

块对角主元法的并行计算

李晓梅 何新芳

提 要 本文给出块对角主元法的并行计算,证明了用这种方法分解矩阵是稳定的。同时编制了向量 FORTRAN 程序,在向量机上进行了数值试验。计算结果表明:当 $n > 100$ 时,向量计算比标量计算快 10 倍以上。

一、前 言

解系数矩阵为 n 阶对称方阵的线性代数方程组

$$AX = B$$

的直接解法中,有高斯消去法、乔利斯基分解法、三对形因式分解法、对角主元法等。关于这些方法的稳定性、运算量和所需的存储空间, Bunch 和 Parlett^[1] 给出了分析,我们在表 1 中列出了综合结果。

众所周知,一个实的、对称正定矩阵 A 具有唯一的三角分解:

$$A = MDM^T \quad (1.1)$$

其中 M 是单位下三角矩阵, D 是对角矩阵。在这种分解下,乔利斯基法和三对形因式分解法运算速度最快、稳定并保持对称性。但当 A 不稳定时,即使 A 对称,分解式(1.1)也不总存在。如果存在,也会产生不精确的结果,在这种情况下,采取的补救办法是:

(1) 决定一个交换矩阵 P , 使

$$P^T AP = MDM^T \quad (1.2)$$

但这种办法对某些特殊矩阵也会失效;

(2) 一般情况下,采用高斯主元消去法,但这样体现不出 A 的对称性优点,而且运算量大。

1965年, W·Kahan 考虑了二种对角主元法,一种是使用 $m_0 = \max_{i,j,k} \{A_{i,i}^2, |A_{j,j}A_{k,k} - A_{j,k}^2|\}$ 搜索整个矩阵,如果 $m_0 = A_{i,i}^2$, 则将 $A_{i,i}$ 作为 1×1 主元块,并交换第 1 和第 i 行和列。如果 $m_0 = |A_{j,j}A_{k,k} - A_{j,k}^2|$, 则将 $\begin{bmatrix} A_{j,j} & A_{j,k} \\ A_{j,k} & A_{k,k} \end{bmatrix}$ 作为 2×2 主元块,并交换第 1 与第 j 行和列,第 2 与第 k 行和列。但这样做比高斯全选主元消去法用的乘法多。Kahan 考虑的第二种方法是仅对第一列和主对角线元素进行搜索,即使用 $mp = \max_{i,j}$

$\{A_{i,i}^2, |A_{i,i}A_{j,j} - A_{j,j}^2|\}$, 这样做, 乘法次数大大减少, 但它并非对所有矩阵都稳定, 例如对矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{2} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \frac{\varepsilon}{2} & 1 \\ \varepsilon & 1 & \frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix}$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$, 按 Kahan 第二种方法做, 得到 2×2 主元块为:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{2} & \varepsilon \\ \varepsilon & \frac{\varepsilon}{2} \end{bmatrix}$$

而减缩矩阵元素当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时是无界的。

为了克服上述方法的缺点, Bunch 和 Parlett^[1]设计了一种新的块对角主元法, 其优点是稳定, 保持对称性。从串行计算角度看, 它比局部主元高斯消去法快了近一倍; 而稳定性却和局部选主元高斯消去法一样好; 运算速度几乎和乔利斯基法一样快。

本文在串行计算基础上, 设计了一种并行块对角主元法, 并在向量机上进行了数值试验, 其试验结果在第五部分给出, 其 $f(n)$ 在第四部分给出。

表 1 解 $AX=B$ 的各种串行方法比较

方法	A的限制	乘法次数	加法次数	比较次数	存贮量	元素增长界
全主元高斯消去法	$\det A \neq 0$	$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n - \frac{5}{6}n$	$n^2 + 3n$	$< \sqrt{n} f(n)$
部分主元高斯消去法	$\det A \neq 0$	$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$	$\frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{2}n$	$n^2 + 2n$	2^{n-1}
乔利斯基法	对称正定	$\frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{8}n$	$\frac{1}{6}n^3 + n^2 - \frac{7}{6}n$	0	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$	1
三对角形法	对称 $\det A \neq 0$	$\leq \frac{1}{8}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$	$\frac{1}{8}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{11}{6}n$	$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{2}n$	$< 2^{2n-4} (n \geq 3)$
对角主元法	对称 $\det A \neq 0$	$\leq \frac{1}{6}n^3 + \frac{7}{4}n^2 - \frac{n}{6}$	$\leq \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{4}n^2 - \frac{5}{3}n + \frac{1}{4}$	$\leq \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{8}n$ $\geq \frac{1}{12}n^3 + \frac{3}{8}n^2 + \frac{1}{8}n$	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$	$< 3nf(n)$

二、串行的块对角主元法概述

给定一个对称矩阵 A , 首先选一个 $S \times S$ ($S=1$ 或 $S=2$) 阶子矩阵 E , 使 A 分块如下:

$$A = \begin{bmatrix} E & C^T \\ C & B \end{bmatrix}$$

其中 C 是 $(n-S) \times S$ 阶矩阵, B 是 $(n-s)$ 阶方阵, 而 E 的选择要保证分解过程的稳定。

若 $S=1$, 则 A 分解如下:

$$A = \begin{bmatrix} E & C^T \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CE^{-1} & I^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & A^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & E^{-1}C^T \\ 0 & I^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

其中 $A^{(n-1)} = B - CE^{-1}C^T$ 为 $(n-1)$ 阶方阵, $I^{(n-1)}$ 为 $(n-1)$ 阶方阵。

若 $S=2$, 则 A 分解为:

$$A = \begin{bmatrix} E & C^T \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^{(2)} & 0 \\ CE^{-1} & I^{(n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & A^{(n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{(2)} & E^{-1}C^T \\ 0 & I^{(n-2)} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

其中 $A^{(n-2)} = B - CE^{-1}C^T$, $\text{Det}(E) \neq 0$ 。

E 称为主元块, $A^{(n-1)}$ 和 $A^{(n-2)}$ 称 A 的减缩矩阵。对 $A^{(n-1)}$ 和 $A^{(n-2)}$ 又可作类似分解, 直到得到分解式(1.2)为止。这种分解法称为块对角主元法。

如果令 $A^{(n)} = A$, $A^{(k)}$ 为 A 的 k 阶减缩矩阵, 则由 $A^{(k)}$ 到 $A^{(k-s)}$ 的分解过程如下:

第一步决定 $\lambda^{(k)} = \max_{2 \leq i < k} |A_{i,1}^{(k)}|$ 。若 $\lambda^{(k)} = 0$, 则 $k-1$ 送 k , 再执行第一步, 否则令 r 为 $|A_{r,1}^{(k)}| = \lambda^{(k)}$ 的最小行标。

第二步若 $|A_{1,1}^{(k)}| \geq \alpha \lambda^{(k)}$, 则取 $P^{(k)} = I$, $S=1$ 转到第七步执行。

第三步决定 $\sigma^{(k)} = \max_{\substack{1 \leq m < k \\ m \neq r}} |A_{m,r}^{(k)}|$ 。

第四步若 $|A_{1,1}^{(k)}| \sigma^{(k)} \geq \alpha (\lambda^{(k)})^2$, 则取 $P^{(k)} = I$, $S=1$ 转到第七步执行。

第五步若 $|A_{r,r}^{(k)}| \geq \alpha \sigma^{(k)}$, 则交换 $A^{(k)}$ 的第 1 与第 r 行和列, 并取 $S=1$, 转第七步执行。

第六步交换 $A^{(k)}$ 的第 2 与第 r 行和列, 使 $|A_{2,1}^{(k)}| = \lambda^{(k)}$, 取 $S=2$ 。

第七步计算 $A^{(k-s)}$ 。若 $S=1$, 则在置换 $A^{(k)}$ 以后计算

$$A_{i,j}^{(k-1)} = A_{i+1,j+1}^{(k)} - A_{i+1,1}^{(k)} A_{j+1,1}^{(k)} (A_{1,1}^{(k)})^{-1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, K-1 \quad (2.3)$$

若 $S=2$, 则在置换 $A^{(k)}$ 以后计算。

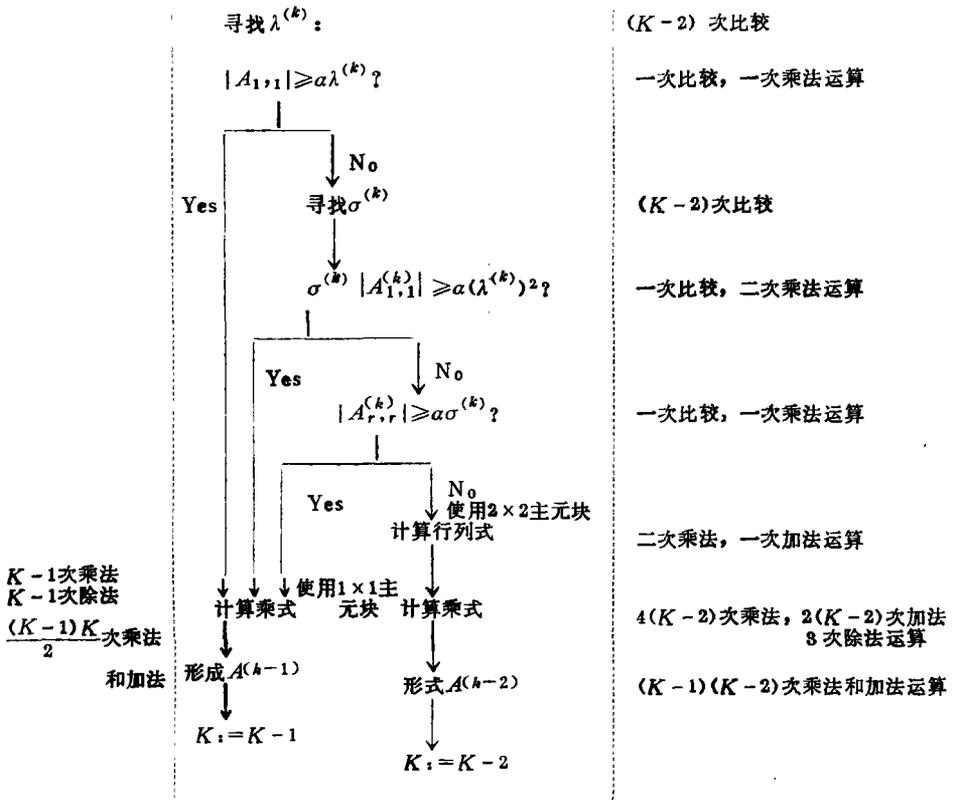
$$A_{i,j}^{(k-2)} = A_{i+2,j+2}^{(k)} - \frac{(A_{j+2,1}^{(k)} A_{2,2}^{(k)} - A_{i+2,2}^{(k)} A_{2,1}^{(k)}) A_{j+2,1}^{(k)} + (A_{j+2,2}^{(k)} A_{1,1}^{(k)} - A_{i+2,1}^{(k)} A_{2,1}^{(k)}) A_{j+2,2}^{(k)}}{(A_{1,1}^{(k)} A_{2,2}^{(k)} / A_{2,1}^{(k)} - A_{2,1}^{(k)}) A_{2,1}^{(k)}} \quad (2.4)$$

$i, j = 1, 2, \dots, K-2$

第八步 $K-S$ 送 K , 若 $K > 1$ 转第一步继续执行, 否则分解结束。

为使减缩矩阵元素增长界达到最小, α 值应取为 $\frac{1+\sqrt{17}}{8} = 0.6404^{[3]}$ 。这种串行工

作的流程图和运算量如图 1 所示。



三、块对角主元法并行计算

上述串行算法如不加改造就直接搬到向量机上, 就不能高效稳定运行。为此, 我们将它改造成并行算法, 其计算步骤如下:

第一步并行寻找 $\lambda^{(k)} = \max_{2 \leq i \leq k} |A_{i,1}^{(k)}|$ 。假定向量机的向量长度为 L 。不失一般性, 设 $L=2^m$ 。当 $K-1 > L$ 时 (除去 $|A_{1,1}^{(k)}|$), 先在 $K-1$ 个元素中挑选 L 个绝对值较大的元素, 然后使用折半法从 L 个较大元素中挑选出绝对值最大的元素和相应的行标号 r 。

第二步比较 $|A_{1,1}^{(k)}| \geq \alpha \lambda^{(k)}$, 若成立, 置 $P^{(k)} = I, S=1$ 转第七步计算。

第三步在第 r 行元素中, 并行寻找 $\sigma^{(k)} = \max_{\substack{1 \leq m \leq k \\ m \neq r}} |A_{m,r}^{(k)}|$, 并行执行方法与第一步同。

第四步比较 $|A_{1,1}^{(k)}| |\sigma^{(k)}| \geq |A_{r,r}^{(k)}| (\lambda^{(k)})^2$ 。若成立, 则置 $P^{(k)} = I, S=1$, 转第七步执行。

第五步比较 $|A_{r,r}^{(k)}| \geq \alpha \sigma^{(k)}$, 若成立, 置 $P^{(k)} = I_{1,r}$, 然后并行执行 $P^{(k)} A^{(k)} P^{(k)T}$

其中 $I_{1,r}$ 为交换单位矩阵第 1 行与第 r 行产生的置换矩阵, 再转第七步执行。

第六步令 $P^{(k)} = I_{2,r}$, 并行执行, $P^{(k)} A^{(k)} P^{(k)T}$, 然后转第八步执行。

第七步使用 1×1 主元块, 在置换 $A^{(k)}$ 以后, 并行计算 $A^{(k-1)}$ 。即对于某一固定的 j , 计算

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} \quad a = A_{j+1,1}^{(k)} / A_{1,1}^{(k)} \\
 & \text{(ii)} \quad \begin{bmatrix} A_{1,j}^{(k-1)} \\ A_{2,j}^{(k-1)} \\ \vdots \\ A_{k-1,j}^{(k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{2,j+1}^{(k)} \\ A_{3,j+1}^{(k)} \\ \vdots \\ A_{k,j+1}^{(k)} \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} A_{2,1}^{(k)} \\ A_{3,1}^{(k)} \\ \vdots \\ A_{k,1}^{(k)} \end{bmatrix} \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

公式(3.1)中, 当 $K-1 > L$ 时, 需对 $K-1$ 进行分段, 不妨设 $(K-1)/L = K'$, 再分段计算(3.1)式, 最后转第九步。

第八步使用 2×2 主元块。在置换 $A^{(k)}$ 以后, 并行计算 $A^{(k-2)}$, 即对某一固定的 j , 计算

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} \quad \begin{aligned} a_1 &= A_{j+2,1}^{(k)} * A_{2,2}^{(k)} \\ a_2 &= A_{j+2,2}^{(k)} * A_{1,1}^{(k)} \\ a_3 &= 1 / (A_{1,1}^{(k)} * A_{2,2}^{(k)} - (A_{2,1}^{(k)})^2) \end{aligned} \\
 & \text{(ii)} \quad \begin{bmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{k-2,j} \end{bmatrix} = [a_1 - A_{2,1}^{(k)} * \begin{bmatrix} A_{3,2}^{(k)} \\ A_{4,2}^{(k)} \\ \vdots \\ A_{k,2}^{(k)} \end{bmatrix}] * A_{j+2,1}^{(k)} \\
 & \quad \quad \quad \begin{bmatrix} C_{1,1} \\ C_{2,1} \\ \vdots \\ C_{k-2,1} \end{bmatrix} = [a_2 - A_{2,1}^{(k)} * \begin{bmatrix} A_{3,1}^{(k)} \\ A_{4,1}^{(k)} \\ \vdots \\ A_{k,1}^{(k)} \end{bmatrix}] * A_{j+2,2}^{(k)} \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} A_{1,j}^{(k-2)} \\ A_{2,j}^{(k-2)} \\ \vdots \\ A_{K-2,j}^{(k-2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{3,j+2}^{(k)} \\ A_{4,j+2}^{(k)} \\ \vdots \\ A_{k,j+2}^{(k)} \end{bmatrix} - a_3 * \begin{bmatrix} b_{2,j} \\ b_{3,j} \\ \vdots \\ b_{k-2,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{1,1} \\ C_{2,1} \\ \vdots \\ C_{k-2,1} \end{bmatrix} \\
 & \quad \quad \quad j = 1, 2, \dots, K-2
 \end{aligned}$$

同理若 $K-2 > L$, 需对 $K-2$ 进行分段, 不妨设 $(K-2)/L = K'$ 再逐段进行公式(3.2)的计算。

第九步 $K-S$ 送 K , 若 $K > 1$ 转第一步继续执行, 否则分解结束。

其并行计算流程图和运算量如图 2。

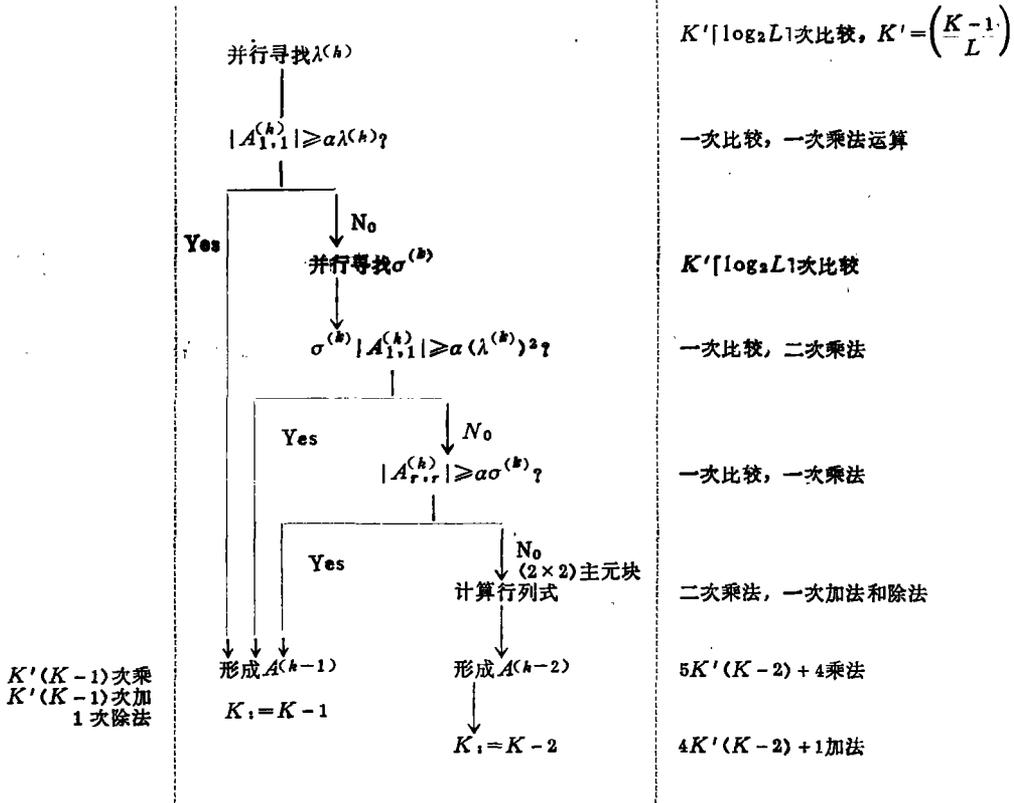


图 2

四、块对角主元法稳定性分析

使用第三部分方法解线性方程组 $AX=B$, 其中 A 为 n 阶对称非奇异矩阵, B 为 n 维常向量。若 \bar{X} 表示 $A^{-1}B$ 的近似解, 则存在 n 阶矩阵 E , 使下式成立

$$(A+E)\bar{X}=B \tag{4.1}$$

如果 E 很小 (在某种意义上), 我们就认为 \bar{X} 接近原方程组精确解, 并称该方法是稳定的。下面, 我们给出稳定性二种判别标准。

(1) 对于某一个范数 $\|\cdot\|$, 如果比值

$$\frac{\|E\|}{\|A\|} \tag{4.2}$$

很小, 则称该法稳定。

其中范数采用

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}| \tag{4.3}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \tag{4.4}$$

当 A 为对称矩阵时, 成立

$$\|A\|_{\infty} = \|A\|_1$$

(2) 设 $A^{(k)}$ 为 A 的 K 阶减缩矩阵, 如果比值:

$$\frac{\max_{i,j} |A_{i,j}^{(k)}|}{\max_{i,j} |A_{i,j}|} \quad (4.5)$$

一致有界, 则称该法稳定。

下面, 我们分析第三部分算法的稳定性。令:

$$\mu = \max_{1 \leq i, j \leq n} |A_{i,j}| \quad (4.6)$$

$$\mu^{(k)} = \max_{1 \leq i, j \leq k} |A_{i,j}^{(k)}| \quad (4.7)$$

注意到第三部分的 $\lambda^{(k)}$ 和 $\sigma^{(k)}$ 或者小于 $\mu^{(k)}$, 或者等于 $\mu^{(k)}$ 。

如果使用 1×1 主元块, 在置换 $A^{(k)}$ 以后有

$$A_{i,j}^{(k-1)} = A_{i+1,j+1}^{(k)} - A_{i+1,i+1}^{(k)} A_{j+1,i+1}^{(k)} |A_{1,1}^{(k)}|^{-1} \quad (4.8)$$

由算法第二步
$$\mu^{(k-1)} \leq \mu^{(k)} + \lambda^{(k)} / \alpha \leq \mu^{(k)} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (4.9)$$

由算法第四步
$$\mu^{(k-1)} \leq \mu^{(k)} + (\lambda^{(k)})^2 / |A_{1,1}^{(k)}| \leq \mu^{(k)} + \sigma^{(k)} / \alpha \leq \mu^{(k)} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (4.10)$$

由算法第五步
$$\mu^{(k-1)} \leq \mu^{(k)} + \sigma^{(k)} / \alpha \leq \mu^{(k)} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (4.11)$$

如果使用 2×2 主元块, 在置换 $A^{(k)}$ 以后有

$$A_{i,j}^{(k-2)} = A_{i+2,j+2}^{(k)} - \frac{(A_{j+2,1}^{(k)} A_{2,2}^{(k)} - A_{i+2,2}^{(k)} A_{2,1}^{(k)}) A_{j+2,1}^{(k)} + (A_{j+2,2}^{(k)} A_{1,1}^{(k)} - A_{i+2,1}^{(k)} A_{2,1}^{(k)}) A_{j+2,2}^{(k)}}{(A_{1,1}^{(k)} A_{2,2}^{(k)} / A_{2,1}^{(k)} - A_{2,1}^{(k)}) A_{2,1}^{(k)}} \quad (4.12)$$

由算法第四、第五步

$$|A_{1,1}^{(k)}| \sigma^{(k)} < \alpha (\lambda^{(k)})^2$$

$$|A_{2,2}^{(k)}| < \alpha \sigma^{(k)}$$

因此有

$$|A_{1,1}^{(k)}| |A_{2,2}^{(k)}| < \alpha^2 (\lambda^{(k)})^2$$

从而可以推出

$$|A_{1,1}^{(k)} A_{2,2}^{(k)} / A_{2,1}^{(k)} - A_{2,1}^{(k)}| > \lambda^{(k)} (1 - \alpha^2)$$

也就是

$$\frac{1}{|A_{1,1}^{(k)} A_{2,2}^{(k)} / A_{2,1}^{(k)} - A_{2,1}^{(k)}|} < \frac{1}{\lambda^{(k)} (1 - \alpha^2)}$$

由此可以得到

$$\mu^{(k-2)} \leq \mu^{(k)} + \frac{(\lambda^{(k)} \alpha \sigma^{(k)} + \sigma^{(k)} \lambda^{(k)}) \lambda^{(k)} + (\sigma^{(k)} |A_{1,1}^{(k)}| + (\lambda^{(k)})^2) \sigma^{(k)}}{(\lambda^{(k)})^2 (1 - \alpha^2)} \quad (4.13)$$

由第四步不等式得到
$$\mu^{(k-2)} \leq \mu^{(k)} + (\alpha \sigma^{(k)} + \sigma^{(k)} + \alpha \sigma^{(k)} + \sigma^{(k)}) / (1 - \alpha^2)$$

$$\leq \mu^{(k)} (1 + 2(1 + \alpha) / (1 - \alpha^2))$$

$$= \mu^{(k)} (1 + 2 / (1 - \alpha)) \quad (4.14)$$

利用(4.9)、(4.10)、(4.11)、(4.14) 得到

$$\max_k \mu^{(k)} \leq \max \left\{ \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{n-k}, (1 + 2 / (1 - \alpha))^{(n-k)/2} \right\} \mu \quad (4.15)$$

当 $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \left(1 + \frac{2}{1-\alpha}\right)$ 成立时, 即当 $\alpha = \alpha_0 = (1 + \sqrt{17})/8 \approx 0.6404$ 时, 有

$$\max_k \mu^{(k)} \leq \mu (2.56)^{n-1} \quad (4.16)$$

(4.16) 式说明第三部分方法是稳定的。

Bunch^[2] 进一步证明了块对角主元法的减缩矩阵元素增长界为 $3nf(n)$, 而全选主元高斯消去法的减缩矩阵元素增长界为 $\sqrt{n}f(n)$, 其中

$$f(n) = \left(\prod_{k=2}^n K \frac{1}{k-1} \right)^{\frac{1}{2}} < 1.8n^{\frac{1}{2} \log n}$$

五、数值试验

我们在向量机上, 针对列选主元的高斯消去法和块对角主元法分别编制了标量 FORTRAN 程序, 同时又编制了块对角主元法的向量 FORTRAN 程序, 对不同阶数 n 进行了计算。它们的运算速度对比分别列在表 2 和表 3 中。计算结果表明, 对于 n 阶矩

表 2 块对角主元法与高斯列选主元法分解 n 阶
对称矩阵标量运算速度比较表

矩阵阶数 n	高斯列选主元法计算时间 $T_1(s)$	块对角主元法计算时间 $T_2(s)$	二种方法速度比 $T = T_1/T_2$
256	34.319	19.067	1.800
128	4.664	2.806	1.662
80	1.253	0.795	1.576
50	0.350	0.243	1.441

表 3 块对角主元法分解 n 阶对称矩阵的向量与
标量运算速度比较表

矩阵阶数 n	标量计算时间 $T_1(s)$	向量计算时间 $T_2(s)$	标量、向量速度比 $T = T_1/T_2$
500	129.043	5.127	25.171
256	19.067	1.045	18.239
180	7.074	0.474	14.935
128	2.806	0.227	12.373
100	1.440	0.135	10.669
80	0.795	0.085	9.338
50	0.243	0.033	7.260
30	0.071	0.013	5.596

阵分解来说, 块对角主元法的标量计算比列主元高斯消去法标量计算快一倍左右。对同一块对角主元法来讲, 当 $n > 100$ 时, 向量计算比标量计算快 10 倍以上。这说明研究算法并行性对提高机器效率起了重要作用。

附 录 块对角主元法分解 n 阶对称矩阵的向量 FORTRAN 程序

```

SUBROUTINE VSIFA (A, LDA, N, KPVT, INFO, T)
INTEGER KPVT (*)
REAL A(LDA,*), T(*), MULK, MULK1
LOGICAL SWAP
... ..
C |*| PIVOT BLOCK
C PERFORM AN INTERCHANGE
T (1:IMAX)=A (1:IMAX, IMAX)
A (1:IMAX, IMAX)=A (1:IMAX, K)
A (1:IMAX, K)=T (1:IMAX)
DO 110 JJ=IMAX, K
J=K+IMAX-JJ
T1=A (J, K)
A (J, K) =A (IMAX, J)
A (IMAX, J) =T1
1 1 0 CONTINUE
C PERFORM ELIMINATION
DO 130 JJ=1, KM1
J=K-JJ
T (J)=-A (J, K)/A (K, K)
A (1:J, J)=A (1:J, J)+T (J) *A (1:J, K)
1 3 0 CONTINUE
A (1:KM1, K)=T (1:KM1)
... ..
C 2×2 PIVOT BLOCK
C PERFORM AN INTERCHANGE
T (1:IMAX)=A (1:IMAX, IMAX)
A (1:IMAX, IMAX)=A (1:IMAX, K-1)
A (1:IMAX, K-1)=T (1:IMAX)
DO 150 JJ=IMAX, KM1
J=KM1+IMAX-JJ

```

```

T1=A (J, K -1)
A (J, K -1)=A (IMAX, J)
A (IMAX, J)=T1
1 5 0 CONTINUE
T1=A (K -1, K)
A (K -1, K)=A (IMAX, K)
A (IMAX, K) =T1
A (IMAX, IMAX*K)=A (K -1, IMAX*K)
A (K -1, IMAX*K)=T (IMAX*K)
C PERFORM ELIMINATION
KM2=K -2
IF (KM2. EQ. 0) GO TO 180
DENOM=A (K -1, K)*A (K -1, K) - A (K -1, K -1)*A (K, K)
DENOM=1.0/DENOM
DO 170 JJ=1, KM2
J=KM1 - JJ
T(J)=(A(K -1, K -1)*A(J, K) - A(J, K -1)*A(K -1, K))*DENOM
MULK1=(A(J, K -1)*A(K, K) - A(J, K)*A(K -1, K))*DENOM
A(1:J, J)=A(1:J, J) + T(J)*A(1:J, K)
A(1:J, J)=A(1:J, J) + MULK1*A(1:J, K -1)
A(J, K -1)=MULK1
1 7 0 CONTINUE
A(1:KM2, K)=T(1:J)
1 8 0 CONTINUE
... ..
RETURN
END

```

参 考 文 献

- [1] Bunch, J.R., Parlett, B.N., Direct Methods for Solving Symmetric Indefinite Systems of Linear Equations, *SIAM Numer. Anal.*, 8(1971)639~655
- [2] Bunch, J.R., Analysis of Diagonal Pivoting Method, *SIAM Numer. Anal.*, 8(1971) 656~680
- [3] Bunch, J.R., Kautman, L., Some Stable Methods for Calculating Inertia and Solving Symmetric Linear Systems, *Math. Comp.*, 31(1977), 163~179
- [4] Bunch, J.R., Partial Pivoting Strategies for Symmetric Matrices, *SIAM Numer. Anal.* V.11 1974, pp521~528

Parallel Computation of the Block Diagonal Pivoting Method

Li Xiaomei He Xinfang

Abstract

In this paper a parallel algorithm of the block diagonal pivoting method is given. The method of decomposing symmetric matrices is shown to be stable and the method is implemented on parallel computer. Computing result shows the parallel algorithm is ten times faster than the serial algorithm when n is greater than 100.