

模态加速度法在自由界面的 复模态综合技术中的应用

陈兴国 周科健

摘 要 本文提出了一种考虑界面力影响的自由界面复模态综合法。根据模态加速度法导出了部件的物理坐标表达式,再根据系统的虚功原理导出了系统广义坐标的运动方程,从而大大地缩小了系统的独立坐标数。并且在执行过程中不需求出部件的全部复模态。该方法很适应于系统各部件分散情况下的单独实验和计算,从而使计算和模态试验更有效地结合起来。

一、引 言

自从六十年代初 Hurty^{[1][2]}的固定界面模态综合法问世后,相继又产生了将刚体模态和约束模态综合考虑的 Craig-Bampton 法^[3]。从而简化了原始的 Hurty 方法。接着 Goldman^[4]和 Hou^[5]又提出了自由界面的部件模态综合法,但是其收敛性很差。随后 Macneal^[6], Craig^[7], Rubin^[8]分别对其进行了改进。实际计算表明:在这些方法中 C-B法和 C-R法的精度相对地要高一些。本文证明了该二方法都可以根据部件模态加速度方法得到。

对于工程中的大量问题,例如新型的粘弹材料、加阻尼器的结构以及土壤/结构的耦合问题等,传统的实模态理论已经远远满足不了工程的需要,只能用复模态理论进行描述,复模态综合技术也相应诞生。^{[9]~[12]}较全面地阐述了复模态理论。Hasselman和 Kaplan^[13]推广了传统的实模态固定界面部件模态综合法,其综合过程是在整个系统一级完成的。Craig和 Chung^[14]相应推广了 Hou和 Goldman的自由界面部件模态综合法。其首次变换虽然是在部件一级进行,然而,正如 Hou和 Goldman的方法相类似。由于不考虑界面力的影响,其结果的收敛性是相当差的。Craig^[16]虽然考虑了界面力的影响,然而,其剩余模态的形成要涉及到部件的所有复模态,这就使得该方法很难同实验过程结合。并且由于要计算部件的所有模态,因此,在计算速度上受限制和在内存上也是相当花费的。L.Wu和 R.Creif^[17]考虑了两次变换,首次是自由界面的实模态变换,第二次是固定界面复模态变换。相对地过程显得比较繁琐,其价值也只局限于计算方法,并且对于如何选取“固定界面”的广义坐标无一明确的规则和手段。本文从部件的模态加速度法出发,得出部件的物理坐标表达式,其中考虑了类似的联结模态,

* 本文曾在第二届振动理论及其应用学术交流会上宣读
1985年7月1日收到

用虚功原理得出方程的最终形式, 只需取少数几阶部件模态就能得出较好的结果。结合文[18]所提出的结构参数辨识技术, 可以有效地利用实测数据进行模态综合。

二、理论推导

1. 用模态加速度法推导实模态综合法部件的物理坐标表达式

1) Craig-Rubin 方法的推导

由部件方程

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ij} \\ M_{ji} & M_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_j \end{Bmatrix} \triangleq \{f\} \quad (1)$$

其中 i 表示部件的内自由度, j 表示界面上自由度 (此处仅表示部件与部件间的界面)。

$$\{x\} = [\phi_R]\{P_R\} + [\phi_E]\{P_E\} \quad (2)$$

其中 R 表示刚体位移, E 表示弹性位移, P 为广义坐标, ϕ 为部件自由界面模态。

$[\phi_R]$, $\{P_R\}$, $[\phi_E]$ 、 $\{P_E\}$ 分别满足

$$[\backslash M_{R\backslash}] \{\ddot{P}_R\} = [\phi_R^T] \{f\} \quad (3)$$

$$[\backslash M_{R\backslash}] = [\phi_R]^T [M] [\phi_R] \quad (4)$$

$$[\backslash M_{E\backslash}] \{\ddot{P}_E\} + [\backslash K_{E\backslash}] \{P_E\} = [\phi_E^T] \{f\} \quad (5)$$

$$[\backslash M_{E\backslash}] = [\phi_E]^T [M] [\phi_E]; \quad [\backslash K_{E\backslash}] = [\phi_E]^T [K] [\phi_E] \quad (6)$$

设 ϕ_E 已经正则化, 且整个系统的振动频率 ω 远远地小于部件的某阶频率 ω_h^* 。则对于高阶的 $P_h (h \geq h^*)$ 有

$$|\ddot{P}_h| \ll \omega_h^2 |P_h| \quad (7)$$

故对于高阶的模态坐标有

$$\{P_h\} \doteq [\backslash \omega_h^{-2} \backslash] [\phi_h]^T \{f\} \quad (8)$$

将(2.8)代入(2.2)式得

$$\begin{aligned} \{x\} &= [\phi_R]\{P_R\} + [\phi_h][\backslash \omega_h^{-2} \backslash][\phi_h]^T \{f\} + [\phi_L]\{P_L\} \\ &= [\phi_R]\{P_R\} + [\phi_L]\{P_L\} + \{[\phi_E][\backslash \omega_E^{-2} \backslash][\phi_E]^T \\ &\quad - [\phi_L][\backslash \omega_L^{-2} \backslash][\phi_L]^T\} \{f\} \\ &= [\phi_R]\{P_R\} + [\phi_L]\{P_L\} + \{[R]^T [A] [R] \\ &\quad - [\phi_L][\backslash \omega_L^{-2} \backslash][\phi_L]^T \{f\} \end{aligned} \quad (9)$$

其中 L 表示低阶保留模态, $[R] = [I] - [M][\phi_R][\phi_R]^T$ 其证明见附录一。

(9) 式的结果表示, 物理向量由三部份组成; 第一部份表示刚体运动, 第二部份表示低阶的弹性振动; 第三部份表示高阶弹性振动的近似贡献。

事实上, 由计算结果知: 在(2.9)式中, 不计 $[\phi_L][\omega_L^{-2}][\phi_L]^T$ 所得的结果也相差无几。

2) Craig-Bampton 方法的推导

取方程(1)的上半部份得

$$M_{ii}\ddot{x}_i + K_{ii}x_i = -(M_{ij}, K_{ij}) \begin{Bmatrix} \ddot{x}_j \\ x_j \end{Bmatrix} \quad (10)$$

将上式视为一界面固定, 内部作用有力

$$-(M_{ij}, K_{ij}) \begin{Bmatrix} \ddot{x}_j \\ x_j \end{Bmatrix} \triangleq \{f\} \quad (11)$$

的结构。根据模态加速度法的推导, 类似C-R法可得

$$\{x_i\} = (K_{ii}^{-1} - [\phi_L][\omega_L^{-2}][\phi_L]^T)\{f\} + [\phi_L]\{P_L\} \quad (12)$$

可以证明(2.12)的结果同

$$\{x_i\} = [K_{ii}]^{-1}\{f\} + [\phi_L]\{P_L\} \quad (13)$$

是一致的。(见附录二)

结合(11), (12)得

$$\{x_i\} = -[K_{ii}]^{-1}(M_{ij}, K_{ij}) \begin{Bmatrix} \ddot{x}_j \\ x_j \end{Bmatrix} + [\phi_L]\{P_L\}$$

忽略界面加速度的影响, 上式成为

$$\{x_i\} = -[K_{ii}]^{-1}[K_{ij}]\{x_j\} + [\phi_L]\{P_L\}$$

即

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_L & -K_{ii}^{-1}K_{ij} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_L \\ x_j \end{Bmatrix} \quad (14)$$

此即为熟悉的C-B法部件物理坐标的表示。文[19]考虑了 $\{\ddot{x}_j\}$ 对 $\{x_i\}$ 的影响, 使得计算结果精度有所提高。

2. 用模态加速度法推导复模态综合法部件的物理坐标表达式

对于非比例阻尼结构, 直接求解二次特征值问题是很困难的, 常规地, 将其化成状态向量的形式

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

方程(15)同方程

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (16)$$

是完全等价的, 只是形式上的不同, 记

$$\{Y\} = \{x^T, \dot{x}^T\}^T, \{F^*\} = \{F^T, 0\}^T$$

及

$$[A] = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \quad (17)$$

则(15)可以写成

$$[A]\{\dot{Y}\} + [B]\{Y\} = \{F^*\} \quad (18)$$

其中 $[M]$, $[C]$, $[K]$ 均为正定、对称的实数矩阵。

将 $\{x\} = \{\phi\}e^{i\lambda t}$ 及 $\{\dot{x}\} = \lambda\{\phi\}e^{i\lambda t}$ 代入 (18) 得

$$\{[A]\lambda + [B]\}\{\phi\} = \{F^*\} \quad (19)$$

其中 $\{\psi\} = \{\phi^T, \phi^T\lambda\}^T$ 。

因为系统是欠阻尼的。因此，这些特征值共轭成对出现^[12]。记作

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots, \lambda_{2n}$$

其中 $\lambda_{2i} = \bar{\lambda}_{2i-1}$ ($i=1, 2, \dots, n$)

当 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 时, $\{\psi_i\}$, $\{\psi_j\}$ 对于 $[A]$ 、 $[B]$ 满足加权正交。

设矩阵 $[A]^{-1}[B]$ 不亏损, 那么 $\{Y\}$ 就可以表示成 $\{\psi_i\}$ ($i=1, 2, \dots, 2n$) 的线性组合。

$$\{Y\} = [\psi]\{P\} = [\psi_L]\{P_L\} + [\psi_h]\{P_h\}$$

代入 (2.19) 式得 (假设 $\{\psi\}$ 已对 A 规范化)

$$\dot{P}_i + \lambda_i P_i = \{\phi_i^T, \lambda_i \phi_i^T\}\{F^*\} \quad (20)$$

根据模态加速度类似的推导将 $\{Y\}$ 写成

$$\begin{aligned} \{Y\} &= [B]^{-1}\{F^*\} - [B]^{-1}[A]\{\dot{Y}\} \\ &= [B]^{-1}\{F^*\} - [B]^{-1}[A]\sum_{i=1}^{2n}\{\psi_i\}\dot{P}_i \end{aligned}$$

当 $|\lambda_n| \gg |\lambda|$ 时 (λ 为系统振动频率, 而 λ_n 为部件高阶频率)

$$P_h \doteq \frac{1}{\lambda_h}\{\phi_h^T, \lambda_h \phi_h^T\}\{F^*\} \quad (21)$$

最终得

$$\begin{aligned} \{Y\} &= [B]^{-1}\{F^*\} + \begin{bmatrix} \phi_L A_L^{-1} \phi_L^T & \phi_L \phi_L^T \\ \phi_L \phi_L^T & \phi_L A_L \phi_L^T \end{bmatrix} \{F^*\} + [\psi_L]\{P_L\} \\ &= \begin{bmatrix} K^{-1} + \phi_L A_L^{-1} \phi_L^T \\ \phi_L \phi_L^T \end{bmatrix} \{F\} + [\psi_L]\{P_L\} \end{aligned} \quad (22)$$

其中 L 表示低阶的保留复模态。

$$\{x\} = (K^{-1} + \phi_L A_L^{-1} \phi_L^T)\{F\} + \sum_{i=1}^{2l} \{\phi_i\}P_i \quad (23)$$

倘若系统的阻尼是等于零, 容易证明 (23) 退化成 (9)。

3. 系统运动方程的形式

设有两个部件 α 、 β (若部件数多于 2 也很容易推广), 部件的运动方程为

$$\begin{cases} [M_\alpha]\{\ddot{x}_\alpha\} + [C_\alpha]\{\dot{x}_\alpha\} + [K_\alpha]\{x_\alpha\} = \{F_\alpha\} \\ [M_\beta]\{\ddot{x}_\beta\} + [C_\beta]\{\dot{x}_\beta\} + [K_\beta]\{x_\beta\} = \{F_\beta\} \end{cases} \quad (24)$$

α 、 β 之间的连续条件为

$$\{x_\alpha\}_j = \{x_\beta\}_j, \{F_\alpha\}_j + \{F_\beta\}_j = 0 \quad (25)$$

且

$$\begin{aligned} \{x_\alpha\} &= [\phi_{\alpha L}, \phi_{\alpha\alpha}] \begin{Bmatrix} P_{\alpha L} \\ F_{\alpha j} \end{Bmatrix} \\ \{x_\beta\} &= [\phi_{\beta L}, \phi_{\beta\alpha}] \begin{Bmatrix} P_{\beta L} \\ F_{\beta j} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

系统的物理坐标表达式为

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{\alpha L} & \phi_{\alpha\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{\beta L} & \phi_{\beta\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{\alpha L} \\ F_{\alpha j} \\ P_{\beta L} \\ F_{\beta j} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$\text{其中 } [\phi_{\alpha\alpha}] = [K_\alpha^{-1} + \phi_{\alpha L} \Lambda_\alpha^{-1} \phi_{\alpha L}^T] [f_{\alpha\alpha}]$$

$$[\phi_{\beta\alpha}] = [K_\beta^{-1} + \phi_{\beta L} \Lambda_\beta^{-1} \phi_{\beta L}^T] [f_{\beta\alpha}]$$

$[f_{\alpha\alpha}]$ 、 $[f_{\beta\alpha}]$ 分别表示在 α 、 β 中各交界面坐标依次取1而其余坐标全部取零所对应的矩阵。

将约束条件(25)记成对 $\{P_{\alpha L}^T, F_{\alpha j}^T, P_{\beta L}^T, F_{\beta j}^T\}^T$ 的约束,即

$$[G] \begin{Bmatrix} P_{\alpha L} \\ F_{\alpha j} \\ P_{\beta L} \\ F_{\beta j} \end{Bmatrix} = 0$$

其中 G^T 为高矩阵,因而存在高矩阵 S 满足

$$[G] \cdot [S] = 0$$

将 $\{P_{\alpha L}^T, F_{\alpha j}^T, P_{\beta L}^T, F_{\beta j}^T\}^T$ 记成

$$\{P_{\alpha L}^T, F_{\alpha j}^T, P_{\beta L}^T, F_{\beta j}^T\}^T = [S] \cdot \{q\} \quad (27)$$

因而

$$\begin{Bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{\alpha L} & \phi_{\alpha\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{\beta L} & \phi_{\beta\alpha} \end{bmatrix} [S] \{q\} \triangleq [\psi] [S] \{q\} \quad (28)$$

此处 $\{q\}$ 为独立的坐标。事实上,由于 $\{x\}$ 的表达式中仅包含部件的低阶模态,因而,若将(28)代入(24)则不能严格满足的。记误差

$$\{R\} = \begin{bmatrix} M_\alpha & 0 \\ 0 & M_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_\alpha \\ \ddot{x}_\beta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\alpha & 0 \\ 0 & C_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_\alpha \\ \dot{x}_\beta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_\alpha & 0 \\ 0 & K_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \end{Bmatrix} \quad (29)$$

此误差表示系统的不平衡力,令其虚功为零

$$\begin{aligned} \delta W &= \{\delta x_\alpha^T, \delta x_\beta^T\} \cdot \{R\} \\ &= \{\delta x_\alpha^T, \delta x_\beta^T\} (\{R\} + \{F_\alpha^T, F_\beta^T\}^T) - \{\delta x_\alpha^T, \delta x_\beta^T\} \cdot \{F_\alpha^T, F_\beta^T\}^T \\ &= \delta \{x_\alpha^T, x_\beta^T\} (\{R\} + \{F_\alpha^T, F_\beta^T\}^T) - (\{\delta x_\alpha^T\} \{F_\alpha\} + \{\delta x_\beta^T\} \{F_\beta\}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

若仅考虑自由振动,则 $\{F_\alpha\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{\alpha j} \end{Bmatrix}$, $\{F_\beta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{\beta j} \end{Bmatrix}$

$$\text{所以 } (\{\delta x_a^T\}\{F_a\} + \{\delta x_\beta^T\}\{F_\beta\}) = \{\delta x_{a_j}^T\}\{F_{a_j}\} + \{\delta x_{\beta_j}^T\}\{F_{\beta_j}\} = 0 \quad (31)$$

其中考虑了约束条件(25)。

结合(28), (30)及(31)得

$$\{\delta q^T\}([M^*]\{\ddot{q}\} + [C^*]\{\dot{q}\} + [K^*]\{q\}) = 0 \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned} [M^*] &= [S]^T [\psi]^T \begin{bmatrix} M_a & 0 \\ 0 & M_\beta \end{bmatrix} [\psi] [S] = [S]^T \begin{bmatrix} M_a^* & 0 \\ 0 & M_\beta^* \end{bmatrix} [S] \\ [K^*] &= [S]^T [\psi]^T \begin{bmatrix} K_a & 0 \\ 0 & K_\beta \end{bmatrix} [\psi] [S] = [S]^T \begin{bmatrix} K_a^* & 0 \\ 0 & K_\beta^* \end{bmatrix} [S] \\ [C^*] &= [S]^T [\psi]^T \begin{bmatrix} C_a & 0 \\ 0 & C_\beta \end{bmatrix} [\psi] [S] = [S]^T \begin{bmatrix} C_a^* & 0 \\ 0 & C_\beta^* \end{bmatrix} [S] \\ [M^*]\{\ddot{q}\} + [C^*]\{\dot{q}\} + [K^*]\{q\} &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

将 $\{q\} = \{Q\}e^{\lambda t}$ 代入(2.33), 且写成

$$\left(\begin{bmatrix} C^* & M^* \\ M^* & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} K^* & 0 \\ 0 & -M^* \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} Q \\ Q\lambda \end{Bmatrix} = 0 \quad (34)$$

其中 $Z_i^* = [\phi_{iL}, \phi_{i\alpha}]^T \cdot Z_i \cdot [\phi_{iL}, \phi_{i\alpha}] \quad i = \alpha, \beta; Z = M, K, C$

计算方程(34)的低阶特征对可得系统的前若干阶特征对。对于物理坐标的系统模态可用

$$\begin{Bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{Bmatrix}_i = [\psi] [S] \{Q\}_i$$

反变换得到。

由于(34)的阶数远远地低于系统的物理坐标数, 因而, 计算过程得到大大地简化。

三、数值计算

为了检验方法的正确性和可靠性, 本文对下图所示的两端固支梁的振动特性进行了计算。 α 部件由 6 个单元组成, β 部件由 4 个单元组成。分别计算了三种情况:

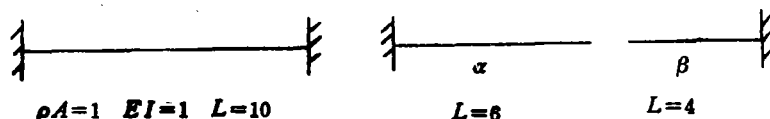
1) 整体阻尼是比例的,

$$C_\alpha = 0.02K_\alpha, \quad C_\beta = 0.02K_\beta$$

2) 部件阻尼是比例的, 而整体阻尼非比例的,

$$C_\alpha = 0.02K_\alpha, \quad C_\beta = 0.01K_\beta$$

3) 部件阻尼是非比例, 整体阻尼亦是非比例。在例 2 的基础上将 C_α 、 C_β 的对角线各乘以一因子, 此时取为 1.1。



下列的各表仅以频率(λ)的实部(σ)和虚部(ω)作为比较。为了节省篇幅仅列出部份结果。

设部件 α 、 β 的首项舍去频率为 $\lambda_{\alpha r}$ 、 $\lambda_{\beta r}$ ，由第二节的模态加速度推导知，系统的 λ 必须满足

$$|\lambda| < \min(|\lambda_{\alpha r}|, |\lambda_{\beta r}|) \quad (35)$$

时所得的结果才正确。因此，计算结果只保留了满足(35)的 λ 。事实上，在计算中可以发现：当 λ 不满足(35)时，误差急剧增大。

表1列出了部件频率，表2对应于例2的结果的百分比误差。表3为例3的计算结果。其中精确解以十个单元有限元解为准。

从计算结果可见，随着保留模态数的增多，复模态综合结果准确地收敛到有限元解，其收敛速度大大地优于Craig-Chung的[14]，[15]及L. Wu-R. Creif的，[15]且计算工作量又远远地少于文[16]、[17]。

表中的 N_α 、 N_β 分别表示取部件保留模态的“对”数。 N_i 表示最终形成广义特征问题的阶数。由于部件模态是两两共轭的，当部件阻尼是比例时每对模态中只有一个是独立的，这就使得 N_i 的数目大大地减少。对于部件阻尼不可解耦的情况，由于部件方程只有 N_α 和 N_β 阶，若取的保留数比 N_α 或 N_β 大时，其影响只反应在联结模态中，其影响对高阶明显，对低阶影响不大。有幸的是：工程中多数结构的自由度数往往很大，而从实验得出的只是很少几阶模态。因而上述情况基本上可以排除。另外，如何搭配 N_α 和 N_β 也是十分关键的。它们的最佳搭配将使模态综合法更加有效。原则上，从第二节的推导可知，部件物理坐标的表达取决于部件舍去模态。因此，最佳搭配应使各部件的物理坐标表达式的误差最接近，即 $|\lambda_{\alpha r}|$ 同 $|\lambda_{\beta r}|$ 最接近。

四、结 论

本文提出了一种考虑高阶模态影响的自由界面位移向量复模态综合法。根据虚功原理及连续条件对物理坐标进行两次变换，只要用少数几个由实验或计算得出的部件复模态参加综合就能达到满意的结果。着重用模态加速度法作为推导工具，建立实、复模态的内在联系。复模态综合技术实施的另一难题在于部件阻尼矩阵的如何确定。本文认为：在部件模态参数确定的情况下，根据文[18]所确定的质量矩阵、刚度矩阵及阻尼矩阵在当前缺乏强有力的工具时，仍不愧为一种有效方法。从而使计算更有效地同实验相结合。模态综合法着重解决大结构在分散实验、生产和安装情况下的特性问题。在大型工程（诸如航天飞机）中将会得到进一步的应用和完善。

表 1

α 部 件	$C_\alpha = 1/50 * K_\alpha$	(例 8)
		0.964E-4 + j0.977E-1; 0.375E-2 + j0.612E 0 0; 0.295E-1 + j0.172E 0 1; 0.114E 0 0 + j0.338E 0 1; 0.318E 0 0 + j0.563E 0 1; 0.711E 0 0 + j0.840E 0 1; 0.169E 0 1 + j0.129E 0 2; 0.319E 0 1 + j0.176E 0 2; 0.595E 0 1 + j0.237E 0 2; 0.109E 0 2 + j0.312E 0 2; 0.186E 0 2 + j0.391E 0 2; 0.358E 0 2 + j0.479E 0 2;
β 部 件	$C_\beta = 0.01K_\beta$	(例 8)
		0.241E-3 + j0.220E 0 0; 0.950E-1 + j0.138E 0 1; 0.755E-1 + j0.389E 0 1; 0.294E 0 0 + j0.766E 0 1; 0.102E 0 1 + j0.142E 0 2; 0.262E 0 1 + j0.227E 0 2; 0.659E 0 1 + j0.357E 0 2; 0.177E 0 2 + j0.569E 0 2;

表 2

实 部				虚 部					
	$N_\alpha = 10;$	8;	6;	5;		$N_\alpha = 10;$	8;	6;	5;
	$N_\beta = 6;$	5;	4;	3;		$N_\beta = 6;$	5;	4;	3;
	$N_t = 16;$	13;	10;	8;		$N_t = 16;$	13;	10;	8;
1.	0.00	0.00	0.00	0.00	1.	0.00	0.00	0.00	0.00
2.	0.00	0.00	0.00	0.00	2.	0.00	0.00	0.00	0.00
3.	0.00	0.00	0.00	0.00	3.	0.00	0.00	0.00	0.00
4.	0.00	0.00	0.00	0.01	4.	0.00	0.00	0.00	0.01
5.	0.00	0.00	0.00	0.02	5.	0.00	0.00	0.00	0.01
6.	0.00	0.00	0.03	0.36	6.	0.00	0.00	0.01	0.12
7.	0.00	0.00	0.02	4.49	7.	0.00	0.00	0.02	1.08
8.	0.00	0.01	0.28		8.	0.00	0.00	0.06	
9.	0.00	0.04	0.78		9.	0.00	0.02	0.48	
10.	0.00	0.11			10.	0.00	0.03		
11.	0.02	0.49			11.	0.00	0.11		
12.	0.06	5.26			12.	0.02	0.88		
13.	0.04				13.	0.01			
14.	1.90				14.	0.03			
15.	7.81				15.	1.29			

表 3

$N_\alpha = N_\beta = 1, N_t = 4$	$N_\alpha = N_\beta = 2, N_t = 8$	$N_\alpha = 4, N_\beta = 2, N_t = 12$
0.2195E-1 + j0.2227;	0.2195E-1 + j0.2227; 0.2473E-1 + j0.6164; 0.3743E-1 + j1.218;	0.2195E-1 + j0.2227; 0.2473E-1 + j0.6164 0.3780E-1 + j1.210; 0.6288E-1 + j2.008; 0.1083 + j3.001;
FEM(10 elements)		
0.2195E-1 + j0.2227		
0.2473E-1 + j0.6164		
0.3780E-1 + j1.210;		
0.6288E-1 + j2.008;		
0.1083 + j3.001;		

附录一

证明: $[\phi_B] [\backslash \omega_E^{-2}] [\phi_B]^T = [R]^T [G^*] [R]$

其中

$$[G^*] = \begin{bmatrix} K_{ii}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [R] = [I] - [M] [\phi_r] [\phi_r]^T.$$

记 $[a_B] = [\phi_B] [\backslash \omega_E^{-2}] [\phi_B]^T$, 则

$$[a_B] = [\phi_B] [\backslash \omega_E^{-2}] [\phi_B]^T [K] [\phi_B] [\backslash \omega_E^{-2}] [\phi_B]^T$$

其中

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix},$$

$$[K] [G^*] [K] = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{ji} K_{ii}^{-1} K_{ij} \end{bmatrix}$$

其中 j 表示界面上的静定约束。

设 K_{ii} 是 $m \times m$ 矩阵, 则 $r(K) = m$ 。 $[K]$ 经过初等变换可化为

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & 0 \\ 0 & K_{jj} - K_{ji} K_{ii}^{-1} K_{ij} \end{bmatrix} \triangleq [D]$$

则 $r(K) = r(D) = r(K_{ii}) + r(K_{jj} - K_{ji} K_{ii}^{-1} K_{ij}) = m$

所以 $r(K_{jj} - K_{ji} K_{ii}^{-1} K_{ij}) = 0$

即 $[K_{jj}] = [K_{ji}] [K_{ii}^{-1}] [K_{ij}]$

因而 $[K] [G^*] [K] = [K]$

这样 $[a_B] = [\phi_B] [\backslash \omega_E^{-2}] [\phi_B]^T [K] [G^*] [K] [\phi_B] [\backslash \omega_E^{-2}] [\phi_B]^T$

又 $[K] [\phi_B] [\backslash \omega_E^{-2}] [\phi_B]^T = [M] [\phi_B] [\phi_B]^T = [M] ([M]^{-1} - [\phi_r] [\phi_r]^T)$
 $= [I] - [M] [\phi_r] [\phi_r]^T = [R]$

所以 $[a_B] = [R]^T [G^*] [R]$

证毕

附录二

证明 记

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix}_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} \phi_L & -K_{ii}^{-1} K_{ij} & -K_{ii}^{-1} M_{ij} \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_L \\ x_j \\ \bar{x}_j \end{Bmatrix}_{\alpha, \beta} = \{\phi P\}_{\alpha, \beta}$$

(2.2.1)

(2.2.1) 式对 α 、 β 部件组成立。

同理记

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix}_{\alpha, \beta}^* = \begin{bmatrix} \phi_L & -K_{ii}^{-1} K_{ij} + \phi_L A_L^{-2} \phi_L^T K_{ij} & -K_{ii}^{-1} M_{ij} + \phi_L A_L^{-2} \phi_L^T M_{ij} \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}_{\alpha, \beta}$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} P_L \\ x_j \\ \bar{x}_j \end{Bmatrix}_{\alpha, \beta} = (\phi DP)_{\alpha, \beta}$$

其中

$$[D]_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} I & \Lambda_L^{-2} \phi_L^T K_{i,j} & \Lambda_L^{-2} \phi_L^T M_{i,j} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}_{\alpha, \beta}$$

对应的自由振动方程为

$$[M^{**}] \{\dot{P}\} + [K^{**}] \{P\} = 0$$

其中

$$\begin{aligned} [M^{**}] &= [S]^T \begin{bmatrix} D_\alpha^T & 0 \\ 0 & D_\beta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_\alpha^T & 0 \\ 0 & \phi_\beta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_\alpha & 0 \\ 0 & M_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_\alpha & 0 \\ 0 & \phi_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_\alpha & 0 \\ 0 & D_\beta \end{bmatrix} \\ &\cdot [S] \\ &= [S]^T \begin{bmatrix} D_\alpha^T & 0 \\ 0 & D_\beta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_\alpha^* & 0 \\ 0 & M_\beta^* \end{bmatrix} [S] \end{aligned}$$

同理

$$[K^{**}] = [S]^T \begin{bmatrix} D_\alpha^T & 0 \\ 0 & D_\beta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_\alpha^* & 0 \\ 0 & K_\beta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_\alpha & 0 \\ 0 & D_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_\alpha & 0 \\ 0 & D_\beta \end{bmatrix} [S]$$

$[M_\alpha^*]$, $[M_\beta^*]$, $[K_\alpha^*]$, $[K_\beta^*]$ 表示取 (2.21) 式所对应的 $[\phi_\alpha]^T [M_\alpha] [\phi_\alpha]$, $[\phi_\beta]^T [M_\beta] [\phi_\beta]$, $[\phi_\alpha]^T [K_\alpha] [\phi_\alpha]$, $[\phi_\beta]^T [K_\beta] [\phi_\beta]$

$$\begin{aligned} [S]^T \begin{bmatrix} D_\alpha^T & 0 \\ 0 & D_\beta^T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_\alpha^T & 0 \\ 0 & D_\beta^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \Lambda_{\alpha L}^{-2} \phi_{\alpha L}^T K_{\alpha i,j} & I & 0 & \Lambda_{\beta L}^{-2} \phi_{\beta L}^T K_{\beta i,j} & I & 0 \\ \Lambda_{\alpha L}^{-2} \phi_{\alpha L}^T M_{\alpha i,j} & 0 & I & \Lambda_{\beta L}^{-2} \phi_{\beta L}^T M_{\beta i,j} & 0 & I \end{bmatrix} \\ &= [E]^T [S]^T \end{aligned}$$

$$[E]^T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \Lambda_{\alpha L}^{-2} \phi_{\alpha L}^T K_{\alpha i,j} & \Lambda_{\beta L}^{-2} \phi_{\beta L}^T K_{\beta i,j} & I & 0 \\ \Lambda_{\alpha L}^{-2} \phi_{\alpha L}^T M_{\alpha i,j} & \Lambda_{\beta L}^{-2} \phi_{\beta L}^T M_{\beta i,j} & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$[M^{**}] = [E]^T [M^*] [E]; \quad [K^{**}] = [E]^T [K^*] [E]$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad [M^{**}]^{-1} [K^{**}] &= [E^{-1}] [M^*]^{-1} [E]^{-T} [E]^T [K^*] [E] \\ &= [E^{-1}] ([M^*]^{-1} [K^*]) \cdot [E] \end{aligned}$$

即取两种不同的模态集对应的结果是一致的。

参 考 文 献

- [1] Hurty. W.C, ASCE J, Engng. Mech. Div., 85, 51—69(1960).
- [2] Hurty. W. C, AIAA J, 3. 4, 678—689(1965).
- [3] Craig. R. R. Jr and Bampton, M. C. C, AIAA J, 6, 7, 1313—1319(1968).
- [4] Goldman. R. L, AIAA J, 7, 6, 1152—1154(1969).
- [5] Hou, S, Shock Vib. Eull, 40, 4, 25—39(1969).
- [6] MacNeal. R. H, Computers and structures, 1, 4, 581—601(1971).
- [7] Craig. R. R. Jr. and Chang, C—J, NASA CP—2001, 393—408(1976).
- [8] Rubin. S, AIAA J, 13, 8, 995—1006(1975).
- [9] 方同. 多自由度线性阻尼系统的模态分析法. 固体力学学报 81.3.
- [10] 胡海昌. 多自由度线性阻尼系统的振动问题, 固体力学学报 1(1980).
- [11] 倪金福、张阿舟, 关于复模态理论的几个问题, 南京航空学院学报, 固体力学专辑, 总第42期.
- [12] 张阿舟、朱德懋, 阻尼系统的振动分析, 南航学报, 1983年第一期, 振动专辑(二)。
- [13] Hasselman. T.K. and Kaplan. A., Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Trans, ASME, 96, 327—333(1974).
- [14] Craig. R. R. Jr and Chung. Y. T, AIAA Paper 81—0560.
- [15] Greif. R. and Wu. L., Shock and Vib. Digest, 15, 1, 17—24(1983).
- [16] Chung, Y. Tand Craig. R. R. Jr, AIAA Paper 83—0965.
- [17] Wu, L and Greif, R, Journal of Sound and Vibration, 90, 3, 407—422(1983).
- [18] 陈兴国, 周科健, 沈玉梅, 用加权最小二乘法确定阻尼系系统的结构参数, 国防科技大学资料, 84—1042.
- [19] 沈玉梅, 结构振动模态综合及参数辨识, 国防科技大学84届学士论文。

Application of Mode Acceleration Method to Free-Interface Complex Mode Synthesis

Chen Xingguo Zhou Kejian

Abstract

A complex mode synthesis method for the consideration of the effect of adjoint force is presented here. First, the expression of component displacement vectors is derived by mode acceleration method. Then, the equations of motion in generalized coordinates are derived by virtual work principle. Thus, the number of independent coordinates is greatly decreased and only a few lower complex modes of component are required in synthesis.