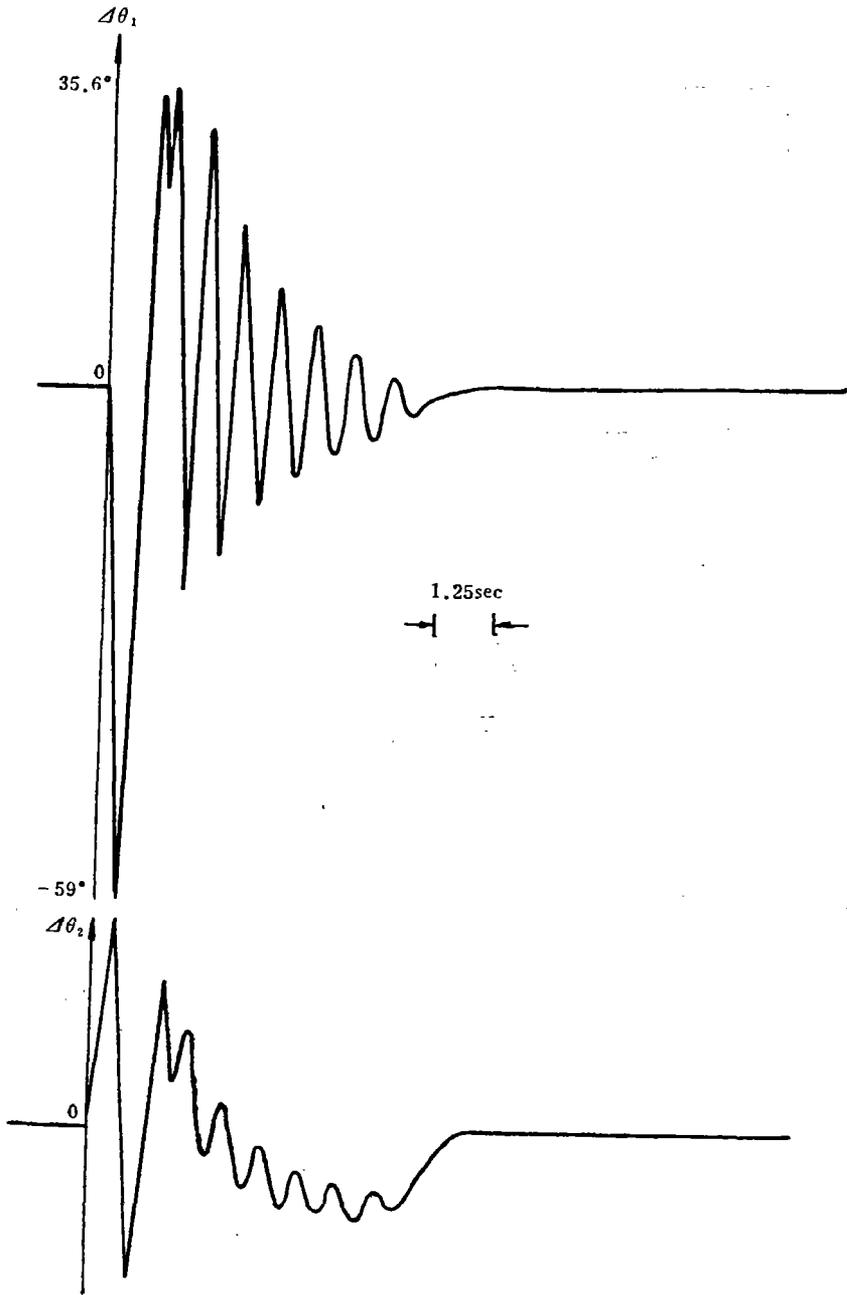


图 11

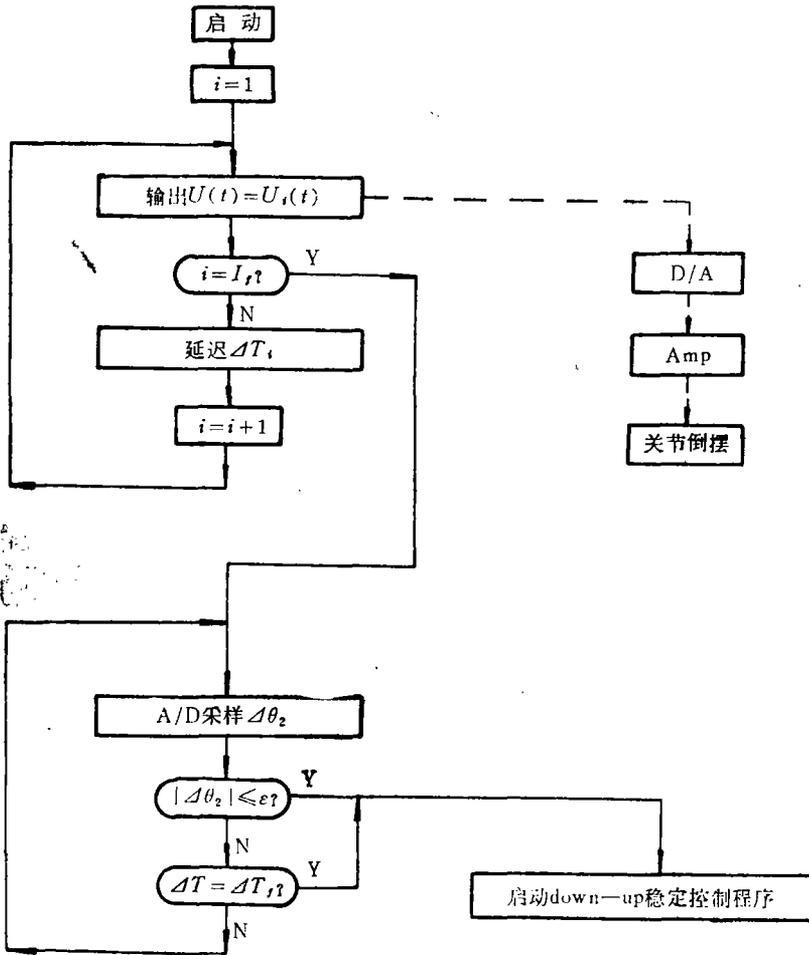


图 12

六、结 束 语

本文通过对关节倒摆数字控制系统有关问题的研究,实现了关节倒摆的稳定控制和摆上控制。作者认为,该装置可以作为一个完整的现代控制理论和数字控制的教学实验模型。

参 考 文 献

- [1] S. Mori, H. Nishihara and K. Furuta, Control of Unstable Mechanical System — Control of Pendulum, Int. J. Control, 1978, Vol. 23, No. 5, P. 673~692.
- [2] K. Furuta, T. Okutani and H. Sone, Computer Control of a Double Inverted Pendulum, Comput. & Elect. Engng., 1978, Vol. 5, P. 67~84.
- [3] M. Mansour and W. Schaufelberger, Digital Computer Control Experiments in the Control Group of ETH-ZUERICH, IFAC 1981年大会 <自动控制与教学> (论文集).

- [4] K. Furuta, T. Chikado and H. Kajiwara, Computer Aided Design and Computer Control Using Minicomputer, IFAC Computer Aided Design, 1982, P. 425~429.
- [5] G. F. Franklin and J. D. Powell, Digital Control of Dynamic Systems, 1980.
- [6] 张彭, 单级自由倒摆稳定系统, 国防科大校庆三十周年学术报告会 <论文选编>, 1983.

Digital Control of Joint Inverted Pendulum

Chen Yong

Abstract

The investigation about the problem of the control of the inverted pendulum was seriously made by the experts in automatic control early. The structure of cart-pendulum is mostly adopted nowadays. The author has studied some problems of digital control of joint inverted pendulum, another structure of the inverted pendulum, and implemented the computer stable control of joint inverted pendulum in two typical states and the computer control of Swinging-up. The experimental results are presented.