

三种复合材料回转壳元素的分析比较

徐后华 洪志泉 王毅

摘要 本文针对三种复合材料回转壳元素,即截锥壳元素、考虑转角连续性的截锥壳元素和三结点等参元素,全面地分析了它们的优缺点,考察了它们的协调性条件和完备性条件。通过数值计算比较了它们的收敛速度、收敛精度和计算时间,指出了它们的使用范围。

一、引言

纤维增强复合材料迭层迴转壳是目前工程实际中使用得最多的复合材料薄壁结构,研究它的应力和变形,对于保证结构设计的合理性、指导工程应用,具有极其重要的意义。

用有限元素法对复合材料迭层迴转壳进行数值分析,已经做了许多工作。由于复合材料薄壳是分层各向异性,并且存在拉伸——剪切、拉伸——弯曲的耦合等因素,给用有限元素法分析问题带来了许多困难。并非所有用于各向同性材料迴转壳计算的元素都能推广用于迭层复合材料迴转壳并取得较好的计算结果。到目前为止,很少有人对各种复合材料迴转壳元素做一系统地归纳和分析,更缺少定量地比较,对于何种元素适合于解决何类问题尚无一确定的准则。本文针对三种复合材料迴转壳元素,即截锥壳元、考虑转角连续性的截锥壳元和三结点等参元,全面地分析了它们的优缺点,考察了它们的协调性条件和完备性条件,指出了它们的使用范围。通过数值计算,比较了它们的收敛速度、收敛精度和计算时间,得到了几点有益的结论。

二、元素列式和理论分析

1. 截锥壳元素

该元素用直线代替母线,引用了薄壳理论中的Kirchhoff假设。单元刚度矩阵和等效载荷由最小势能原理导出,在此仅给出最后结果,详细推导见文献^[1]。

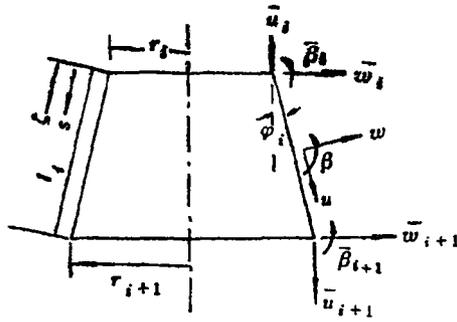


图1 截锥壳元素

位移函数:

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 s \\ w = \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3 \end{cases} \quad (1)$$

壳中面法线转角为

$$\beta = \frac{dw}{ds} \quad (2)$$

将 $\{\alpha\}$ 用结点位移 $\{\delta\}$ 表示, 则(1)有:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1-\xi)\cos\varphi_i & (1-\xi)\sin\varphi_i & 0 & \xi\cos\varphi_i & \xi\sin\varphi_i & 0 \\ -(1-3\xi^2 + 2\xi^3)\sin\varphi_i & (1-3\xi^2 + 2\xi^3)\cos\varphi_i & l(\xi-2\xi^2 + \xi^3) & -(3\xi^2 - 2\xi^3)\sin\varphi_i & (3\xi^2 - 2\xi^3)\cos\varphi_i & l(-\xi^2 - \xi^3) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \end{Bmatrix} \quad (3)$$

其中 $\{\delta\} = \{\bar{u}_i \ w_i \ \bar{\beta}_i \ \bar{u}_{i+1} \ w_{i+1} \ \bar{\beta}_{i+1}\}^T$ 是整体坐标系下的结点位移列阵。

$$\xi = s/l \quad (4)$$

几何方程:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du/ds \\ (u\sin\varphi + w\cos\varphi)/r \\ -d^2w/ds^2 \\ \frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{dw}{ds} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$= [B]\{\delta\} \quad (6)$$

物理方程:

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{12} & A_{22} & B_{12} & B_{22} \\ B_{11} & B_{12} & D_{11} & D_{12} \\ B_{12} & B_{22} & D_{12} & D_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} \quad (7)$$

其中 A_{ij} 、 B_{ij} 、 D_{ij} 为壳体的刚度系数和耦合系数^[8]。

单元刚度矩阵:

$$[K]^e = 2\pi \int_0^l [B]^T [D] [B] r ds \quad (8)$$

我们知道, 要保证元素能收敛, 位移模式必须满足: (1)在两相邻单元的公共界面上必须协调; (2)能提供单元的刚体位移; (3)满足单元的常应变要求。对于迴转壳单

元, 元素间的位移协调性条件除了挠度连续外, 还包括结点法线转角的连续性。由经典薄壳理论, $\beta = \frac{d}{d} \frac{w}{s} - \frac{u}{R}$ 。R 为第一主曲率半径。设有两单元 A、B, 在其公共结圆 C

处两元素须满足:

$$\begin{cases} (u)_C^A = (u)_C^B \\ (w)_C^A = (w)_C^B \\ (\beta)_C^A = \left(\frac{d}{d} \frac{w}{s}\right)_C^A - \left(\frac{u}{R}\right)_C^A = \left(\frac{d}{d} \frac{w}{s}\right)_C^B - \left(\frac{u}{R}\right)_C^B = (\beta)_C^B \end{cases} \quad (9)$$

对于截锥壳元素的位移模式(1), 由(3)知在两元素公共结圆处有:

$$\begin{cases} (u)_C^A = (u)_C^B \\ (w)_C^A = (w)_C^B \\ \left(\frac{d}{d} \frac{w}{s}\right)_C^A = \left(\frac{d}{d} \frac{w}{s}\right)_C^B \end{cases} \quad (10)$$

比较(9)(10)式知, 只要 $(R)_C^A = (R)_C^B$, 它们是等价的。当 $(R)_C^A \neq (R)_C^B$ 时, 它们的第三式不一样。因此对于曲率连续变化的壳体, 截锥壳元素满足了位移连续性条件, 但对于曲率有突变的壳体, 只保证了挠度连续, 转角在曲率突变处实际上是不连续的。

关于满足刚体位移条件的说明:

设在对称轴方向给一个刚体位移 \bar{u}_0 , 则

$$\begin{cases} u = \bar{u}_0 \cos \varphi_i \\ w = -\bar{u}_0 \sin \varphi_i \end{cases} \quad (11)$$

代入式(5)有: $\{\varepsilon\} = 0$ (12)

即当单元产生刚体位移时, 其应变为零, 满足了刚体位移条件。

关于位移函数满足常应变条件的说明:

将位移函数(1)代入(6)有:

$$\begin{cases} \varepsilon_s = \alpha_2 \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} (\alpha_1 \sin \varphi_i + \alpha_3 \cos \varphi_i) + (\alpha_2 \sin \varphi_i + \alpha_4 \cos \varphi_i) \cdot s + \alpha_5 \cos \varphi_i s^2 + \alpha_6 \cos \varphi_i s^3 \\ \chi_s = -2\alpha_5 - 6\alpha_6 s \\ \chi_\theta = -(\sin \varphi_i / r) (\alpha_1 + 2\alpha_5 s + 3\alpha_6 s^2) \end{cases} \quad (13)$$

其中: $1/r = 1/(r_i + s \cdot \sin \varphi_i) = (1/\sin \varphi_i) (r_i / \sin \varphi_i + s)^{-1}$
 $= (1/\sin \varphi_i) [(r_i / \sin \varphi_i)^{-1} - (r_i / \sin \varphi_i)^{-2} \cdot s + \dots]$ (14)

包含有常数项 $1/r_i$ 。

可见(13)式包含了应变的常数项。位移函数满足了常应变条件。

综上所述, 该元素的特点是:

(1) 几何关系由经典迴转壳理论而来, 元素结点自由度少, 简单易行。

(2) 满足了常应变条件和刚体位移条件, 对于壳体母线曲率是连续变化时, 还满足元素间位移协调条件。因而能保证结果收敛。

(3) 用直线代替母线,存在几何上的误差。假定了厚度和缠绕角在单元内为常量,弹性系数有误差。

(4) 引用了 Kirchhoff 直线假设,不能考虑横向剪切因素,因而仅适用于薄壳。

(5) 结点上的内力由位移求导数得到,精度上有所降低。

2. 考虑了转角连续性的截锥壳元素

针对截锥壳元素在曲率突变处转角不连续的缺点,文[3]采用了文[2]提出的修改方案,仍用直线代替母线,并考虑了元素的第一主曲率半径。

位移函数:

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 s \\ w = \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3 \end{cases} \quad (15)$$

壳中面法线转角为

$$\beta = \frac{d w}{d s} - \frac{u}{R} \quad (16)$$

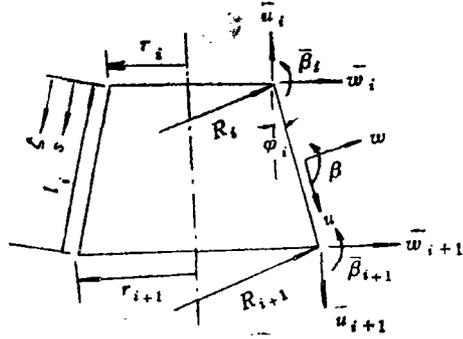


图2 考虑转角连续的截锥壳元

将 $\{\alpha\}$ 用结点位移 $\{\delta\}$ 表示有

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\xi)\cos\varphi_i & (1-\xi)\sin\varphi_i \\ -(1-3\xi^2+2\xi^3)\sin\varphi_i & (1-3\xi^2+2\xi^3)\cos\varphi_i \\ +\frac{l_i}{R}(\xi-2\xi^2+\xi^3)\cos\varphi_i & +\frac{l_i}{R}(\xi-2\xi^2+\xi^3)\sin\varphi_i \\ 0 & \xi\cos\varphi_i \\ l(\xi-2\xi^2+\xi^3) & -(3\xi^2-2\xi^3)\sin\varphi_i \\ & +\frac{l_i}{R}(-\xi^2+\xi^3)\cos\varphi_i \\ \xi\sin\varphi_i & 0 \\ (3\xi^2-2\xi^3)\cos\varphi_i + & l(-\xi^2+\xi^3) \\ +\frac{l_i}{R}(-\xi^2+\xi^3)\sin\varphi_i & \end{bmatrix} \{\delta\} \quad (17)$$

几何方程由经典薄壳理论给出:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du/ds + w/R \\ (u\sin\varphi + w\cos\varphi)/r \\ -\frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R} \right) \\ -\frac{\sin\varphi}{r} \left(\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R} \right) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$= [B] \{\delta\} \quad (19)$$

物理关系同式(7)

单元刚度矩阵:

$$[K_e] = 2\pi \int_0^l [B]^T [D] [B] r ds \quad (20)$$

如果令 $R \rightarrow \infty$, 则一切关系都退化到截维壳元素的结果。

由于该元素的中面法线转角用式(16)计算, 在两元素 A 和 B 的公共结圆上, 由(17)有:

$$\begin{aligned} (u)_C^A &= (u)_C^B \\ (w)_C^A &= (w)_C^B \\ (\beta)_C^A &= \left(\frac{dw}{ds}\right)_C^A - \left(\frac{u}{R}\right)_C^A = \left(\frac{dw}{ds}\right)_C^B - \left(\frac{u}{R}\right)_C^B = (\beta)_C^B \end{aligned} \quad (21)$$

可见该元素满足了位移连续性条件。

为了说明元素满足常应变条件, 将位移函数(15)代入(18)有:

$$\begin{cases} \varepsilon_s = \alpha_2 + \left(\frac{1}{R}\right)(\alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3) \\ \varepsilon_\theta = \left(\frac{1}{r}\right)[(\alpha_1 \sin \varphi_i + \alpha_3 \cos \varphi_i) + (\alpha_2 \sin \varphi_i + \alpha_4 \cos \varphi_i) \cdot s + \alpha_5 \cos \varphi_i \cdot s^2 + \alpha_6 \cos \varphi_i \cdot s^3] \\ \chi_s = -2\alpha_5 - 6\alpha_6 s + \left(\frac{1}{R}\right)\alpha_2 \\ \chi_\theta = -\left(\frac{\sin \varphi_i}{r}\right)[\alpha_4 + 2\alpha_5 s + 3\alpha_6 s^2 - \left(\frac{1}{R}\right)(\alpha_1 + \alpha_2 s)] \end{cases} \quad (22)$$

其中 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_i + (R_{i+1} - R_i) s} = \frac{1}{R_{i+1} - R_i} \cdot \frac{1}{\frac{R_i}{(R_{i+1} - R_i)} + s}$

$$= \frac{1}{R_{i+1} - R_i} \cdot \left[\left(\frac{R_i}{R_{i+1} - R_i}\right)^{-1} - \left(\frac{R_i}{R_{i+1} - R_i}\right)^{-2} s + \dots \right] \quad (23)$$

包含有 $1/R_i$ 的常数项。可见式(22)包含了应变的常数项, 位移函数满足常应变条件。

设在对称轴方向给一个刚体位移 \bar{u}_0 , 则代入(18)有:

$$\begin{cases} \varepsilon_s = \frac{\bar{u}_0}{R} \sin \varphi_i \\ \varepsilon_\theta = 0 \\ \chi_s = 0 \\ \chi_\theta = -\left(\frac{u_0}{R}\right) \cdot \left(\frac{\cos \varphi_i}{r}\right) \end{cases} \quad (24)$$

可见它不满足刚体位移条件, 或者说不显含刚体位移。这是它较截维壳元素的缺点。文献[9]指出, 当元素尺寸逼近于零时, 不合理的应变消失, 元素恢复刚体位移能力。

归纳起来, 该元素有以下特点:

- (1) 元素的几何关系采用经典的薄壳理论, 元素结点自由度少, 比较简单。
- (2) 考虑了元素间的转角连续性, 满足了位移连续性条件和常应变条件, 刚体位移条件被破坏, 但元素划分得足够多时, 能消除由刚体位移引起的不合理应变, 使结果收敛。

(3) 元素仍用直线代替母线,但考虑了第一主曲率半径,实质上是曲壳元素。几何误差较截锥壳元素有改善。厚度和缠绕角在单元内取常数,弹性系数有误差。

(4) 不能考虑横向剪切,仅适用于薄壳计算。

(5) 应力结果精度不高。

3. 三结点等参元

该元素采用考虑了横向剪切的 Mindlin 假设,中面法线的转角独立,不依赖于位移及其一阶导数。

$$\text{单元的几何形状: } \begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \left(\begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \frac{h_i}{2} \eta \bar{V}_{3i} \right) \quad (25)$$

$$\text{其中 } \begin{cases} N_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi-1)\xi \\ N_2(\xi) = 1-\xi^2 \\ N_3(\xi) = \frac{1}{2}(\xi+1)\xi \end{cases} \quad (26)$$

位移函数:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \left(\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \frac{h_i}{2} \eta \begin{Bmatrix} \sin \varphi_i \\ -\cos \varphi_i \end{Bmatrix} a_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 [N_i] \{\delta_i\} = [N] \{\delta\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{其中 } \{\delta_i\} = \{u_i \ w_i \ a_i\}^T \quad (28)$$

应变关系:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 [B_i] \{\delta_i\} = [B] \{\delta\} \quad (29)$$

物理关系:在等参元中,应力和应变的计算由弹性理论公式给出。为分析方便,在壳体单元的每一点建立局部坐标系 $o'r'z'$ (图 3),规定 z' 轴的方向是通过该点的壳中面法线方向, r' 方向与壳面相切,不计沿厚度方向的应力 σ'_z 和应变 ϵ'_z ,则第 (k) 层中某点的应力状态为

$$\{\sigma'\}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \sigma'_{r'} \\ \sigma'_{\theta'} \\ \tau'_{r'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{14} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon'_{r'} \\ \epsilon'_{\theta'} \\ \gamma'_{r'z'} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$$= [D']^{(k)} \{\epsilon'\}^{(k)} \quad (31)$$

整体坐标系和局部坐标系之间由转换矩阵 $[T_e]$ 联系起来。

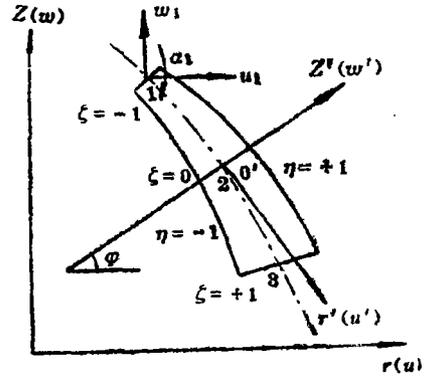


图 3 三结点等参元

$$\{\varepsilon'\} = [T_\varepsilon]\{\varepsilon\} \quad (32)$$

$$\{\sigma\} = [T_\sigma]^T\{\sigma'\} \quad (33)$$

单元刚度矩阵：对于复合材料层壳单元，单元的应变能等于各分层材料的应变能之和，从而有：

$$[K]^e = 2\pi \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B']^{(k)T} [D']^{(k)} [B']^{(k)} |J| d\xi d\eta \quad (34)$$

元素分析：单元的挠度和转角相互独立，元素满足位移连续性条件是显然的。

单元只有沿对称轴方向的刚体位移。令 $u=0, w=\bar{w}_0$ 代入(29)有：

$$\{\varepsilon\} = 0 \quad (35)$$

可见满足了刚体位移条件。

从(29)知，单元保持常应变状态的位移模式是：

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 + A_2 r + A_3 z \\ B_1 + B_2 r + B_3 z \end{Bmatrix} \quad (36)$$

该位移模式对应的结点挠度为：

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix}^0 = \begin{Bmatrix} A_1 + A_2 r_i + A_3 z_i \\ B_1 + B_2 r_i + B_3 z_i \end{Bmatrix} \quad (37)$$

对应的结点处法线转角可这样求得：

在结点法线上的一点 $P(r_i + \frac{h_i}{2}\eta\cos\varphi_i, z_i + \frac{h_i}{2}\eta\sin\varphi_i)$ 由位移模式(36)引起的位

移为：

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}^P = \begin{Bmatrix} A_1 + A_2 r_i + A_3 z_i + A_2 \cdot \frac{h_i}{2} \eta \cos\varphi_i + A_3 \cdot \frac{h_i}{2} \eta \sin\varphi_i \\ B_1 + B_2 r_i + B_3 z_i + B_2 \cdot \frac{h_i}{2} \eta \cos\varphi_i + B_3 \cdot \frac{h_i}{2} \eta \sin\varphi_i \end{Bmatrix} \quad (38)$$

另外，由结点处法线转角 α_i 引起 P 点相对于结点的位移为：

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}^P - \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}^0 = \frac{h_i}{2} \begin{Bmatrix} \sin\varphi_i \\ -\cos\varphi_i \end{Bmatrix} \eta \alpha_i \quad (39)$$

将(38)(37)代入(39)式左边，化简后得到对应于(36)的结点转角位移：

$$\frac{h_i}{2} \eta \begin{Bmatrix} \sin\varphi_i \\ -\cos\varphi_i \end{Bmatrix} \alpha_i = \begin{bmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i \end{Bmatrix} \frac{h_i}{2} \eta \quad (40)$$

元素内部各点位移由式(27)插值得到：

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \left(\begin{Bmatrix} A_1 + A_2 r_i + A_3 z_i \\ B_1 + B_2 r_i + B_3 z_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i \end{Bmatrix} \frac{h_i}{2} \eta \right)$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^3 N_i \\ \sum_{i=1}^3 N_i (r_i + \frac{h_i}{2} \eta \cos \varphi_i) \\ \sum_{i=1}^3 N_i (z_i + \frac{h_i}{2} \eta \sin \varphi_i) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} A_1 + A_2 r + A_3 z \\ B_1 + B_2 r + B_3 z \end{Bmatrix} \quad (41)$$

比较(41)和(36)知, 元素满足了常应变条件。

该元素是基于 Mindlin 直线假设下的元素, 仅能用于中厚度的壳体计算。当用于薄壳时有可能出现“闭锁”(Locking)现象。这主要是位移函数假设不适当, 产生了虚假的剪切应变。在 $\sigma' r' z'$ 坐标系中有:

$$\begin{cases} u'(r', z') = u'_0(r') + z' \alpha \\ w'(r', z') = w'_0(r') \end{cases} \quad (42)$$

$$r'_{,z} = \frac{\partial w'_0(r')}{\partial r'} + \alpha \quad (43)$$

当 $h \rightarrow 0$ 时应该有 $r'_{,z}$ 趋于零。但 w 和 α 是独立假设, 要使(43)式满足这样的条件很难, 以致出现附加的剪切应变能, 使单元刚度矩阵过分刚硬。为了使该元素能用于薄壳计算, 需要对元素作必要的处理, 如退化积分、选择积分和惩罚系数法等。我们采用的是退化积分技术, 用 2×2 点高斯积分形成单元刚度矩阵, 效果很好。

归纳起来, 该元素有以下特点:

(1) 放弃了 Kirchhoff 直线假设, 采用简单的 Mindlin 直线假设, 既降低了位移连续性条件, 又考虑了横向剪切因素。

(2) 满足了位移连续性条件, 常应变条件和刚体位移条件, 是本文三个元素中唯一满足了全部完备性和协调性条件的元素, 收敛快。

(3) 壳体母线用二次曲线模拟, 考虑了缠绕角和厚度在元素内的变化, 几何误差小。

(4) 采用弹性理论中的几何关系和物理关系, 单元的总应变能由各分层求和得到, 能更真实的反映结构的铺层方式。

(5) 采用了退化积分技术, 元素对中厚度的和薄的壳体计算均适用。

(6) 应力结果在高斯点得到, 较其它位移模型类元素, 应力精度有提高。

三、数值算例和比较

1. 金属球帽考题

对受均匀外压作用周边固支球帽(图4), 我们用以上三种元素进行了考题计算。单元按等角度划分, 位移和内力结果见图5图6。一级和二级近似解见文献[10]。

从收敛速度来考察, 等参元收敛最快, 划分7个元素结果便收敛, 10个元素所得结

果几乎与截锥壳 300 元素的结果重合。收敛最慢的是考虑了转角连续性的截锥壳元素。

从收敛精度来考察, 划分单元数为 100 的截锥壳元素的结果, 其变化规律与一级二级近似解一致。由于近似解是由薄壳微分方程中忽略了许多项, 做了假设得到的, 一般认为单元数足够多时的截锥壳元素比一级二级近似解更准确。对于等参元, 10 个元素的结果已与截锥壳 300 元素的结果重合。当取 7 个元素时的计算结果仅在顶部有一些误差, 在 $10^\circ \leq \varphi \leq 35^\circ$ 区域, 误差在工程允许范围之内。可见该元素的计算精度高。对于所计算的球帽, $h/R = 0.033$ 已属于薄壳结构, 为了进一步讨

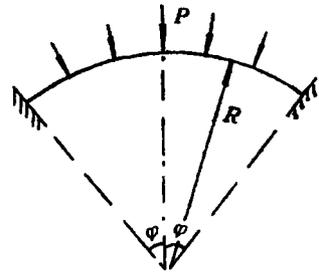


图4 周边固支球帽
 $P = 1 \text{ kg/cm}^2$ $R = 90 \text{ cm}$ $h = 3 \text{ cm}$
 $\varphi = 35^\circ$ $E = 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ $\nu = 1/6$

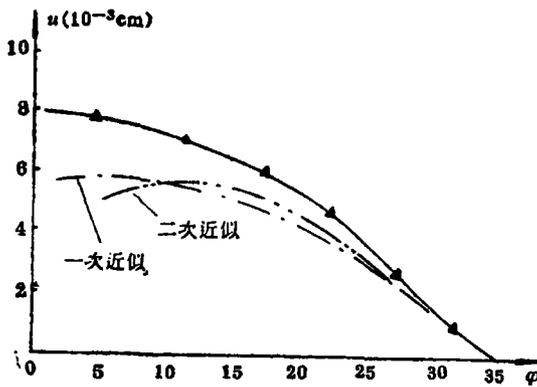


图5 对称轴方向位移分布
 ——截锥壳元 Δ 等参元

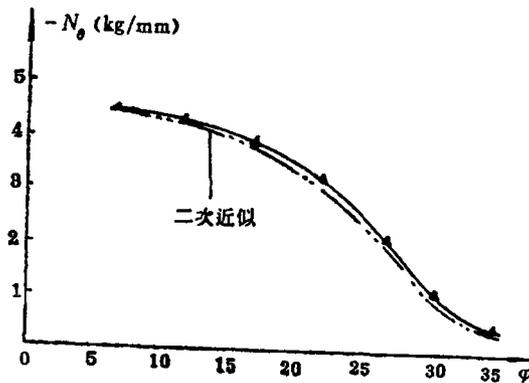


图6 环向内力分布
 ——截锥壳元 Δ 等参数

论, 将 h 取为 0.5 cm 计算, 结果与用截锥壳计算出的一致, 没有出现闭锁现象。这说明用退化积分技术克服等参元的闭锁是很成功的, 从而使该元素也适用于薄壳结构的计算。

对于考虑了转角连续性的截锥壳元素,划分300单元时的结果与截锥壳元素相差较大。这主要是该元素的刚体位移条件不能满足,加上考题用深壳, R 较小, u 较大,单元划分不是足够多时结果会有较大误差。

从计算时间考察,三个元素各自所需时间大致差不多。等参元虽单元划分得少,但结点自由度多且用高斯积分形成刚度矩阵。因此各自的计算量相差不大。

2. 复合材料筒箱考题

对纤维缠绕复合材料储箱(图7)受内压问题用以上三种元素进行了计算。储箱由上封头、筒身和下封头三段组成。封头的母线是两段半径不等的圆弧,纤维铺设层为12层。纤维缠绕角由理论公式计算。筒身是圆筒段,纤维铺设层为30层。数值计算结果见图8图9,并与实验值作了比较。从图上看,三种元素计算出的结果变化规律是一致的,且与实验值基本吻合,说明结果是合理的。

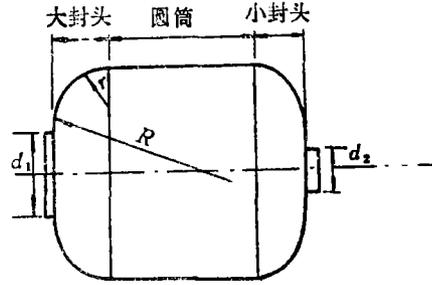


图7 复合材料储箱

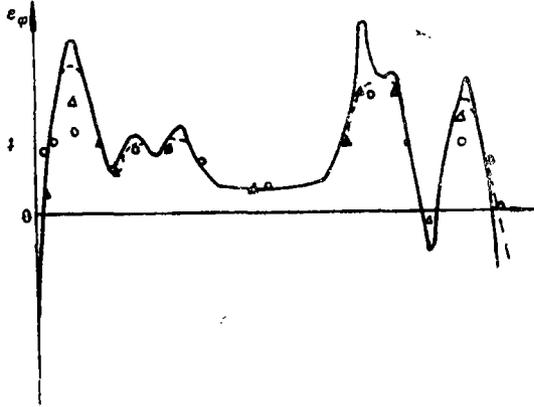


图8 纵向应变分布

——截锥壳 ---考虑转角连续性截锥壳 △等参元 ○试验值

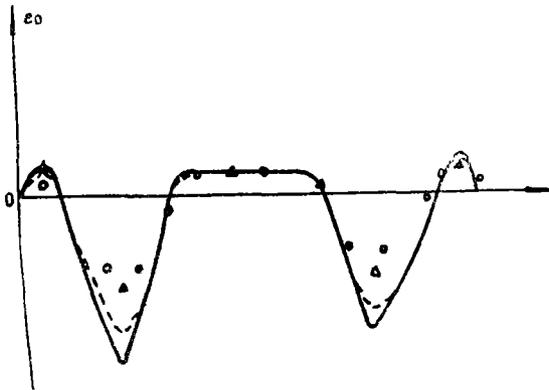


图9 环向应变分布

——截锥壳 ---考虑转角连续性截锥壳 △等参元 ○试验值

从收敛速度考察,等参元收敛最快,结构划分50个单元时就得到收敛解。其次是截锥壳元素,划分单元300能得到收敛解。最后是考虑了转角连续性的截锥壳元素,划分单元为400时计算结果收敛。由于储箱的封头近于浅壳,曲率半径 R 相对较大,刚体位移条件破坏得并不是很严重。实际上取300个单元结果便开始收敛。

从收敛精度考察,等参元的计算结果最靠近实验值。截锥壳元素和考虑了转角连续性的截锥壳元素的结果几乎重合,但在曲率突变处后一元素对结果有一定改善。

从计算时间上考察,截锥壳元素计算时间最短。其次是考虑了转角连续性的截锥壳元素,计算时间约为截锥壳元素的一倍半。计算时间最长的是等参元素,约为截锥壳元素的十倍还多。这主要是因为形成单元刚度矩阵是逐层数值积分,层数越多,计算时间会更长。

四、结 论

通过以上理论分析和算例比较。可以得到以下结论:

1. 对于曲率无突变的轴对称壳体,尤其是深壳,使用截锥壳元素能保证解的收敛性和计算精度。若用考虑了转角连续性的截锥壳元素,对结果没有改善,相反还要增加划分单元以恢复元素的刚体位移能力。对曲率有突变的轴对称壳体,在曲率间断点对结果有改善,但这种改善是以增加单元数为代价的。

2. 等参元是复合材料结构分析中值得推崇的元素,它能考虑横向剪切效应,降低元素连续性条件,收敛快,精度高,对中厚度的和薄的壳体均适用。但元素结点自由度较多,计算时间较长。

本文的工作得到了郑荣跃、郑琪、周志兵等同志的协助,在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] 洪志泉等,用有限元素法解轴对称受力迭层复合材料回转壳体,长沙工学院,1977。
- [2] 清华大学基础部力学教研组,有曲率突变的轴对称壳(波纹壳)有限元解,1982.2。
- [3] 洪志泉,玻璃钢压力容器的有限元计算和实验,国防科大102教研室,1983.9。
- [4] 郑荣跃,毕业论文,1983.7。
- [5] 郑琪、周志兵,毕业论文,1984.7。
- [6] 洪志泉,复合材料迭层板壳有限元现状分析,复合材料学报,Vol2, No2, 1985。
- [7] 谢贻权、何福保,弹性和塑性力学中的有限单元法,机械工业出版社,1981。
- [8] 琼斯著,朱颐龄译,复合材料力学,上海科技出版社,1981。
- [9] 库克著,何穷、程耿东译,有限元分析的概念和应用,科学出版社,1981。
- [10] 铁木辛柯著,板壳理论,科学出版社,1977。

Analysis and Comparison of Elements of Three Kind of Composite Revolving shells

Xu Houhua Hong Zhiquan

Wang Yi

Abstract

In this paper, an overall analysis of advantages and disadvantages is given for three kind of composite revolving shell elements, namely the cone element, considering the continuity of the normal rotation and the isoparametric element with three nodes. Their compatibility condition and completeness condition are discussed. The rate and accuracy of convergence and the computational time are compared in numerical examples, and The range of their use are given also.