

# 一类二维 ARMA 模型的判阶及参数 辨识的一种算法

吕 锐

**摘 要** 本文首先推导出了二维 ARMA 模型的冲激响应序列  $\{h(i, j)\}$  与模型参数集  $\{a_{ij}\}$  及  $\{b_{ij}\}$  的关系式, 并给出了证明。利用导出的关系式, 给出了一种用冲激响应序列确定二维 ARMA 模型的阶的算法, 进而给出了基于冲激响应序列及已确定的阶, 求模型参数集  $\{a_{ij}\}$  及  $\{b_{ij}\}$  的算法。由这些算法得到了一种不同于 FFT 方法的由冲激响应序列求二维频率响应的方法, 它与传统的 FFT 方法比较, 具有运算量小, 分辨率高及能给出连续频响的优点。最后给出了微机仿真的例子。该算法加以修正后可用于 Radar 目标辨识和图象重建应用中。

## 一、引 言

在 Radar 目标辨识及图象重建中, 常常遇到的问题是要辨识二维 ARMA 模型的参数。而要解决这个问题, 关键是对模型的阶作出正确判断, 这个问题一直在研究中。

另外, 在已知二维系统的冲激响应序列的有限点集合  $\{h(i, j)\}$  后, 一般, 求系统频响的传统方法是做二维 FFT 运算。它存在两个主要缺点: 1. 运算量大; 2. 分辨率不高。而且提高分辨率与减少运算量是矛盾的。

但对于二维 ARMA 模型, 我们可以从已知的有限点集合  $\{h(i, j)\}$  出发, 建立  $h(i, j)$  与参数集  $\{a_{ij}\}$ 、 $\{b_{ij}\}$  的关系。这是基于这样一种思想: 在给定  $j$  时 (或  $i$  时),  $\{h(i, j)\}$  的所有元素并不全是互相独立的, 最大无关数与系统的阶有关。这样从  $\{h(i, j)\}$  出发, 就可以确定模型的阶数, 进而确定参数集  $\{a_{ij}\}$ 、 $\{b_{ij}\}$ , 然后从已求出的 ARMA 模型出发, 求系统的频响。此外, 借助 G. Carayannis<sup>[1]</sup> 等的解非对称 Toeplitz 阵的快速算法, 可快速辨识出参数集  $\{a_{ij}\}$ , 从而达到比 FFT 处理快得多的处理速度。

顺便指出, FFT 的处理方法, 实质上是对已知集合  $\{h(i, j)\}$  以外的  $h(n, m)$  值作为另处理, 即相当于进行加矩形窗处理, 这样做显然会对频响的峰值起平滑作用, 从而降低分辨率。

前面所述的思想与方法, Burg<sup>[2]</sup>在其早年的“最大熵谱分析”中阐述过。柯有安教授对一维的一类 ARMA 模型进行过讨论, 提出了一种已知有限点  $\{h(i)\}$  时, 求系统频响的算法<sup>[3]</sup>。

## 二、基本理论

设一线性、空不变系统可用如下差分方程描述:

$$\sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{M_1} a_{ij} y(n-i, m-j) = \sum_{i=0}^{N_2} \sum_{j=0}^{M_2} b_{ij} x(n-i, m-j) \quad (1)$$

特别地, 我们考虑如下—类系统:

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{ij} y(n-i, m-j) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} b_{ij} x(n-i, m-j) \quad (2)$$

其中  $\{x(n, m)\}$  是输入序列,  $\{y(n, m)\}$  是输出序列,  $\{a_{ij}\}, \{b_{ij}\}$  是有限个常参数 (共有  $2MN + M + N + 1$  个),  $(M, N)$  是模型的阶, 而  $a_{00} = 1$ 。显见, 由 (2) 描述的系统由  $\{a_{ij}\}$  及  $\{b_{ij}\}$  和  $(M, N)$  唯一确定。

(2) 式所示的系统亦可写为卷积和的形式:

$$y(n, m) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m h(i, j) x(n-i, m-j) \quad (3)$$

其中  $h(i, j)$  是系统的冲激响应序列;  $n = 0, 1, \dots, N$ ;  $m = 0, 1, \dots, M$ 。

对 (2) 式两边进行二維  $Z$  变换, 有

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{ij} Z_1^{-i} Z_2^{-j} \right) \cdot Y(Z_1, Z_2) \\ & = \left( \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} b_{ij} Z_1^{-i} Z_2^{-j} \right) \cdot X(Z_1, Z_2) \end{aligned} \quad (4)$$

但 (3) 式的  $Z$  变换形式为

$$Y(Z_1, Z_2) = H(Z_1, Z_2) \cdot X(Z_1, Z_2) \quad (5)$$

$$\text{又} \quad H(Z_1, Z_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h(i, j) Z_1^{-i} Z_2^{-j} \quad (6)$$

由 (4)、(5)、(6) 式可得到下式:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} b_{ij} Z_1^{-i} Z_2^{-j} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h(i, j) Z_1^{-i} Z_2^{-j} \\ & \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{ij} Z_1^{-i} Z_2^{-j} \end{aligned} \quad (7)$$

下面给出基于 (7) 式的引理 1:

**引理 1** 由 (2) 式所描述的一类线性、空不变系统的参数  $a_{ij}, b_{ij}$  与  $h(i, j)$  的关系是

$$\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l a_{ij} h(k-i, l-j) = b_{kl} \quad (8)$$

其中  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $l = 0, 1, \dots, M-1$

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{ij} h(k-i, l-j) = 0 \quad (9)$$

其中  $k=N, N+1, \dots, l=M, M+1, \dots$

证明 (7) 式可写为如下形式:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} b_{ij} Z_1^{-i} Z_2^{-j} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M h(i, j) a_{kl} \cdot Z_1^{-(i+k)} \cdot Z_2^{-(j+l)} \quad (10)$$

对(10)式右边作四維換元:

$$i=k_1-k, \quad j=l_1-l, \quad k=k, \quad l=l$$

则(10)式左边的求和域变化为

$$0 \leq k_1 \leq N-1, \quad 0 \leq l_1 \leq M-1, \quad 0 \leq k \leq k_1, \quad 0 \leq l \leq l_1$$

及  $N \leq k_1 < \infty, \quad M \leq l_1 < \infty, \quad 0 \leq k \leq N, \quad 0 \leq l \leq M$

从而(10)式可变为下式:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} b_{ij} Z_1^{-i} Z_2^{-j} \\ &= \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{k_1} \sum_{l=0}^{l_1} a_{kl} h(k_1-k, l_1-l) Z_1^{-k_1} Z_2^{-l_1} \\ & \quad + \sum_{k_1=N}^{\infty} \sum_{l_1=M}^{\infty} \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M a_{kl} h(k_1-k, l_1-l) Z_1^{-k_1} Z_2^{-l_1} \end{aligned} \quad (12)$$

将(12)式中  $k_1$  换成  $i$  和  $l_1$  换成  $j$ , 立即得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} b_{ij} Z_1^{-i} Z_2^{-j} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j a_{kl} h(i-k, j-l) Z_1^{-i} Z_2^{-j} \\ & \quad + \sum_{i=N}^{\infty} \sum_{j=M}^{\infty} \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M a_{kl} h(i-k, j-l) Z_1^{-i} Z_2^{-j} \end{aligned} \quad (13)$$

欲使(13)式成立, 必须

$$\sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j a_{kl} h(i-k, j-l) = b_{ij} \quad (14)$$

其中  $i=0, 1, \dots, N-1; j=0, 1, \dots, M-1$

$$\sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M a_{kl} h(i-k, j-l) = 0 \quad (15)$$

其中  $i=N, N+1, \dots; j=M, M+1, \dots$

以  $i$  与  $k, j$  与  $l$  互换, (14)、(15)式即为所要证明的(8)、(9)式。

(8)、(9)两式将系统冲激响应序列与系统参数联系起来, 这是很有意义的。当给定系统参数及阶时, 可以由(2)式唯一地确定系统的冲激响应; 反之, 由(8)、(9)式可确定系统的参数与阶。关于阶判定, 在下一节做专门讨论。

以下讨论不妨假定  $M > N$ 。

现在考虑从(8)、(9)式求解  $\{a_{ij}\}$  及  $\{b_{ij}\}$ 。

由(9)式知:

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{ij} h(k-i, l-j) = -h(k, l) \quad (16)$$

$i=j=0$ 除外

其中  $k=N, N+1, \dots; l=M, M+1, \dots$

显见, 除  $a_{00}=1$  外, (16) 式中含  $(M+1)(N+1)-1$  个未知数, 取前  $(M+1)(N+1)-1$  个方程, 构造如下线性方程组:

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i=j=0 \text{ 除外}}}^N \sum_{j=0}^M h(N+1-i, M+1-j) a_{ij} = -h(N+1, M+1) \quad (17a_1)$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i=j=0 \text{ 除外}}}^N \sum_{j=0}^M h(N+2-i, M+2-j) a_{ij} = -h(N+2, M+2) \quad (17a_2)$$

.....

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i=j=0 \text{ 除外}}}^N \sum_{j=0}^M h(N+MN+M+N-i, M+MN+M+N-j) a_{ij} \\ = -h(MN+M+2N, MN+M+N+2M) \quad (17a_{MN+M+N})$$

当然上述(17a)式共  $MN+M+N$  个方程可写为紧凑的矩阵形式, 由于式子很长, 这里略去。

由上面的分析知道, 求解(17a)式必须知道阶  $(M, N)$ , 所求整个问题关键在于判定系统的阶  $(M, N)$ 。只有确知  $(M, N)$ , 根据有限脉冲响应序列才能解出  $\{a_{ij}\}$ , 进而求出  $\{b_{ij}\}$ 。

### 三、二维ARMA模型的阶 $(M, N)$ 的判定

#### 1. $M$ 值的判定

在本文引言中已指出, 在给定  $j$  时所有的  $\{h(i, j)\}$  并不是互相独立的; 同样, 给定  $i$  时, 所有的  $\{h(i, j)\}$  也不都是互相独立的, 最大无关数与模型的阶有关\*。

对于指定的  $i$  值,  $\{h(i, j)\}$  相当于一维ARMA模型的冲激响应序列, 由第二节的分析方法, 易得到如下两式:

$$\sum_{j=0}^{M_i} a_{ij} h(i, l-j) = 0 \quad (18)$$

$$\sum_{j=0}^l a_{ij} h(i, l-j) = b_{il}^{**} \quad (19)$$

这里(18)式中  $l=M_i, M_i+1, \dots$ ; (19)式中  $l=0, 1, \dots, M_i-1$  而  $M_i$  为指定  $i$  时, 所得到的一维ARMA模型的阶。以下分情况  $i=0$  及  $i \neq 0$  讨论。

(1)  $i=0$  时, (18)式变为

$$\sum_{j=0}^{M_0} a_{0j} h(0, l-j) = 0 \quad (20)$$

考虑到  $a_{00}=1$ , 有

$$\sum_{j=1}^{M_0} a_{0j} h(0, l-j) = -h(0, l) \quad (21)$$

其中  $l=M_0, M_0+1, \dots$ ;

\* 我们考虑[5]中一类二维模型

\*\* 这里的  $b_{il}$  与(2)式中  $b_{il}$  意义不同。

我们取(21)式中的前  $m \geq M_0$  个方程, 构造如下的矢量方程组:

$$\sum_{j=1}^{M_0} a_{0j} \vec{h}(0, l-j) = -\vec{h}(0, l) \quad (22)$$

其中  $l = M_0, M_0+1, \dots$ ;

$$\vec{h}^T(0, l) = (h(0, l), h(0, l+1), \dots, h(0, l+m-1)) \quad (23)$$

由(22)及(23)式知: 对于矢量序列  $\{\vec{h}(0, l)\}$ , 仅仅前  $M_0$  个矢量是线性无关的, 而其余矢量可由该  $M_0$  个矢量线性表示出来。

利用 Gram-Schmidt 的正交化算法<sup>[4]</sup>, 将  $\{\vec{h}(0, l)\}$  正交化, 从某个  $m$  值开始 (例如可以  $m=1$ )。检验正交化后的矢量  $\vec{r}(0, l)$  的长度  $\|\vec{r}(0, l)\|$ , 若  $\{\|\vec{r}(0, l)\|\}$  从某个  $m$  值起, 有为零的元素, 则判定此时的  $m$  值为  $M_0$  值。

Gram-Schmidt 正交化算法的具体形式如下:

$$\vec{h}(0, 0) = \vec{r}(0, 0) \quad (24a)$$

$$\vec{h}(0, s) = \beta_{s0} \vec{r}(0, 0) + \beta_{s1} \vec{r}(0, 1) + \dots + \beta_{ss-1} \vec{r}(0, s-1) + \vec{r}(0, s) \quad (24b)$$

$$\beta_{sp} = \vec{h}^T(0, s) \cdot \vec{r}(0, p) / [\vec{r}^T(0, p) \cdot \vec{r}(0, p)] \quad (24c)$$

其中  $S > p \geq 0$

当然, 在实际计算中, 由于计算机字长的限制, 一般  $\|\vec{r}(0, s)\| \neq 0$ , 则可设置适当的门限, 进行判决。

(2)  $i \neq 0$  时, (18)式为

$$\sum_{j=0}^{M_i} a_{ij} h(i, l-j) = 0$$

在上式中, 令  $a'_{ij} = a_{ij}/a_{i0}$

$$\sum_{j=1}^{M_i} a'_{ij} h(i, l-j) = -h(i, l) \quad (25)$$

在(25)中取前  $m \geq M_i$  个方程构造如下的矢量方程组:

$$\sum_{j=1}^{M_i} a'_{ij} \vec{h}(i, l-j) = -\vec{h}(i, l) \quad (26)$$

其中  $l = M_i, M_i+1, \dots$ ;

$$\vec{h}^T(i, l) = (h(i, l), h(i, l+1), \dots, h(i, l+m-1)) \quad (27)$$

(26)、(27)式表明, 矢量序列  $\{\vec{h}(i, l)\}$  仅仅是前  $M_i$  个是互相独立的, 其余矢量可前  $M_i$  个矢量线性表示出来的。

与前面  $i=0$  的情况一样, 将  $\{\vec{h}(i, l)\}$  正交化后, 便可判定  $M_i$  的值。

一旦所有的  $M_i$  值所判断出来后, 显然模型的阶  $M = \max\{M_i, i=0, 1, 2, \dots\}$ 。

## 2. N值的判定

在给  $j$  值后,  $\{h(i, j)\}$  亦相当于一维 ARMA 模型的冲激响应序列, 类似于第二节的分析方法, 可得到如下的式子:

$$\sum_{i=0}^{N_j} a_{ij} h(k-i, j) = 0 \quad (28)$$

其中  $k = N_j, N_j+1, \dots$

$$\sum_{i=0}^k a_{ij} h(k-i, j) = b_{kj} \quad (29)$$

其中  $k=0, 1, 2, \dots, N_j-1$

根据(28)式, 分  $j=0$  及  $j \neq 0$  两种情况可得到类似于判定  $M$  值的、判定  $N$  值的方法; 一旦所有的  $N_j$  值判定后, 便得  $N = \max\{N_j\}$ , 而  $j=0, 1, 2, \dots$ 。

3. 对于相当大一部分线性空不变系统, 其冲激响应  $h(t_1, t_2)$  中是不含冲激函数及其导数项的, 这样一类系统, 一般有  $N_i = N_j$  和  $M_i = M_j$ , 这里  $i \neq j$ 。所以我们有必要讨论这一类系统的参数  $\{a_{ij}\}$ 、 $\{b_{ij}\}$  的算法。当然, 按照(17)式, 解一个  $(MN + M + N) \times (MN + M + N)$  的线性方程组, 是可以求出  $\{a_{ij}\}$ 、 $\{b_{ij}\}$  的, 但这种方法当  $M$ 、 $N$  较大时, 运算量是很大的。下面来考虑  $N_i = N_j$ ,  $M_i = M_j$  时的求解  $\{a_{ij}\}$ 、 $\{b_{ij}\}$  的快速算法。

(1) 当  $i=0$  时, 由(18)式, 知

$$\sum_{j=0}^M a_{0j} h(0, l-j) = 0 \quad (A_1)$$

而  $a_{00} = 1$ , 故有

$$\sum_{j=1}^M a_{0j} h(0, l-j) = -h(0, l) \quad (A_2)$$

其中  $l = M+1, M+2, \dots$

(A<sub>2</sub>)式写成矩阵形式如下:

$$\begin{bmatrix} h(0, M)h(0, M-1)\dots h(0, 1) \\ h(0, M+1)h(0, M)\dots h(0, 2) \\ \dots\dots\dots \\ h(0, 2M-1)h(0, 2M-2)\dots h(0, M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \\ a_{0M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0, M+1) \\ h(0, M+2) \\ \vdots \\ h(0, 2M) \end{bmatrix} \cdot (-1) \quad (A_3)$$

(A<sub>3</sub>)式的系数阵是一非对称的 Toeplitz 阵, 在参考文献[1]中给出了求解(A<sub>3</sub>)的快速算法。

(2) 给定  $j=0$  后, 由(28)式, 有

$$\sum_{i=0}^N a_{i0} h(k-i, 0) = 0 \quad (B_1)$$

其中  $k = N, N+1, \dots$

而  $a_{00} = 1$ , 故有

$$\sum_{i=0}^N a_{i0} h(k-i, 0) = -h(k, 0) \quad (B_2)$$

其中  $k = N+1, N+2, \dots$

(B<sub>2</sub>)式写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} h(N, 0)h(N-1, 0)\dots h(1, 0) \\ h(N+1, 0)h(N, 0)\dots h(2, 0) \\ \dots\dots\dots \\ h(2N-1, 0)h(2N-2, 0)\dots h(N, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{N0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(N+1, 0) \\ h(N+2, 0) \\ \vdots \\ h(2N, 0) \end{bmatrix} \cdot (-1) \quad (B_3)$$

(B<sub>3</sub>)式的系数矩阵是一非对称的 Toeplitz 阵, 如同

(1) 情况一样, 它亦有快速递推算法。

(3) 给  $i \neq 0$  时, 由(25)式, 有

$$\sum_{j=1}^M a'_{i,j} h(i, l-j) = -h(i, l) \quad (C_1)$$

其中  $l = M+1, M+2, \dots$

(C<sub>1</sub>)式写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} h(i, M)h(i, M-1)\cdots h(i, 1) \\ h(i, M+1)h(i, M)\cdots h(i, 2) \\ \dots\dots\dots \\ h(i, 2M-1)h(i, 2M-2)\cdots h(i, M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{i,1} \\ a'_{i,2} \\ \vdots \\ a'_{i,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(i, M+1) \\ h(i, M+2) \\ \vdots \\ h(i, 2M) \end{bmatrix} \cdot (-1) \quad (C_2)$$

(C<sub>2</sub>)式系数阵亦是一非对称 Toeplitz 阵, 将(C<sub>2</sub>)解出后, 得到  $\{a'_{i,j}\}$ , 由  $a_{i,j} = a'_{i,j} \cdot a_{i,0}$  的便换算得到  $\{a_{i,j}\}, j=1, 2, \dots, M$ 。

从而由 (A<sub>3</sub>), (B<sub>3</sub>), (C<sub>3</sub>) 三式, 可组成求解参数集  $\{a_{i,j}\}$  的一种简便的快速算法。

显见, (A<sub>3</sub>), (B<sub>3</sub>), (C<sub>2</sub>) 均是如下一类方程的变型:

$$\begin{bmatrix} h(n)h(n-1)\cdots h(1) \\ h(n+1)h(n)\cdots h(2) \\ \dots\dots\dots \\ h(2n-1)h(2n-2)\cdots h(n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h(n+1) \\ h(n+2) \\ \vdots \\ h(n+n) \end{bmatrix}$$

所以, 为了我们的目的, 可利用 Carayannis<sup>[1]</sup> 的快速算法, 具体形式如下:

$$\vec{X}_{m+1} = \begin{bmatrix} \vec{X}_m \\ 0 \end{bmatrix} + k_{m+1} \begin{bmatrix} J \vec{X}_m \\ 1 \end{bmatrix} \quad (*1)$$

$$\vec{X}_{m+1}^* = \begin{bmatrix} \vec{X}_m^* \\ 0 \end{bmatrix} + k_{m+1}^* \begin{bmatrix} J \vec{X}_m^* \\ 1 \end{bmatrix} \quad (*2)$$

$$k_{m+1} = -\beta_m / \alpha_m \quad k_{m+1}^* = -\beta_m^* / \alpha_m \quad (*3)$$

$$\beta_m = h(n+m+1) + \sum_{i=1}^m X_{m-i+1} h(n+i) \quad (*4)$$

$$\beta_m^* = h(n-m-1) + \sum_{i=1}^m X_{m-i+1}^* h(n-i) \quad (*5)$$

$$\alpha_m = \alpha_{m-1} (1 - k_m \cdot k_m^*) \quad (*6)$$

初始条件:  $\alpha_0 = h(n)$

$$\beta_0 = h(n+1), \beta_0^* = h(n-1) \quad (*7)$$

$$\vec{X}_1 = -h(n+1)/h(n), \vec{X}_1^* = -h(n-1)/h(n)$$

其中  $J = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & \dots & & \\ & & 1 & \\ & & & \dots \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$ , 是逆序算子,

$$\vec{X}_n = (X_1 X_2 \cdots X_m)^T; \vec{X}_m^* = (X_1^* X_2^* \cdots X_n^*)^T$$

而  $\vec{X}_n^*$  满足:

$$\begin{bmatrix} h(n)h(n+1)\cdots h(2n-1) \\ h(n-1)h(n)\cdots h(2n-2) \\ \cdots \\ h(1)h(2)\cdots h(h) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ \vdots \\ X_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(n-1) \\ h(n-2) \\ \vdots \\ h(0) \end{bmatrix} \cdot (-1) \quad (*8)$$

由(\*1)~(\*7)组成求解  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的快速递推算法。

前面三节讨论了一类二維 ARMA 模型的判阶及其参数的计算方法, 下面将给出二維系统的微机仿真的例子, 以验证理论的正确性。

## 五、微机仿真的结果

前面讨论的算法, 通过了仿真实验; 其中一例如下:

考虑一个二維系统, 它的冲激响应为:

$$h(t_1, t_2) = e^{-t_2}(2e^{-3t_1} + 4e^{-t_1} \sin 3t_1) \quad (30)$$

这是一个(3,1)阶系统, 即  $M=3, N=1$ 。其中  $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$ 。

对  $h(t_1, t_2)$  等间隔采样, 采样间隔为  $T$ , 得到取样序列为

$$h(n, m) = e^{-mT}(2e^{-3nT} + 4e^{-nT} \sin 3nT) \quad (31)$$

对(31)式做  $Z$  变换, 有

$$H(Z_1, Z_2) = \frac{1}{(1 - e^{-T}Z_2^{-1/2})} \cdot \left[ \frac{2}{1 - e^{-3T}Z_1^{-1}} + \frac{4e^{-T} \sin 3TZ_1^{-1}}{1 - 2e^{-T}Z_1^{-1} \cos 3T + e^{-2T}Z_1^{-2}} \right] \quad (32)$$

或为

$$\begin{aligned} H(Z_1, Z_2) = & (2 - 2.30853597175Z_1^{-1} + 0.80691278335468Z_1^{-2}) / \\ & (1 - 2.441839466Z_1^{-1} + 2.6001972Z_1^{-2} - 0.5915553643Z_1^{-3} \\ & - 0.9003245226Z_2^{-1} + 2.19844795156Z_1^{-1}Z_2^{-1} - 1.854686271 \\ & \cdot Z_1^{-2}Z_2^{-1} + 0.532591801006Z_1^{-3}Z_2^{-1}) \end{aligned} \quad (33)$$

另一方面, 由取样序列  $\{h(n, m)\}$  (共  $5 \times 8$  点), 用第二、三节讨论的计算参数  $\{a_{ij}\}$  及  $\{b_{ij}\}$ 、判阶的算法, 可判定系统的阶  $(M, N)$ , 然后计算出参数  $\{a_{ij}\}, \{b_{ij}\}$ , 具体结果如下:

(1) 采用第三节的判阶方法, 判得  $M=3, N=1$ , 结果与实际相符。

(2) 采用第二节讨论的计算参数  $\{a_{ij}\}, \{b_{ij}\}$ \* 的算法, 求出的  $\{a_{ij}\}, \{b_{ij}\}$  如下: (以  $\bar{a}_{ij}, \bar{b}_{ij}$  表示)

$$\bar{a}_{01} = -2.4418394654 \quad \bar{a}_{02} = 2.06001971875$$

$$\bar{a}_{03} = -0.5915553637$$

$$\bar{a}_{10} = -0.9003245226 \quad \bar{a}_{12} = 2.19844795094$$

\*  $\{b_{ij}\}$  由(8)式得到。

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= -1.85468626985 & \bar{a}_{13} &= 0.5325918004 \\ \bar{b}_{00} &= 2 & \bar{b}_{01} &= -2.308359716 \\ \bar{b}_{02} &= 0.806912783 \end{aligned}$$

结果亦与真实  $\{a_{ij}\}$ 、 $\{b_{ij}\}$  相符，且  $a_{00} = \bar{a}_{00} = 1$ 。

(3) 基于  $h(n, m)$  求得的  $\{\bar{a}_{ij}\}$ 、 $\{\bar{b}_{ij}\}$ ，可得系统的频响表达式为

$$H(e^{j2\pi f_1 T}, e^{j2\pi f_2 T}) = \frac{\bar{b}_{00} + \bar{b}_{01}e^{-j2\pi f_1 T} + \bar{b}_{02}e^{-j2\pi f_1 \cdot 2T}}{\sum_{i=0}^1 \sum_{k=0}^3 \bar{a}_{ik} e^{-2\pi f_1 k T} e^{-j2\pi f_2 \cdot i T}} \quad (34)$$

最后指出，由于没有三维显示设备，无法看到精确 (34) 式及 (33) 式所表示二维 ARMA 模型的用  $\{h(n, m)\}$  计算出来的频响与真实频响的立体图形。但从  $a_{ij}$  与  $\bar{a}_{ij}$ 、 $b_{ij}$  与  $\bar{b}_{ij}$  的相符合程度，可知 (33) 式与 (34) 式是相符的。以下是  $f_2 = 0$  时，由 Apple 绘图仪绘出的相应的一维频响的计算曲线与真实曲线。

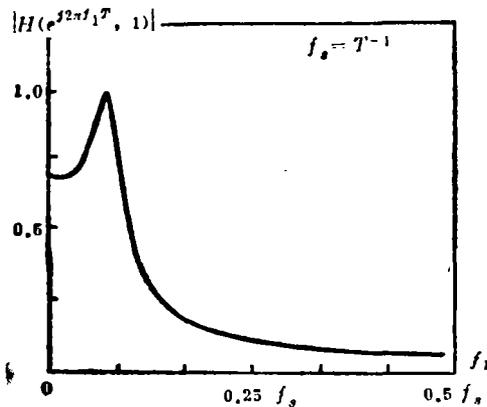


图 1

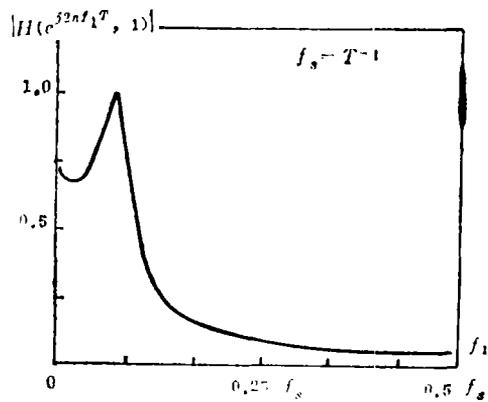


图 2

由图可以看出，两者是相当一致的，从而表明了所述理论的正确性。

## 五、结 论

1. 前面讨论的算法，可用来判定一类二维 ARMA 模型的阶， $(M, N)$ ，即  $N_2 = N_1 - 1$ ， $M_2 = M_1 - 1$  的一类 ARMA 模型的阶，条件是已知有限点的  $\{h(n, m)\}$ ；一旦判出了  $(M, N)$ ，可进而求出参数  $\{a_{ij}\}$ 、 $\{b_{ij}\}$ 。

2. 由前面讨论的方法，可得到一种求二维频响的一种高分辨算法，并可给出连续频响曲线。

3. 所讨论的算法，加以修正，可用于 Radar 目标识别和图象重建，这一工作将是很有意义的。

本文在成文及仿真实验中，得到了沈振康付教授的悉心指导与帮助，特表谢意。

## 参 考 文 献

- [1] G.Carayannis, N.Kalouptsidis and D.G. Manolakis, Fast Recursive Algorithms for a class of Linear Equations. IEEE, Trans, Assp, No.2,1982.
- [2] J.P.Burg Maximum Entropy Spetral Analysis 1967, in "Nonlinear Methods of spectral Analysis" 1979, S. Haykin.
- [3] 柯有安, 系统频响的一个超分辨高速算法, 《电子技术》北工, No. 1, 1984.
- [4] 武大数学系编, 线性代数, 人民教育出版社, 1980.
- [5] 吕锐, 一类二维函数取样序列的 $z$ 变换有理分式的辨识, 通信学报(待发表)

## A Algorithm of Determining the Order and Identifying The Parameters of a Class of Twe-dimensional ARMA Model

Lu Rui

### Abstract

In this paper, the formulas have been developed concerning the relationship of the impulse response sequence  $h(i, j)$  of a class of two-dimension ARMA model and the parameter sets  $\{a_{ij}\}$  and  $\{b_{ij}\}$ , and the proof is given. With the help of the formulas, an algorithm determining the model's order is given by the impulse response sequence; then an algorithm identifying the model's parameter sets  $\{a_{ij}\}$  and  $\{b_{ij}\}$  is given by means of the impulse response sequence and the order determined. By the algorithms, the method based on the impulse reponse sequence is obtained to determine the two-dimensional frequency response, it is different from FFT algorithm. Compared with classifical FFT algorithm, it has the following advantages:

(1) smaller calculating quantities. (2) higher resolution. (3) continuous frequency respnse can be given. At last, an example of simulation is illustrated. When improved, the algorithm can be applied to radar target identification and image reccnstruction.