

解析分离振动模态的 组合频率响应函数法

刘瑞岩 黄映云

摘要 本文利用多点随机激励试验技术提出了一种振动模态参数识别的新方法,即组合频率响应函数法,给出了理论模型和计算公式,并通过工程算例进行了验证。本方法可有效地用于大型复杂结构的振动模态试验分析。方法简单,精度较高,并能解析分离具有一定程度的密集模态。

一、引言

振动模态参数识别是试验模态分析的主要环节之一。随着现代测试系统和计算技术的发展,其内容不断扩充,方法不断创新、应用范围不断扩大。试验模态分析已经成为验证、建立、修改和优化结构计算模型和产品鉴定的主要手段,是结构动力学分析的基础。

建立在频率响应函数基础上的模态参数识别技术,理论上较为成熟,物理概念直观,在工程实际中得到了广泛的应用。但是,当系统阻尼较大,主模态较密集时,以纯模态为基础的单自由度曲线拟合识别方法就相形见绌。多自由度曲线拟合法虽能得到较好的结果,但运算复杂,并要给定某一初值进行迭代,有时收敛性也不够好。

利用单点激励、多点测量响应(或单点测量响应、多点激励)技术可以获得频率响应函数矩阵的一列(或一行),由此可求得系统的全部模态参数。但随着试验分析设备的不断发展,多点宽频带激振技术越来越引起人们的重视,它采用频响函数矩阵的多列(或多行),充分而有效地利用重复信息来提高识别精度。这对大型复杂结构的模态试验更为有效,而且可以弥补单一信息可能存在的某些缺陷,并能将同一参数的不同估计用优化方法处理成该参数的最佳估计。文献[1]和[2]对此作了专门的研究,但都仅限于模态向量的优化估计,而未对模态特征值进行讨论。

结构模态参数估计的精度不但取决于频响函数的测试质量,而且还取决于理论模型与识别方法的优劣。本文在实模态频响函数数学模型的基础上提出并讨论了组合频率响应函数数学模型。该模型充分利用频响函数的重复信息,可对具有一定密集程度的模态进行有效的解析分离,并具有精度较高,易于计算和改善试验数据质量等特点。本文通过

对实际结构的模态试验分析,验证了上述模型和识别方法,取得了较满意的结果。

二、组合频率响应函数

对于具有粘性阻尼的 N 个自由度系统,其 q 点激励、 p 点响应之间的频响函数为

$$H_{pq} = \frac{Y_p}{F_q} = \sum_{r=1}^N \left(\frac{A_{pqr}}{j\omega - S_r} + \frac{A_{pqr}^*}{j\omega - S_r^*} \right) \quad (1)$$

其中 Y_p —— p 点响应的 Fourier 变换; F_q —— q 点激励的 Fourier 变换;

j —— $\sqrt{-1}$; S_r ——第 r 阶模态的复特征值; $S_r = -n_r + j\omega_{dr}$;

n_r ——第 r 阶模态的衰减系数; ω_{dr} ——第 r 阶模态的有阻尼自由振动频率;

ω ——激励频率; * 表示复共轭;

A_{pqr} ——对应于极点(即特征值) S_r 的留数。在实模态时, $A_{pqr} = jV_{pqr}$ 为一纯虚数。

考虑在比例阻尼下的实模态情况, (1)式为

$$H_{pq} = \sum_{r=1}^N \left[\frac{jV_{pqr}}{n_r + j(\omega - \omega_{dr})} - \frac{jV_{pqr}}{n_r + j(\omega + \omega_{dr})} \right] \quad (2)$$

其实部和虚部分别为

$$R_e(H_{pq}) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{(\omega - \omega_{dr})V_{pqr}}{n_r^2 + (\omega - \omega_{dr})^2} - \frac{(\omega + \omega_{dr})V_{pqr}}{n_r^2 + (\omega + \omega_{dr})^2} \right] \quad (3)$$

$$I_m(H_{pq}) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{n_r V_{pqr}}{n_r^2 + (\omega - \omega_{dr})^2} - \frac{n_r V_{pqr}}{n_r^2 + (\omega + \omega_{dr})^2} \right] \quad (4)$$

设共有 M 个响应测量点, L 个激励点, 因此可获得 $M \times L$ 个频响函数。将测得的各种频响函数进行加权求和, 其权因子记为 α_{pq} , 则有

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{q=1}^L \sum_{p=1}^M (\alpha_{pq} H_{pq}) \\ &= \sum_{q=1}^L \sum_{p=1}^M \sum_{r=1}^N \left[\frac{\alpha_{pq} \cdot jV_{pqr}}{n_r + j(\omega - \omega_{dr})} - \frac{\alpha_{pq} \cdot jV_{pqr}}{n_r + j(\omega + \omega_{dr})} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

这里的 $H(\omega)$ 已失去了普通频响函数所具有的物理意义。我们把这种加权线性求和后的频响函数定义为组合频率响应函数, 以下简称为组合频响。

下面讨论权因子 α_{pq} 的选取原则以及组合频响的特点。

考察组合频响的虚部 $H_I(\omega)$

$$H_I(\omega) = \sum_{q=1}^L \sum_{p=1}^M \sum_{r=1}^N \left[\frac{\alpha_{pq} \cdot n_r V_{pqr}}{n_r^2 + (\omega - \omega_{dr})^2} - \frac{\alpha_{pq} \cdot n_r V_{pqr}}{n_r^2 + (\omega + \omega_{dr})^2} \right] \quad (6)$$

由于 n_r 、 ω_r 是结构的整体振动特性, 与响应点及激励点的选择无关, 因此

$$H_I(\omega) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{n_r}{n_r^2 + (\omega - \omega_{dr})^2} \sum_{q=1}^L \sum_{p=1}^M (\alpha_{pq} V_{pqr}) \right]$$

$$\left. - \frac{n_r}{n_r^2 + (\omega + \omega_{dr})^2} \sum_{q=1}^L \sum_{p=1}^M (\alpha_{pq} V_{pqr}) \right]$$

$$\text{令 } a_r = \sum_{q=1}^L \sum_{p=1}^M (\alpha_{pq} V_{pqr})$$

于是

$$H_I(\omega) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{n_r a_r}{n_r^2 + (\omega - \omega_{dr})^2} - \frac{n_r a_r}{n_r^2 + (\omega + \omega_{dr})^2} \right] \quad (7)$$

一般来说, 阻尼项 n_r 很小, 若对应于各阶主模态的 $a_r (r=1, 2, \dots, N)$ 的大小无异常差异, 当 $\omega \approx \omega_{dr}$ 时, 在 (7) 式求和项中, $\frac{n_r a_r}{n_r^2 + (\omega - \omega_{dr})^2}$ 为主项, 而其它各项都较该项小。按一般单自由度曲线拟合识别方法, (7) 式中可只保留主项而略去其它各项, 以达到简化的目的。然而, 当各阶模态比较密集时, 这样做难以达到分离模态的要求, 并会给分析结果带来较大误差。

组合频响应函数数学模型不但应用了上述特性, 而且还通过适当选取权因子 α_{pq} 来调正系数 a_i , 使之达到 $a_r \gg a_i, i=1, 2, \dots, N$, 但 $i \neq r$ 。这样, 分子分母的同时作用就使 (7) 式中的主项 $\frac{n_r a_r}{n_r^2 + (\omega - \omega_{dr})^2}$ 更为突出。因此, 用组合频响分离主模态就比用原始频响应函数更为有效、精确, 并能分析一定程度的密集模态。

为了实现 $a_r \gg a_i$, 以便能比较准确地识别出第 r 阶模态特征值 ω_{dr} 和 n_r , 在 ω_{dr} 附近选一频率 ω'_r 。 α_{pq} 依照 $I_m(H_{pq})$ 在该频率点上的取值情况而定, 其选取原则是

$$\alpha_{pq} = \begin{cases} -1 & (\text{当 } |I_m(H_{pq})|_{\omega=\omega'_r} > \beta \text{ 时}) \\ 1 & (\text{当 } |I_m(H_{pq})|_{\omega=\omega'_r} < -\beta \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } |I_m(H_{pq})|_{\omega=\omega'_r} \leq \beta \text{ 时}) \end{cases} \quad (8)$$

式中, β 为一正的小量, 取 $\beta = \frac{1}{10} \max_{p,q} [|I_m(H_{pq})|_{\omega=\omega'_r}]$, 这是为了剔除第 r 阶模态节点处 (或紧邻节点处) 的频响应函数而设置的门槛值。因为在第 r 阶模态节点或节点附近处的 H_{pq} 对该阶模态信息的贡献很小, 且信噪比较低, 故应把它们剔除, 以防在识别第 r 阶模态时给组合频响带来不利的影响。

在 $|I_m(H_{pq})|_{\omega=\omega'_r} > \beta$ 时, 由 (4) 式可知, 当阻尼较小时, 在 $\omega = \omega'_r \approx \omega_{dr}$ 处, 前一项 $\frac{n_r V_{pqr}}{n_r^2 + (\omega - \omega_{dr})^2}$ 为该求和式中的主项, 在 ω_{dr} 附近 $I_m(H_{pq})$ 的正负符号由 V_{pqr} 的正负决定。依照 (8) 式选取 α_{pq} 后, 对于各个频响应函数 H_{pq} , 乘积 $\alpha_{pq} V_{pqr} (p=1, 2, \dots, M; q=1, 2, \dots, L)$ 就成为具有相同符号的数, 因此 a_r 由于是符号相同的数求和而得到增强。而对于其它各阶的 $V_{pqi} (i \neq r, i=1, 2, \dots, N)$, 由于它们是非主项, 其值较小, 并且 V_{pqi} 与 $I_m(H_{pq})|_{\omega=\omega'_r}$ 的正负符号并不完全一致。依照 (8) 式 α_{pq} 的选取原则, 乘积 $\alpha_{pq} V_{pqi}$ 的正负不定, $a_i (i \neq r)$ 由于是符号不同的数求和而相对于 a_r 来说大大减弱, 从而达到 $a_r \gg a_i$ 的目的。从等概率角度上说, 当 M, L 较大, 测点布置比较均匀时, a_i/a_r 将

趋于零。

综合上面关于(7)式主项的分析及比值 a_i/a_r 的讨论,特别是后一因素的作用,即使在模态比较密集的情况下,也完全可以将(7)式中的其他各阶模态的作用及第 r 阶共轭特征值部分的作用全部考虑成一复常数 C ,其虚部记为 C_I 。这样,(7)式简化成

$$H_I(\omega \approx \omega_{dr}) = \frac{n_r a_r}{n_r^2 + (\omega - \omega_{dr})^2} + C_I \quad (9)$$

从而用解析方法分离出主模态。

同理,对各频响函数的实部也做如上的处理,可得到组合频响的实部

$$H_B(\omega \approx \omega_{dr}) = \sum_{q=1}^L \sum_{p=1}^M \alpha_{pq} \cdot R_0(H_{pq}) \approx \frac{(\omega - \omega_{dr}) a_r}{n_r^2 + (\omega - \omega_{dr})^2} + C_B \quad (10)$$

考察原始频响函数一般单自由度识别法所采用的数学模型

$$H_{pq}(\omega \approx \omega_{dr}) = \frac{jV_{pqr}}{n_r + j(\omega - \omega_{dr})} + C'_R + jC'_I \quad (11)$$

式中 C'_R 和 C'_I 也是为了考虑其它各阶模态和共轭特征项的影响而引入的常数。它们与 C_B 和 C_I 的关系为

$$C_I = \sum_{q=1}^L \sum_{p=1}^M \alpha_{pq} C'_I \quad ; \quad C_B = \sum_{q=1}^L \sum_{p=1}^M \alpha_{pq} C'_R$$

由于 C'_I 、 C'_R 与 α_{pq} 的符号并不完全一致,它们有可能相互抵消。 C_I 和 C_B 对组合频响函数第 r 个主项的作用要比 C'_I 和 C'_R 对原始频响函数第 r 个主项的作用相对要小。因此,当 L 和 M 较大时,采用(9)和(10)式要比直接用(11)式优越,识别精度也会提高。

在大型复杂结构振动模态试验中,数 L 和 M 较大,组合频响的模态分离效果会更好。即使在 $M \times L = 2$ 的极端情况下,只要相邻模态的振型元素不完全同号,也可达到分离模态的目的。在图1中示出原始频响函数与组合频响的示性关系。由图可见,当利用一般的单自由度曲线拟合识别法难以进行时,组合频响也能达到比较理想的模态分离。

对于相邻很近的模态,例如第 r 和 $r+1$ 两阶模态,为确定 α_{pq} ,在组合频响函数时,所选

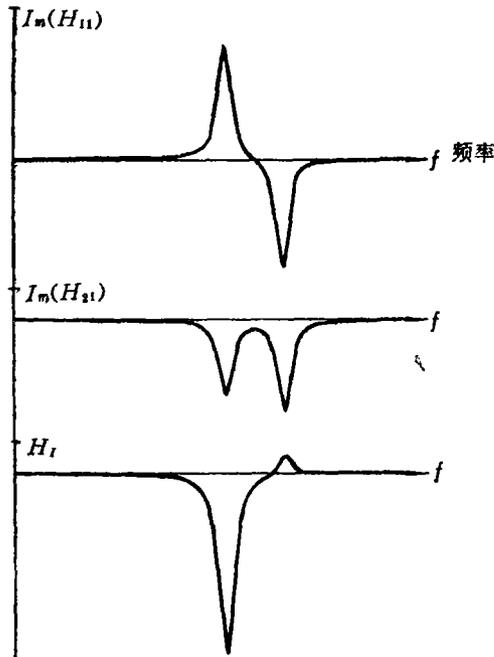


图1 组合频响函数模态分离示例

定的频率点 ω'_r 应满足下述条件

$$|\omega'_r - \omega_{dr}| < |\omega'_r - \omega_{d,r+1}|$$

如果选取 $\omega'_r < \omega_{dr}$, 就会有利于 α_{pq} 的正确选取。

当然, 从(9)和(10)式难以提取模态振型信息 V_{pqr} , 但在大多数情况下, 在识别出频响函数中的非线性参数 ω_{dr} 和 n_r 后, 再进一步用(2)式等来识别线性参数 V_{pqr} 就不难了。

在分析过程中, 可以通过对组合频响函数图象的直接观察来判断模态分离是否良好, 以保证结果的可靠, 这在工程应用中是十分重要的。

采用组合频响函数法还可以改善所用试验频响函数数据的质量, 使组合频响函数试验曲线比原始频响函数更加光滑。这是因为频响函数的加权求和, 从某种意义上讲是提高了统计自由度, 减小了随机误差。

组合频响函数法的原理简单, 易于在计算机上自动实现, 计算量不大, 适用性较广, 只要在所有测点(包括激振点)上相邻模态的振型元素符号不完全相同, 就能起到分离模态的作用。根据主振型的正交性, 只要测点布置不很特殊, 各测点相邻模态振型元素符号完全一致的概率是极小的。特别是在测点较多时, 这种情况几乎不会发生。

达到模态分离的目的后, 就可对组合频响函数数学模型采用已有的各种单自由度识别法进一步识别出模态固有频率和阻尼, 进而识别出模态振型。

三、应用实例

本文利用组合频响函数法和论文[3]提出的加权最小二乘拟合圆法进行了如下两个计算实例的振动模态参数识别:

1. 计算机模拟实例的验证

给定接近某实际结构的前三阶模态参数, 用下式形成一组模拟频响函数

$$\begin{aligned} R_e(H_{pq}) &= \sum_{r=1}^3 \frac{\psi_{qr} \psi_{pr}}{K_r} \cdot \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 \right] \left| \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta_r^2 \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 \right| \right\} + N_R \\ I_m(H_{pq}) &= \sum_{r=1}^3 \frac{\psi_{qr} \psi_{pr}}{K_r} \cdot \left\{ 2\zeta_r \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right) \left| \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta_r^2 \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 \right| \right\} + N_I \end{aligned} \quad (12)$$

式中 ψ_{qr} 和 ψ_{pr} 分别为第 r 阶主振动响应点和激励点的位移模态, K_r 和 ζ_r 分别为第 r 阶模态刚度和阻尼比, ω_r 为第 r 阶固有频率; N_R 和 N_I 表示噪声的实部和虚部(取为10%)。令 $p=1, 2, 3, 4, 5$; $q=2, 3, 5$, 共15个频响函数。取频率间隔 $\Delta f=0.5\text{Hz}$, 由此形成的模拟频响函数的典型代表曲线如图2所示。图中纵坐标为归1对数坐标, 即 $y = SC_{51} [\lg |H_{51}| - \lg (|H_{51}|_{\min})]$, 式中 $SC_{51} = 1 / [\lg (|H_{51}|_{\max}) - \lg (|H_{51}|_{\min})]$ 。

根据图2的幅频特性曲线, 在三个峰值点附近任选三个频率值27Hz、65Hz和116Hz作为确定 α_{pq} 时的频率点 ω'_r ($r=1, 2, 3$)。由此可得到三个组合频响函数 H_1 、 H_2 和 H_3 。

图3绘出了 H_2 的幅频曲线,并与理论曲线进行了比较。由图可见,与原始理论频率响应函数相比,模态达到了良好的分离。

组合频响应函数法的优点还可以从耦合常数 C_R 和 C_I 的定量分析中表现出来。以

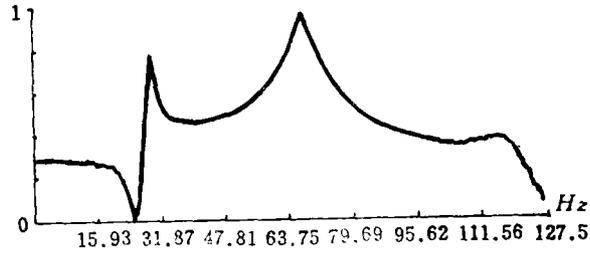


图2 模拟响应函数的幅频特性

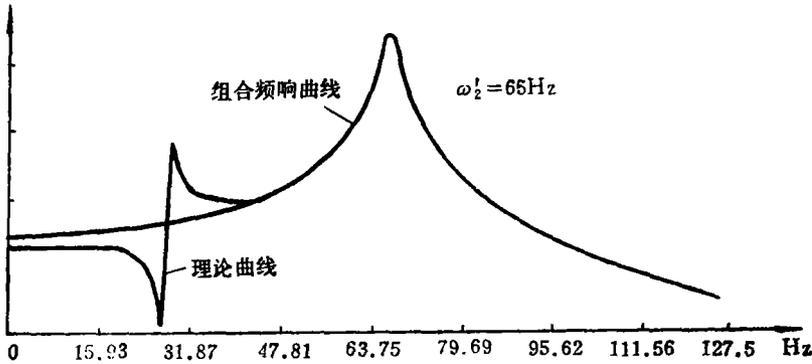


图3 第二阶模态组合频响与理论曲线的比较

原始频响应函数中耦合较为严重的第三阶模态为例. 任选一频响应函数 H_{pq} 作为比较, 其结果列于表1中. 显然, 组合频响应函数中耦合常数的作用(用 $|C_I/(H_{3I})|_{\text{峰}}$ 和 $|C_R/(H_{3R})|_{\text{峰}}$ 衡量)比原始频响应函数中耦合常数的作用(用 $|C_I'/[I_m(H_{pq})]_{\text{峰}}|$ 和 $|C_R'/[R_e(H_{pq})]_{\text{峰}}|$ 衡量)要小得多。

表1 耦合常数的比较

原始频响应函数	$C_I' = 1.37 \times 10^{-6}$	$C_R' = 9.52 \times 10^{-7}$
	$[I_m(H_{pq})]_{\text{峰}} = -1.39 \times 10^{-5}$	$[R_e(H_{pq})]_{\text{峰}} = 9.01 \times 10^{-6}$
	$ C_I'/[I_m(H_{pq})]_{\text{峰}} = 0.099$	$ C_R'/[R_e(H_{pq})]_{\text{峰}} = 0.106$
组合频响应函数	$C_I = 0.85 \times 10^{-6}$	$C_R = 1.62 \times 10^{-6}$
	$(H_{3I})_{\text{峰}} = -2.71 \times 10^{-5}$	$(H_{3R})_{\text{峰}} = 1.69 \times 10^{-5}$
	$ C_I/(H_{3I})_{\text{峰}} = 0.031$	$ C_R/(H_{3R})_{\text{峰}} = 0.096$

表2列出了该模拟算例理论值与识别值的固有频率和阻尼比的比较。由表可见, 利用本文所推荐的识别方法其识别结果与理论值极其一致。其振型数据在此不一列出了。

表 2 模拟实例理论值与识别值的比较

		固有频率 (Hz)	阻尼比
第一阶 模态	理论值	28.940	0.016
	识别值	28.938	0.016
第二阶 模态	理论值	66.920	0.022
	识别值	66.920	0.019
第三阶 模态	理论值	118.420	0.042
	识别值	118.411	0.042

2. 某战术导弹的振动模态分析

本文将上述方法用于某一导弹结构的横向弯曲振动模态试验，其激励是三个不完全相干的随机信号。有关该试验方法的特点、实施及原始频响函数的计算可参看论文[4]。利用组合频响方法和论文[3]中所推荐的识别技术，取得了比较满意的结果。表3列出了利用本文所提出的方法与多点稳态正弦激振法所获得的结果，阻尼值由于后者的分散性较大没有列出。由表可知，两种测试分析方法所得结果基本一致。图4绘出了第二阶模态的拟合圆与试验数据的拟合情况，*号表示试验数据。

表 3 某导弹结构模态试验识别结果

试验方法	第一阶		第二阶		第三阶	
	频率	阻尼比	频率	阻尼比	频率	阻尼比
三点随机激励	29.00	0.018	67.02	0.021	117.68	0.048
稳态正弦激励	28.1	/	65.1	/	112	/

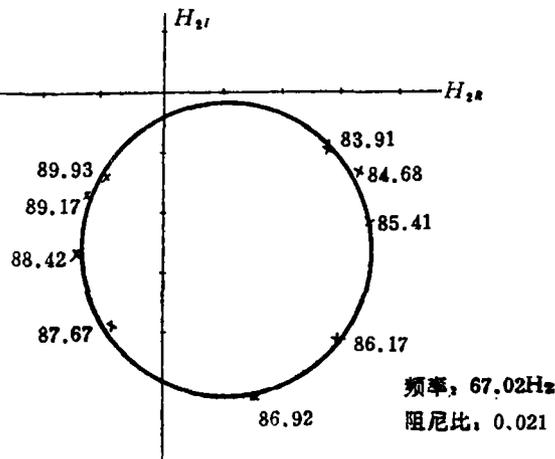


图 4 某导弹第二阶模态拟合圆

四、结 论

应用组合频率响应函数法可以有效地解析分离一定程度的密集模态,在识别系统的固有频率和阻尼值时能明显地提高识别精度,改善试验数据质量。方法简单方便,易于在计算机上实现,可有效地用于多点随机激励振动模态试验分析技术。当固有频率和阻尼值得到后,可以简单地利用通常的方法得到模态振型。本文所分析的实例,从试验数据采集到结果打印绘图都是在TRS-80微机上实现的。

本文是由刘瑞岩撰写的,大量工作是由黄映云完成的。

参 考 文 献

- [1] Richardson, M. and Kniskern, J., Identifying Modes of Large Structures from Multiple Input and Response Measurements, SAE paper, 780875.
- [2] Allemang, R. J., Rost, R.W. and Brown, D. L., Dual Input Estimation of Frequency Response Function for Automotive Structures, SAE paper, 820193.
- [3] 黄映云、刘瑞岩,解析分离模态的新方法,国防科技大学论文报告资料,85-1007(1985)。
- [4] 黄映云、刘瑞岩,用多点随机激励进行结构试验模态分析,国防科技大学论文报告资料,85-1009(1985)。

A New Method for Analytical Separating Vibration Modes

Liu Ruiyan Huang Yingyun

Abstract

This paper presents a new method for vibration modal parameter identification using experimental technique of multiple-point random excitation. The method is defined as the combined frequency response function method (CFRFM) in this paper. Theoretical model and computational formulae are developed and examined by actual engineering examples. The method can be efficiently used to experimental modal-analysis of large and complex structures. It has the advantages for simplicity, convenience and high-accuracy. The method can analytically separate closely-spaced modes in a certain extent.