

广义局部最优检测器及其渐近性能

梁 民

摘 要 开展对局部最优检测器(LOD)的研究有重要的理论和实际意义。本文建立了一种广义LOD模型和准则,据此导出几种典型信号的LOD结构,采用 Pitman 的渐近相对效能(ARE)作指标研究了这些LOD的渐近性能;在广义 Gauss、Weibull 和对数正态分布的噪声模型中对上述 LOD 的 ARE 作数值计算,并及出相应的结论。

一、引 言

经典统计检测理论导出的最佳检测器结构可归结为似然比计算器与门限比较的级联^[1]。在白 Gauss 噪声条件下,其具体实现比较简单。但由于实际工作环境异常复杂,杂波和人工干扰的存在,致使实际的背景噪声远不是简单的 Gauss 分布型式,而且在多数情况下还难以对其作出精确的统计描述,这时最佳检测器的实现将非常困难。为此,长期以来人们一直在几个方向上不断地探索解决这个问题的技术途径。局部最优检测器(LOD)的问世,便是这种努力的一部份。局部最优检测器的概念是 J. Capon^[2]于1960年首先提出的。这种检测器在信噪比 $\rho=0$ 的局部区域内渐近地具有 Neyman-Pearson 检测器(NPD)的最佳性能,而其结构一般又较为简单,易于实现。此后,许多学者对 LOD 进行了多方面的研究,解决了非 Gauss 噪声和具有对称分布的单峰窄带噪声中低通和带通信号的局部最优检测(包括局部 Robust 检测)^{[3]-[14]}等问题。近年来 W. A. Gardner^[15]又开展了对 LOD 的“LOE-C”(Locally Optimum Estimators and Correlators)结构特性的研究,并导出了相应的递归公式。A. B. Martinez 和 J. B. Thomas^[16]则进一步研究了多变量非 Gauss 噪声中局部最优检测,等等。本文建立了一种广义 LOD 模型和准则,据此研究了几种典型信号的 LOD 结构及其渐近相对效能(ARE)、并在广义 Gauss、Weibull 和对数正态分布等噪声模型下对上述 LOD 的 ARE 作了数值计算,得出了若干有意义的结论。

二、广义 LOD 模型和准则

考虑假设检验

$$H_0: x_i = n_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

$$H_1: x_i = n_i + s_i$$

记 $\vec{x} \triangleq [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ 的 m 维分布函数为 $F_\rho(\vec{x})$ (在 H_1 条件下) 或 $F_0(\vec{x})$ (在 H_0 条件下), 相应的概率密度为 $f_\rho(\vec{x})$ 或 $f_0(\vec{x})$, 作似然比 $A_\rho(\vec{x})$

$$A_\rho(\vec{x}) = f_\rho(\vec{x}) / f_0(\vec{x}) \quad (2)$$

于是 NPD 的判决表达式为

$$A_\rho(\vec{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} A_T \quad (3)$$

式中 A_T —— 使 NPD 的虚警概率等于容许值 α 的判决门限值。

现设存在正整数 k , 它满足条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} A_\rho(\vec{x}) \Big|_{\rho=0} &\neq 0 \quad (k \geq 1) \\ \frac{\partial^i}{\partial \rho^i} A_\rho(\vec{x}) \Big|_{\rho=0} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1) \end{aligned} \quad (*)$$

将 $A_\rho(\vec{x})$ 在 $\rho=0$ 处作 Taylor 展开, 在 ρ 较小的条件下可得近似式:

$$A_\rho(\vec{x}) \approx 1 + \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} A_\rho(\vec{x}) \Big|_{\rho=0} \cdot \rho^k \quad (4)$$

把(4)式代入(3)式得低信噪比情况下具有准最佳性能的检测器判决表达式:

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} A_\rho(\vec{x}) \Big|_{\rho=0} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \tau \quad (5)$$

此即为广义 LOD 判决表达式。由此, 统计量相应为

$$L(\vec{x}) = \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} A_\rho(\vec{x}) \Big|_{\rho=0} = \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} f_\rho(\vec{x}) \Big|_{\rho=0} / f_0(\vec{x}) \quad (6)$$

判决门限为 τ 。检测器结构如图 1 所示:

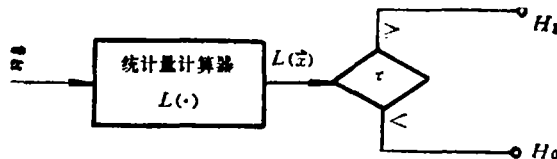


图 1

若 $x_i, i=1, 2, \dots, m$ 独立同分布, 并记其一维概率密度为 $f_\rho(x)$ (在 H_1 条件下) 或 $f_0(x)$ (在 H_0 条件下) 则(6)式变为

$$L(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m g(x_i) \quad (7)$$

其中
$$g(x) \triangleq \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} f_\rho(x) \Big|_{\rho=0} / f_0(x) \quad (8)$$

此时广义 LOD 的结构如图 2 所示。它由零记忆非线性变换器、累加器和门限比较器级联而成。

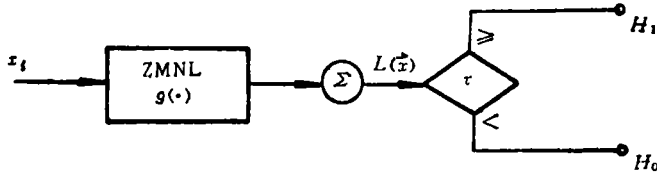


图 2

一般地，设有条件(**): $F_\rho(\vec{x})$ 、 $f_\rho(\vec{x})$ 和 $\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} f_\rho(\vec{x})$ 在 $m+1$ 维空间子集

$$\left\{ \begin{array}{l} -\infty < x_i < +\infty, (i=1, 2, \dots, m) \\ 0 \leq \rho \leq b \quad (b > 0) \end{array} \right\}$$

上连续，且存在可积函数 $M_0(\vec{x})$ 和 $M_k(\vec{x})$ ($-\infty < x_i < +\infty, i=1, 2, \dots, m$) 使得 $f_\rho(\vec{x}) \leq M_0(\vec{x})$ 和 $\left| \frac{\partial^k f_\rho(\vec{x})}{\partial \rho^k} \right| \leq M_k(\vec{x})$ ($0 \leq \rho \leq b, b > 0$)。令 I 为拒绝域，则 I 相应为接受域，虚警概率和漏报概率分别可表为

$$\alpha = \int_I f_0(\vec{x}) d\vec{x} \quad (9)$$

$$\beta_m(\rho) = \int_I f_\rho(\vec{x}) d\vec{x} \quad (10)$$

对 (10) 式求关于 ρ 在 $\rho=0$ 处的 k 阶导数，由于存在条件 (**)，互换微分与积分次序后得

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} \beta_m(\rho) \Big|_{\rho=0} = \int_I \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} f_\rho(\vec{x}) \Big|_{\rho=0} d\vec{x} \quad (11)$$

对广义 LOD 而言，因 (6) 式成立，故由 Neyman-Pearson 引理^[17]知，(11) 式此时取最小值 $\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} \beta_m^*(\rho) \Big|_{\rho=0}$ ，即有

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} \beta_m(\rho) \Big|_{\rho=0} \geq \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} \beta_m^*(\rho) \Big|_{\rho=0} \quad (12)$$

这便是广义 LOD 准则。它表明在信噪比 $\rho=0$ 的局部区域内，广义 LOD 具有最优势。

当 $k=1$ 时，(7) 式和 (12) 式分别化为

$$L(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial \rho} \ln f_\rho(x_i) \Big|_{\rho=0} \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \rho} \beta_m(\rho) \right|_{\rho=0} \geq \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \beta_m^*(\rho) \right|_{\rho=0} \quad (14)$$

而这正是 J. Capon 的研究结果^[2]。

三、典型信号的 LOD 结构

1. 非 Gauss 噪声中低通信号的 LOD

考虑假设检验

$$\begin{aligned} H_0: x(t) &= n(t) \\ H_1: x(t) &= n(t) + \&(V, t) \end{aligned} \quad (15)$$

令信号 $\&(V, t)$ 为

$$\&(V, t) = AS(t) = Aq(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t) + \theta] \quad (16)$$

其中 $0 \leq t \leq T$, $q(t)$ 和 $\phi(t)$ 相对 ω_0 为窄带, A 是未知幅度参数, θ 是初相位, $S(t)$ 是能量归一化信号, V 表示未知参数的集合, 则似然比相应为

$$\begin{aligned} A(\bar{x}) &\triangleq \{f(\bar{x}/H_V)\}^{-1} E_V[f(\bar{x}/H_1)] \\ &= E_V \{ \exp[A \sum_{i=1}^m g(x_i) S_i] + A^2/2 \sum_{i=1}^m h(x_i) S_i^2 \\ &\quad + 0(S^m) \}, m \geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

式中
$$g(x) \triangleq -\frac{d}{dx} \ln \{f(x/H_0)\} \quad (18)$$

$$h(x) \triangleq \frac{d^2}{dx^2} \ln \{f(x/H_0)\} \quad (19)$$

对确知信号情况, (17) 式化为

$$A(\bar{x}) = \exp \left[A \sum_{i=1}^m g(x_i) \cdot S_i \right] + A^2/2 \sum_{i=1}^m h(x_i) S_i^2 + 0(S^m) \quad (20)$$

所以 LOD 的检验统计量为

$$L(\bar{x}) = \left. \frac{\partial}{\partial A} A(\bar{x}) \right|_{A=0} = \sum_{i=1}^m g(x_i) S_i \quad (21)$$

从而 LOD 的结构如图 3 所示

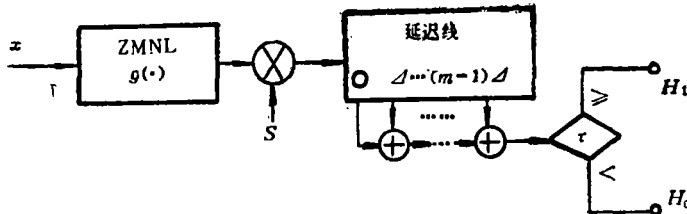


图 3

对于未知信号情况, 设 $E_V(S) = 0, E_V[\&_k \cdot \&_l] = R(k-l) < +\infty$,

$$\text{则 } A(\bar{x}) = 1 + 1/2 \cdot \sum_{i=1}^m h(x_i) R(0) + 1/2 \sum_{i=1}^m g^2(x_i) R(0)$$

$$+ 1/2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R(i-j) g(x_i) g(x_j) + E_V[0(S^m)] \quad (22)$$

假定 $R(0) \gg R(i-j) (i \neq j)$ 则有

$$A(\vec{x}) \approx 1 + 1/2 \cdot \sum_{i=1}^m [h(x_i) + g^2(x_i)] R(0) \quad (23)$$

所以 LOD 的统计量

$$L(\vec{x}) = \frac{\partial^2}{\partial A^2} A(\vec{x}) \Big|_{A=0} = \sum_{i=1}^m [h(x_i) + g^2(x_i)] \quad (24)$$

从而 LOD 的结构如图 4 所示。

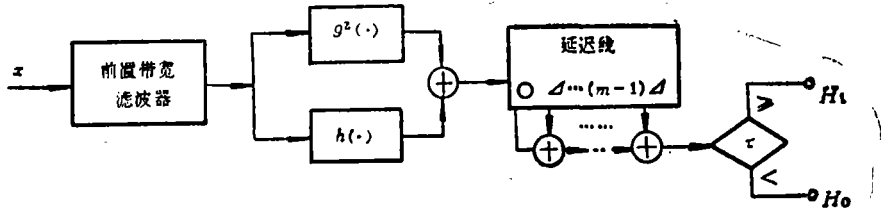


图 4

2. 非 Gauss 噪声中随机信号的 LOD

1) θ 模型的 LOD (即 LOD_θ)

考虑假设检验

$$\begin{aligned} H_0: x_i &= n_i \\ H_1: x_i &= n_i + \theta \&_i \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (25)$$

其中 $x_i, i = 1, 2, \dots, m$, 独立同分布; $n_i, i = 1, 2, \dots, m$, 亦然, 且存在二阶可微密度 $f_0(\cdot)$, $\&_i, i = 1, 2, \dots, m$, 独立同分布, 其均值为零, 方差为 σ_i^2 , 可能的分布为 $G_i, i = 1, 2, \dots, m$; n_i 与 $\&_i$ 统计独立, θ 为一正数, 当 $\theta \rightarrow 0^+$ 即局部情况。称此模型为 θ 模型。

作似然比

$$A_\theta(\vec{x}) = \prod_{i=1}^m \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x_i - \theta \&_i) dG_i \right] / f_0(x_i) \quad (26)$$

式中 $\vec{x} = [x_1 x_2 \dots x_m]^T$, 那么 LOD 的统计量为

$$L_\theta(\vec{x}) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} A_\theta(\vec{x}) \Big|_{\theta=0} = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 g_\theta(x_i) \quad (27)$$

$$\text{其中 } g_\theta(x) \triangleq f_0''(x) / f_0(x) \quad (28)$$

从而 LOD 的结构如图 5 所示。

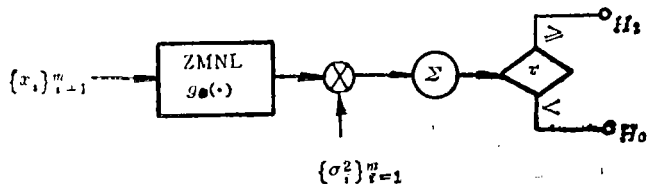


图 6

2) σ 模型的 LOD (记为 LOD_σ)

现考虑这样的模型, 信号的存在由统计特性的标度变化来表征。观测由一组相互独立, 零均值样本序列 $x_i, i=1, 2, \dots, m$, 组成, 希望检验下述假设

$$\begin{aligned} H_0: x_i \text{ 有 pdf } f_0(x_i) \\ H_1: x_i \text{ 有 pdf } f_0(x_i/v_i)/v_i \end{aligned} \quad i=1, 2, \dots, m \quad (29)$$

这里, $v_i = [1 + \sigma\sigma_i^2/v^2]^{1/2}$, $v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_0(x) dx$ 为噪声方差。 $f_0(x)$ 和 σ_i^2 同前所设, σ 为一正数, 当 $\sigma \rightarrow 0^+$ 即局部情形。称此模型为 σ 模型。

作似然比

$$A_\sigma(\vec{x}) = \prod_{i=1}^m [f_0(x_i/v_i)/(v_i f_0(x_i))] \quad (30)$$

则 LOD 的统计量

$$L_\sigma(\vec{x}) = \left. \frac{\partial}{\partial \sigma} A_\sigma(\vec{x}) \right|_{\sigma=0} = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 g_\sigma(x_i) / 2v^2 \quad (31)$$

$$\text{式中 } g_\sigma(x) \triangleq -[1 + x f_0'(x)/f_0(x)] \quad (32)$$

从而 LOD 结构如图 6 所示。

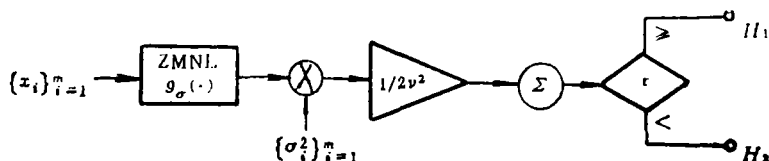


图 6

3. 窄带非 Gauss 噪声中确知相位相参脉冲列信号的 LOD

考虑假设检验

$$\begin{aligned} H_0: \bar{X}_i = \bar{N}_i \\ H_1: \bar{X}_i = \bar{N}_i + \rho \bar{S}_i \end{aligned} \quad i=1, 2, \dots, m \quad (33)$$

这里, $\bar{X}_i = X_i e^{j\varphi_i}$, $\bar{N}_i = N_i e^{j\zeta_i}$, $\rho \bar{S}_i = \rho S_i e^{j\theta_i}$ 分别为窄带接收波形、噪声和信号的复包络第 i 个样本, ζ_i 均匀分布于 $[0, 2\pi]$ 上, $N_i, i=1, 2, \dots, m$ 独立同分布并与 ζ_i 统计独立, X_i 的 pdf 为 $p_0(\cdot)$, ρ 为平均电压信噪比, \bar{S}_i 经 ρ 归一化; 设噪声与信号同频率。

对(33)式, 在 H_0 为真时, X_i 与 φ_i 的联合 pdf 为

$$f_0(X_i, \varphi_i) = p_0(X_i) / 2\pi, \quad X_i \geq 0, \quad 0 \leq \varphi_i \leq 2\pi \quad (34)$$

在 H_1 为真时, X_i 与 φ_i 的联合 pdf 为

$$\begin{aligned} f_\rho(X_i, \varphi_i) = X_i p_0(\sqrt{X_i^2 - 2\rho X_i S_i \cos(\varphi_i - \theta_i) + \rho^2 S_i^2}) \\ \times [2\pi \sqrt{X_i^2 - 2\rho X_i S_i \cos(\varphi_i - \theta_i) + \rho^2 S_i^2}]^{-1} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{则 } A_\rho(\vec{X}) = \prod_{i=1}^m f_\rho(X_i, \varphi_i) / f_0(X_i, \varphi_i) \quad (36)$$

所以 LOD 的统计量为

$$L(\vec{X}) = \frac{\partial}{\partial \rho} A_\rho(\vec{X}) \Big|_{\rho=0} = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}[g(X_i) e^{j\varphi_i} \vec{S}_i^*] \quad (37)$$

其中 $g(X) \triangleq 1/X - p'_0(X)/p_0(X)$ (38)

因而 LOD 的结构如图 7 所示^[18]。

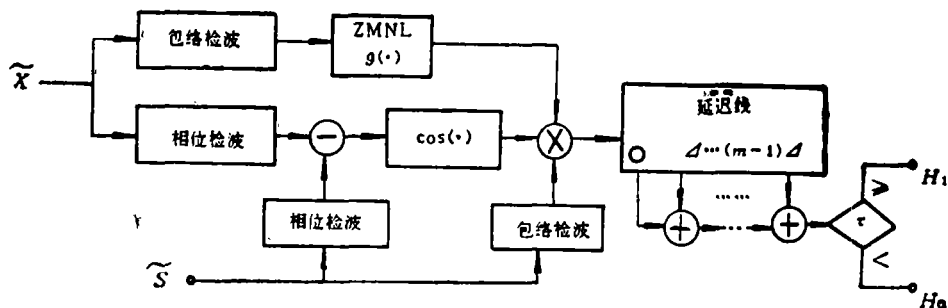


图 7

上述三个实例表明：LOD 在兼顾检测性能准最佳的条件下，较 NPD 结构简单，易于实现。这正是开展 LOD 研究的意义所在。

四、LOD 的渐近相对效能 (ARE)

检测器 D_1 对 D_2 的渐近相对效能 (ARE) 定义为

$$ARE(D_1, D_2) \triangleq \lim_{\substack{m_i \rightarrow +\infty \\ \rho \rightarrow 0^+}} m_2/m_1 \quad (i=1, 2) \quad (39)$$

式中 m_i —— D_i 在指定的虚警概率 α 和检测概率 P_D 条件下所需的最少观测样本数。
 ρ —— 信噪比。

假设下列条件在 $\rho = 0$ 附近成立：

- (**) : (1) $[L_m - E_\rho(L_m)]/\sigma_m(L_m)$ 渐近于标准正态分布；
- (2) 对序列 $\{\rho_m\}$ ($\rho_m = Zm^{-\delta}$, Z 是任一常数)，有

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sigma_m(L_m)/\sigma_0(L_m) = 1$$

则 $ARE(D_1, D_2) = AE(D_1)/AE(D_2)$

$$= \left\{ \left[\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} E_\rho(Lm_1) \right]_{\rho=0}^2 / m \sigma_0^2(Lm_1) \right\} / \left\{ \left[\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} E_\rho(Lm_2) \right]_{\rho=0}^2 / m \sigma_0^2(Lm_2) \right\} \quad (40)$$

这便是 Pitman 定理的数学表达式^[19]。

式中 Lm_i —— D_i 的统计量， $AE(D_i)$ —— D_i 的渐近效能， k 的意义同(*)。

下面基于 Pitman 定理推导几种典型信号的 LOD 的 ARE。

1. 低通信号的 LOD 的 ARE

对于确知信号情况因 $\mu = E[L(\bar{X})/H_0] = 0$ 则

$$AE(\text{LOD}) = E[L^2(\bar{x})/H_0] = \left(\sum_{i=1}^m S_i^2 \right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f'(x) dx \right]^2 / \left[\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) f(x) dx \right] \quad (41)$$

令 $g(x) = x$, 并设 $f(\cdot)$ 是单峰对称的, 则及线性检测器 (LD) 的 AE 为

$$AE(\text{LD}) = \left(\sum_{i=1}^m S_i^2 \right) / \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \quad (42)$$

$$\text{因而 } ARE(\text{LOD}, \text{LD})_{ss} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f'(x) dx \right)^2 / \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) f(x) dx \right) \quad (43)$$

对于未知信号, 因

$$\mu_0 = E[L(\bar{x})/H_0] = 0 \quad (44)$$

$$\mu_1 = E[L(\bar{x})/H_1] = 1/2 \cdot E_s \cdot E[(f''(x)/f(x))^2] \quad (45)$$

$$\sigma^2 \approx \sigma_0^2 \approx \sigma_1^2 = m E[(f''(x)/f(x))^2] \quad (46)$$

$$\text{而 } P_F = P\{L(\bar{x}) > \tau / H_0\} = \phi(\tau / \sigma) \quad (47)$$

$$P_D = P\{L(\bar{x}) \geq \tau / H_1\} = \phi(\tau / \sigma - \mu_1 / \sigma) \quad (48)$$

式中 τ 是门限值; $E_s \triangleq A^2 \sum_{i=1}^m S_i^2$ 是信号能量;

$\phi(t) = \int_t^{\infty} [\exp(-y^2/2)] / \sqrt{2\pi} dy$. 将 (45) 式 ~ (47) 式代入 (48) 式得

$$P_D = \phi[\phi^{-1}(P_F) - \rho \cdot ARPF_{NKS}(\text{LOD}) / \sqrt{2m}] \quad (49)$$

式中 $\rho = E_s / \sigma^2$, ARPF 是检测器的渐近相对性能系数,

$$\text{且 } ARPF_{NKS}(\text{LOD}) = \sigma^2 \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} (h(x) + g^2(x)) f''(x) dx \right] / \left[\int_{-\infty}^{\infty} (h(x) + g^2(x))^2 f(x) dx \right]^{1/2} \right\} / \sqrt{2} \quad (50)$$

若采用平方律检测器 (SLD), $T_s = \sum_{i=1}^m [x_k^2 / \sigma^2 - 1]$

则同理推得

$$ARPF_{NKS}(\text{SLD}) = \sqrt{2} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x) dx - 1 \right] / \sigma^4 \right\}^{-1/2} \quad (51)$$

从而 $ARE(\text{LOD}, \text{SLD})_{NKS} = ARPF_{NKS}(\text{LOD}) / ARPF_{NKS}(\text{SLD})$

$$= \left\{ \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x) dx - 1 \right) E[(h(x) + g^2(x))^2] \right\}^{1/2} \cdot 2 \quad (52)$$

2. 随机信号的 LOD 的 ARE

$$\text{对 SLD, 有 } T_s(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 x_i^2 \quad (53)$$

又因
$$L_{\theta}(\hat{x}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 g_{\theta}(x_i) \tag{54}$$

$$L_{\sigma}(\hat{x}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 g_{\sigma}(x_i) \quad (\text{令 } v^2 = 1) \tag{55}$$

由 Pitman 定理求得：

$$\left. \begin{aligned} ARE_{\sigma}(\text{LOD}_{\sigma}, \text{SLD}) &= \frac{1}{4}(\mu_4 - 1)V_{\text{aro}}(g_{\sigma}) \\ ARE_{\theta}(\text{LOD}_{\theta}, \text{SLD}) &= \frac{1}{4}(\mu_4 - 1)V_{\text{aro}}(g_{\theta}) \\ ARE_{\sigma}(\text{LOD}_{\theta}, \text{SLD}) &= \frac{1}{4}(\mu_4 - 1)\text{cov}_0^2(g_{\sigma}, g_{\theta})/V_{\text{aro}}(g_{\sigma}) \\ ARE_{\theta}(\text{LOD}_{\sigma}, \text{SLD}) &= \frac{1}{4}(\mu_4 - 1)\text{cov}_0^2(g_{\sigma}, g_{\theta})/V_{\text{aro}}(g_{\theta}) \\ \mu_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x) dx \end{aligned} \right\} \tag{56}$$

3. 相位确知的相参脉冲列信号的 LOD 的 ARE

因为
$$AE(\text{LOD}) = \left\{ \int_0^{\infty} g(x) [p_0(x)/x - p'_0(x)] dx \right\}^2 \left(\sum_{i=1}^m S_i^2 \right) / \left(2 \int_0^{\infty} g^2(x) p_0(x) dx \right) \tag{57}$$

$$AE(\text{LD}) = \left\{ \int_0^{\infty} [p_0(x) - x p'_0(x)] dx \right\}^2 \left(\sum_{i=1}^m S_i^2 \right) / \left(2 \int_0^{\infty} x^2 p_0(x) dx \right) \tag{58}$$

所以
$$ARE(\text{LOD}, \text{LD}) = \left\{ \int_0^{\infty} [p_0(x)/x - p'_0(x)] dx / \int_0^{\infty} [p_0(x) - x p'_0(x)] dx \right\}^2 \times \int_0^{\infty} x^2 p_0(x) dx / \int_0^{\infty} g^2(x) p_0(x) dx \tag{59}$$

五、ARE 的数值计算

基于以上各式，曾在 C-10 微型机上进行了数值计算。计算中设出：

$$f(x) = c\eta(\sigma, c) \exp\{-[\eta(\sigma, c)|x]^c\} / (2\Gamma(1/c)) \tag{60}$$

$$(\eta(\sigma, c) = [\Gamma(3/c)/\Gamma(1/c)]^{1/2} \cdot \sigma)$$

和
$$p_0(x) = (\alpha/\beta) \cdot (x/\beta)^{\alpha-1} \exp[-(x/\beta)^{\alpha}] \quad x \geq 0 \tag{61}$$

($\alpha > 0$ 是形状参数， $\beta > 0$ 是尺度参数)

以及
$$p_0(x) = \exp[-\ln^2(x/2X_m)/2\sigma^2] / (\sqrt{2\pi\sigma^2} x) \quad x > 0 \tag{62}$$

(X_m 是中位数， σ^2 是 $\ln x$ 的方差)

将 (60) — (62) 式分别代入 (43) 式、(52) 式、(56) 式和 (59) 式中，得有关 ARE 的具体算式如表 1 所示。相应的数值计算结果见图 8 ~ 11。可见，在非 Gauss 噪声中 LOD 对 LD 或 SLD 的 ARE 值均大于 1 ($ARE_{\sigma}(\text{LOD}_{\theta}, \text{SLD})$ 例外)，即此时 LOD 的检测弱信号的性能比 LD 或 SLD 的好，并且噪声背景愈是偏离 Gauss 分布，ARE 的数值愈大，因而

LOD 的性能好的程度就愈高。

表 1 三种常见噪声分布下的 ARE 计算公式

广义 Gauss 分布	$ARE(LOD, LD)_{KS} = C^2 \Gamma(3/C) \Gamma(2-1/C) [\Gamma(1/C)]^{-2}, C > 0.5$
	$ARE(LOD, SLD)_{NKS} = \{ [\Gamma(1/C) \Gamma(5/C) / \Gamma^2(3/C) - 1] \times \Gamma(2-3/C) (C-1) (3C-4) / \Gamma(1/C) \}^{1/2} \times C \Gamma(3/C) / (2 \Gamma(1/C)), C > 1.5$
	$ARE_{\sigma}(LOD_{\sigma}, SLD) = \{ \Gamma(5/C) / [\Gamma(1/C) \eta^4(C)] - 1 \} \cdot C/4, C > 0$
	$ARE_{\theta}(LOD_{\theta}, SLD) = \{ \Gamma(5/C) - \eta^4(C) \Gamma(1/C) \} \cdot C^4 \Gamma(2-3/C) (1-1/C) \times (3-4/C) / 4 \Gamma^2(1/C) \}, C > 1.5$
	$ARE_{\sigma}(LOD_{\theta}, SLD) = \{ \Gamma(5/C) / [\Gamma(1/C) \eta^4(C)] - 1 \} \times C^2 \Gamma^2(2-1/C) / [4 \Gamma(1/C) \Gamma(2-3/C) (1-1/C) (3-4/C)], C > 1.5$
	$ARE_{\theta}(LOD_{\sigma}, SLD) = C^5 [\Gamma(5/C) - \Gamma(1/C) \eta^4(C)] \Gamma^2(2-1/C) / [4 \Gamma^3(1/C)], C > 0.5$
Weibull 分布	$ARE(LOD, LD) = \begin{cases} \alpha(\alpha-2) \Gamma(1-2/\alpha) \Gamma(1+2/\alpha) / 4, & \alpha > 2 \\ 1 & \alpha = 2 \\ \text{无解} & \alpha < 2 \end{cases}$
对数正态分布	$ARE(LOD, LD) = \exp(4\sigma^2) / 4\sigma^2$

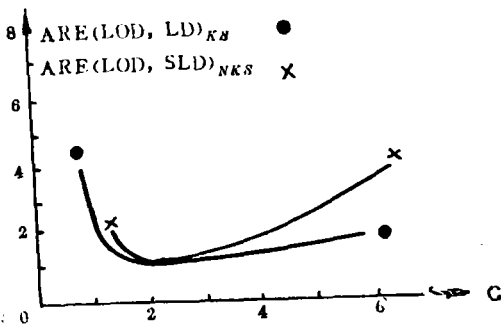


图 8 低通信号, 广义 Gauss 噪声

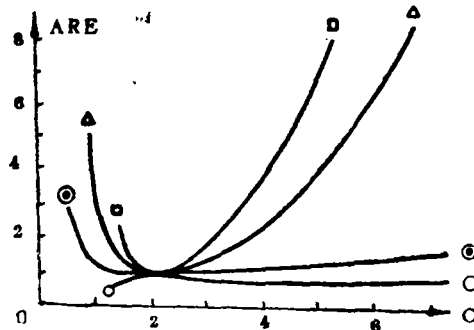


图 9 随机信号, 广义 Gauss 噪声

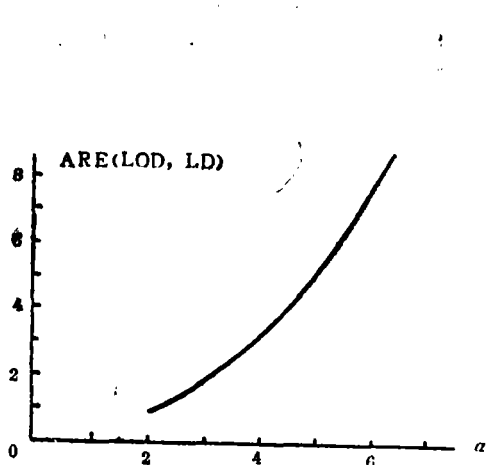


图 10 相参脉冲序列, Weibull 噪声

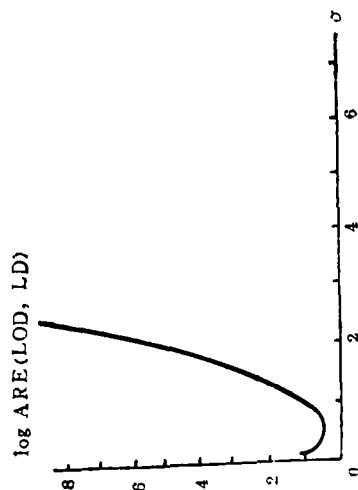


图 11 相参脉冲序列, 对数正态噪声

- ⊙ $ARE_{\sigma}(LOD_{\sigma}, SLD)$ ○ $ARE_{\sigma}(LOD_{\theta}, SLD)$
 □ $ARE_{\theta}(LOD_{\theta}, SLD)$ △ $ARE_{\theta}(LOD_{\sigma}, SLD)$

六、结 语

综上所述, 可以看出:

- (1) 在白 Gauss 噪声模型中, LOD 就是 NPD;
- (2) 在非 Gauss 噪声模型中, LOD 的结构比 NPD 简单;
- (3) 在相同的非 Gauss 噪声背景下, LOD 的性能比 LD 或 SLD (即白 Gauss 噪声的 NPD) 的好。

致 谢

本文是在郭桂蓉副教授与庄钊文老师的指导下进行的, 在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] (美) 惠伦著, 刘其培、迟惠生译, 噪声中信号的检测, 科学出版社, 1977年11月,
- [2] J. Capon, On the Asymptotic Efficiency of Locally Optimum Detectors, IRE Trans. Inform. Theory, Vol. IT-7, no.2, PP67-71, 1961
- [3] S. Rapport and L. Kurz, An Optimal Nonlinear Detector for Digital Data Transmission on Through Non-Gaussian channels, IEEE Trans Inform. Theory, Vol. CO M-14, PP226-274 June 1966.
- [4] D. Middleton, Canonically Optimum Threshold Detection, IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. IT-12, PP. 230-243, Apr. 1966
- [5] M. Kanefsky and J. Thomas, On Polarity detection schemes with non-Gaussian inputs, J. Franklin Inst. vol.289, PP120-138, Aug.1965
- [6] J. H. Miller and J. B. Thomas, Detection for discrete-time Signals in non-Gau

- ssian noise, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-18, PP. 241-250, Mar. 1972
- [7] L. Nirenberg, Low SNR digital communication over certain additive non-Gaussian channels, IEEE Trans. Commun. vol. COM-23, PP. 332-340, Mar. 1975.
- [8] A. D. Spaulding and D. Middleton, Optimum reception in an impulsive interference environment, Part I: coherent detection; Part II: Incoherent reception, IEEE Trans. Commun. vol. COM-25, no.9, PP. 910-937, Sept. 1977
- [9] J. J. Sheehy, Optimum detection of signals in non-Gaussian noise, J. Acoust. Soc. Amer. vol. 63, PP.81-90, Jan. 1978.
- [10] H. V. Poor and J.B. Thomas, Locally Optimum detection of discrete-time stochastic signals, J. Acoust. Soc. Amer. vol. 63, PP.75-80, Jan. 1978
- [11] S. A. Kassam, Locally robust array detectors for random signals, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-24, PP. 309-316, May 1978.
- [12] J. W. Modestino and A. Y. Ningo, Detection of weak signals in narrowband non-Gaussian noise, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-25, PP. 592-600, Sept. 1979.
- [13] N. H. Lu and B.A. Eisenstein, Detection of weak signals in non-Gaussian noise, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-27, no.6, PP.755-771, Nov. 1981.
- [14] A. D. Spaulding, Locally Optimum and Suboptimum Detector Performance in Non-Gaussian Noise, ICC'82 Conference Record, 2H-2-1
- [15] W.A. Gardner, Structural Characterization of Locally Optimum Estimators and Correlators, IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. IT-28, 720, 6 PP. 924-932, Nov. 1982
- [16] A. B. Martinez and J. B. Thomas, Non-Gaussian and multivariate noise model for signal detection, ADA120772, Report, Number 6, Sept. 1982.
- [17] T.S. Ferguson, Mathematical Statistics, Academic Press, New York and London, PP. 201, 1967.
- [18] 朱兆达, Weibull和对数正态噪声中的检测, 《科技报告》, 总编号1783, 分类: 无线电, 南京航空学院, 1983.10.
- [19] G. E. Noether, On the theory of Pitman, Ann. Math. Stat. PP.64-68, 1955.

Generalized Locally Optimum Detectors and their Asymptotic Performance

Liang Min

Abstract

It is important to study the locally optimum detectors (LOD) both in theory and practice. In this paper a model and a criterion are proposed for the generalized LOD. On the basis of such criterion, the generalized LOD structures are derived for detecting several typical signals in non-Gaussian noise, and the asymptotic relative efficiency (ARE) due to Pitman is used to evaluate their performance. Finally, numerical calculations are carried out for ARE of these LOD and some valuable conclusions are obtained.