国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八六年第一期　总第五十三期　No. 1 1986 Sum.53

一维ARMA模型判阶及参数辨识的一种算法

吕　锐

提　要　本文讨论了一般的ARMA模型，导出模型的冲激响应序列$h(i)$与参数a_i，b_i的关系式，进而给出了判定模型的阶（M，N）的算法，然后由已导出的关系式及判阶算法，导出了辨识模型参数a_i，b_i的快速算法。最后进行了微机仿真，验证了算法的正确性。

一、引　言

在系统辨识及谱分析领域中，已经研究过了多种辨识参数的算法。[1]~[5]这些算法除了RML算法及GSL算法外，都不能同时将AR参数与MA参数估计出来，其关键所在是不能将AR部分的阶及MA部分的阶同时正确判断出来。

在已知有限点的冲激响应序列$\{h(i)\}$后，我们可以通过建立冲激响应序列$h(i)$与模型参数a_i、b_i的关系式来确定模型的阶及参数。这是基于如下的事实：$\{h(i)\}$中所有元素不都是互相独立的，最大无关数与模型的阶有关。

柯有安[6]教授已解决了AR部分的阶为N，MA部分阶为$N-1$的一类ARMA模型的判阶及参数辨识问题，条件是已知有限点的冲激响应序列$h(i)$的值。

二、基　本　理　论

设一线性、时不变系统可用如下差分方程描述：

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(k-i) \tag{1}$$

其中$\{x(k)\}$是输入序列，$\{y(k)\}$是输出序列，$\{a_i\}$与$\{b_i\}$是$M+N+2$个常参数，而$a_0=1$；N是(1)式所表示ARMA模型的自回归阶数，M是滑动平均的阶数。

将(1)式改写为卷积和的形式：

本文1985年9月1日收到

$$y(k)=\sum_{i=0}^{K}h(i)x(k-i) \tag{2}$$

由(1)式两边取Z变换，立即得

$$\left(\sum_{i=0}^{N}a_iZ^{-i}\right)\cdot Y(Z)=\left(\sum_{i=0}^{M}b_iZ^{-i}\right)\cdot X(Z) \tag{3}$$

(2)式的Z变换形式为

$$Y(Z)=H(Z)\cdot X(Z) \tag{4}$$

而

$$H(Z)=\sum_{i=0}^{\infty}h(i)Z^{-i} \tag{5}$$

其中$h(i)$为系统的冲激响应序列。

由(3)、(4)、(5)式，我们可以证明如下的引理。

引理 若$N>M$，$N=M+P$，而$1\leqslant P<N$，则由(1)式描述的线性时不变系统的冲激响应序列$h(i)$与参数a_i、b_i的关系是

$$\sum_{j=0}^{i}h(i-j)a_j=b_i \tag{6}$$

其中 $i=0,1,2,\cdots,M.$

$$\sum_{j=0}^{i}h(i-j)\cdot a_j=0 \tag{7}$$

其中 $i=M+1,M+2,\cdots,M+P-1.$

$$\sum_{j=0}^{N}h(i-j)\cdot a_j=0 \tag{8}$$

其中 $i=N,N+1,\cdots,$

证明 由(3)、(4)、(5)式，有下式

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{\infty}h(i)\cdot a_jZ^{-(i+j)}=\sum_{i=0}^{M}b_iZ^{-i} \tag{9}$$

对上式左边进行如下的二维换元

$$\begin{cases}j_1=i+j\\ j=j\end{cases}$$

则(9)式左边求和号的求和域变为

$$\begin{cases}0\leqslant j_1\leqslant N-1\\ 0\leqslant j\leqslant j_1\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}N\leqslant j_1\leqslant\infty\\ 0\leqslant j\leqslant N\end{cases}$$

故(9)式可变为

$$\sum_{j_1=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{j_1}h(j_1-j)\cdot a_jZ^{-j_1}+\sum_{j_1=N}^{\infty}\sum_{j=0}^{N}h(j_1-j)a_jZ^{-j_1}=\sum_{i=0}^{M}b_iZ^{-i}$$

将上式左边的j_1换成i，立即有

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{i}h(i-j)a_jZ^{-i}+\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=0}^{N}h(i-j)a_jZ^{-i}=\sum_{i=0}^{M}b_iZ^{-i}$$

欲使(10)式成立，必须有

$$\sum_{j=0}^{i}a_jh(i-j)=b_i \tag{*1}$$

其中 $i=0,1,2,\cdots,M$

$$\sum_{j=0}^{i} a_j h(i-j)=0 \qquad (*2)$$

其中 $i=M+1,\ M+2,\ \cdots,\ M+P-1.$

$$\sum_{j=0}^{N} a_j h(i-j)=0 \qquad (*3)$$

其中$i=N,\ N+1,\ \cdots,$ 证毕。

有了(6)、(7)、(8)三式，我们就将系统冲激响应序列$\{h(i)\}$与参数集$\{a_i\}$、$\{b_i\}$联系起来了，如果已知参数集$\{a_i\}$、$\{b_i\}$及阶$(M,\ N)$，就可以由(1)式唯一地确定一个ARMA模型；反之，已知有限个点$h(i)$的值，就可以根据(6)、(7)、(8)三式确定系统的阶$(M,\ N)$及参数集$\{a_i\}$、$\{b_i\}$。

三、一维ARMA模型的阶的判定

1. N值的判定

由(8)式，注意到$a_0=1$，有

$$\sum_{j=1}^{N} a_j h(i-j)=-h(i) \qquad (11)$$

其中 $i=N,\ N+1,\ \cdots,$

由(11)式构造如下的矢量方程组（取前$n\geqslant N$个方程构成）

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \vec{h}(i-j)=-\vec{h}(i) \qquad (12a)$$

其中 $\vec{h}(i)=(h(i)h(i+1)\cdots h(i+n-1))^T$ (12b)

由(12a)式知，矢量序列$\{\vec{h}(i)\}$仅仅前N个是线性无关的，其余矢量可由前N个矢量线性表出。将矢量序列$\{\vec{h}(i)\}$正交化，从$n=1$起，检验正交化后矢量$\vec{r}(i)$的长度$\|\vec{r}(i)\|$，一旦从某个n值起，有$\|\vec{r}(i)\|=0$，则判定此时的n值为所求N加1，即$N+1$，即所求$N=n-1$。一般，由于计算字长的限制，$\|\vec{r}(i)\|\neq 0$，可设置适当门限进行判决。正交化具体算法见[7]。

2. M值的判定

一旦N值正确判断出来后，我们可以根据(8)式辨识出AR部分的参数$\{a_i\}$（具体算法见四节）。

对于辨识出来的$\{a_i\}$及判定的N值，从某个P值开始（例如，从$P=N$开始，P依次递减1），检验下式的值是否为零：

$$L_i=\sum_{j=0}^{i} a_j h(i-j) \qquad (13)$$

其中 $i=N-P+1,\ N-P+2,\ \cdots,\ N.$

一旦有某个P值，使所有$L_i=0$成立，则判定此时的P值为所求的P值，从而$M=N-P$。这是因为，只要P取正确值，根据(7)式，(12)式的值应该为零。

四、一维ARMA模型参数的辨识算法

根据(8)式，一旦N值正确判定后，可将(8)式写成如(14)式的矩阵形式，且(14)式的系数矩阵为一非对称的Toeplitz阵：

$$\begin{pmatrix} h(N) & h(N-1) & \cdots & h(1) \\ h(N+1) & h(N) & \cdots & h(2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h(2N-1) & h(2N-2) & \cdots & h(N) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} h(N+1) \\ h(N+2) \\ \vdots \\ h(2N) \end{pmatrix} \tag{14}$$

借助G·Carayannis[8]的解非对称Toeplitz阵的快速算法，并应用于(14)式，具体形式为

$$\vec{a}_{n+1} = \begin{bmatrix} \vec{a}_n \\ 0 \end{bmatrix} + k_{n+1}\begin{bmatrix} J\vec{a}_n^* \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\vec{a}_{n+1}^* = \begin{bmatrix} \vec{a}_n^* \\ 0 \end{bmatrix} + k_{n+1}^*\begin{bmatrix} J\vec{a}_n \\ 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$k_{n+1} = -\beta_n/\alpha_n, \quad k_{n+1}^* = -\beta_n^*/\alpha_n \tag{17}$$

$$\beta_n = h(N+n+1) + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}h(N+i) \tag{18}$$

$$\beta_n^* = h(N-n-1) + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}^* h(N-i) \tag{19}$$

$$\alpha_n = \alpha_{n-1}(1-k_n \cdot k_n^*) \tag{20}$$

初始条件 $a_1 = -h(N+1)/h(N)$

$$\begin{aligned} a_1^* &= -h(N-1)/h(N) \\ \beta_0 &= h(N+1), \quad \beta_0^* = h(N-1) \\ \alpha_0 &= h(N) \end{aligned} \tag{21}$$

由(15)—(21)式组成计算$\{a_i\}$的递推快速算法。其中$\vec{a}_n = (a_1\ a_2 \cdots a_n)^T$，$\vec{a}_n^* = (a_1^*\ a_2^* \cdots a_n^*)^T$，而$\vec{a}_N^*$满足

$$\begin{pmatrix} h(N) & h(N+1) & \cdots & h(2N-1) \\ h(N+1) & h(N) & \cdots & h(2N-2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h(1) & h(2) & \cdots & h(N) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_N^* \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} h(N-1) \\ h(N-2) \\ \vdots \\ h(0) \end{pmatrix} \tag{22}$$

$J = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$是逆序算子，将$\{a_i\}$代入(6)式即得$\{b_i\}$。

五、微 机 仿 真 结 果

考虑一个冲激响应如下的系统

$$h(t)=(2e^{-2t}+3e^{-t}\sin 2t)u(t) \tag{23}$$

对 $h(t)$ 取样，取样间隔为 T，则有取样序列

$$h(nT)=(2e^{-2nT}+3e^{-nT}\sin 2nT)u(nT) \tag{24}$$

对(24)式两边取 Z 变换，有

$$H(Z)=\frac{2}{1-e^{-2T}Z^{-1}}+\frac{3e^{-T}\sin 2T Z^{-1}}{1-2e^{-T}\cos 2T Z^{-1}+e^{-2T}Z^{-2}}$$

$H(Z)$ 即

$$H(Z)=\frac{2+(3e^{-T}\sin 2T-4e^{-T}\cos 2T)Z^{-1}+(2e^{-2T}-3e^{-3T}\sin 2T)\cdot Z^{-2}}{1-(e^{-2T}+2e^{-T}\cos 2T)Z^{-1}+(2e^{-3T}\cos 2T+e^{-2T})Z^{-2}+(-e^{-4T})Z^{-3}} \tag{25}$$

由(25)式即可得到 $\{a_i\}$ 与 $\{b_i\}$ 的理论值，另一方面，由(24)式得到集合 $\{h(i)\}$（共8点）。利用第三节的判阶方法，判得AR部分的阶 $N=3$，与实际 $N=3$ 相符，判得MA部分的阶为M＝2，与实际M＝2相符。表1是不同 T 值时的判阶结果。

表 1

T 值	判得 N 值	判得 M 值	N 实	M 实
0.105	3	2	8	2
0.095	3	2	8	2

由第四节讨论参数辨识算法，算得的 $\{a_i\}$、$\{b_i\}$ 值（以 $\bar{a}_i$、$\bar{b}_i$ 表示）为

$\bar{a}_1=-2.571674667677$，　　$\bar{a}_2=2.238096385009$

$\bar{a}_3=-0.65704680904827$

$\bar{b}_0=2$　　，　　$\bar{b}_1=-2.9591361639917$

$\bar{b}_2=1.1647733261885$

且 $\bar{a}_0=a_0=1$，采样间隔 $T=0.105$。

以上结果与由(25)式求得的实际参数相符，仅仅只有尾数误差，所有上述结果，证实了前面的算法的正确性。

六、结　束　语

(1) 本文提出的判阶方法可以同时将AR部分的阶与MA部分的阶判断出来，条件是已知有限点集合 $\{h(i)\}$。

(2) 在已知有限点 $\{h(i)\}$ 后，用本算法先辨识系统参数后求频率响应的方法，可获得比FFT更高的分辨率和处理速度。且分辨率无物理限制。这种方法特别适用于仅知序列少数几个点而要求序列的付里叶变换的場合。

(3) 对算法加以修正，可用于系统辨识或谱估计及目标识别技术中。

参 考 文 献

[1] J·P·Burg, Maximum Entropy Spectral Analysis, 37th Ann. Intern. Meeting, SoC. Explor. Geophys., 1967.

[2] S·Haykin, Nonlinear Methods of Spectral Analysis, P73—P123, 1979.

[3] D·Graupe, D·J·Krause, and J·B·Moore, Identification of Autoregressive Moving-Average Parameters of Time Series, IEEE Trans., AC-20, No.1, Feb., PP104—PP107, 1975.

[4] Hsia.T.C, On Least Squares Algorithm for System Parameters Identification, IEEE Trans., AC—21, No.1, Feb, 1976.

[5] R.L.Kashyap, Estimation of Parameters in a Partially Whitened Representation of Stochastie Process, IEEE Trans., Ac—19, No.1, Feb., PP13—PP21, 1974.

[6] 柯有安，系统频率响应的一种超分辨快速算法，电子技术，No.1，P1—P7，北京工业学院内部刊物，1984.

[7] 武汉大学数学系编，线性代数，P186—P188，人民教育出版社，1980.

[8] G.Carayannis, N.Kalouptsidis and D. G.Manolakis, Fast Recursive Algorithms for a Class of Linear Equations, IEEE Trans, Assp—30, No.2, PP227—PP239, 1982.

A Algorithem of Determining the order and Identifying the Parametere of ARMA Models

Lü Rui

Abstract

This paper discusses general ARMA models. The formulas have been developed about the relationship of the impulse response sequence of the models and their parameters $\{a_i\}$ and $\{b_i\}$, then a algorithm determining the order based on the impulse response sequence is given, and a fast algorithm for $\{a_i\}$ and $\{b_i\}$ is developed by the formulas and determining order algorithm. At last, the simulation experiment is performed, it illustrates the algorithms are true.