

# 快速硬判决捕错译码(FHETD) 和快速软判决捕错译码(FSETD)

马建华 汪漱玉

**摘要** 本文提出了两种分组码的软判决译码方法——快速硬判决捕错译码(FHETD)和快速的软判决捕错译码(FSETD)，并给出了算法的理论分析和计算机模拟结果。

## 一、引言

软判决译码是六十年代提出、70年代得到迅速发展的一类译码方法，但软判决译码的复杂性或大的运算量严重地限制了它的应用，因此加快软判决译码的速度就成为一首要问题了。在众多的软判决译码算法中最有名的要属 Chase 算法了<sup>[1]</sup>，Chase 算法可抽象成如下简单的模型：

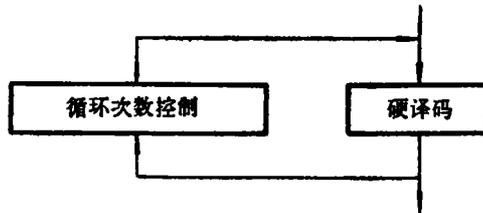


图 1

对 Chase 算法 2 其循环次数为  $2^{\lceil \frac{d}{2} \rceil}$  ( $d$  为码字的最小 Hamming 距离)。为了减少这一循环次数，人们已作了多方面的努力<sup>[2][3][4]</sup>。从上面的模型可以看出，Chase 算法的译码速度不仅取决于循环次数，还与硬译码的运算速度密切相关。若能减少硬译码的运算量，则整个译码速度就会加快，快速硬判决捕错译码(FHETD)的出发点就在这里。快速软判决捕错译码(FSETD)是 FHETD 的推广，但它与 Chase 算法已没有联系了。

本文首先详叙 FHETD 的基本原理和方法，对它做一定的分析，尔后讨论 FSETD，最后给出它们在短波数传系统中应用时的模拟结果。

## 二、FHETD 算法

FHETD 是利用软判决提供的可信度信息来加快硬判决捕错译码速度的一种方法，

硬译码中利用可信度信息的方式还未见过国内外的报道。为了简洁明了,本文就(23, 12)码来讨论FHETD算法,由此过渡到(24, 12)码的译码是很直接的。对其它码来说FHETD的基本思想一样,只须在具体实现上做相应调整。

用微机实现译码是当今的一个方向。由于微机的某些特点,软件的硬译码算法不应完全照搬硬件的译码流程。FHETD就利用了微机具有较大的存贮能力的特点,可将码的监督矩阵 $H$ 放在内存中,这样,翻转接收码序列的第 $j$ 位码之后的伴随式 $S'$ 可由未翻转的伴随式 $S$ 方便得到,即

$$S' = S \oplus \underline{h}_j \quad (1)$$

其中 $S'$ ,  $S$ 和 $\underline{h}_j$ 均为 $n-k$ 元列向量, $\underline{h}_j$ 为监督矩阵 $H$ 的第 $j$ 列。

如果将(23, 12)码的接收序列 $Y = (y_1 y_2 \cdots y_{23})$  ( $y_i \in (0, 1)$ ,  $i = 1, 2, \cdots, 23$ )分成两部分: $Y_2 = (y_1 y_2 \cdots y_{12})$ ,  $Y_1 = (y_{12} y_{13} \cdots y_{23})$ , 记

$$Y_1 = C_1 \oplus E_1, Y_2 = C_2 \oplus E_2$$

其中 $C_1$ 为发射码字的前12位码元, $C_2$ 为后12位码元, $E_1, E_2$ 为对应的错误图样。上式中 $Y_1, Y_2$ 仅有 $y_{12}$ 是共有的。由于(23, 12)码的循环性,对接收序列进行循环移位总能保证 $y_{12}$ 对应于最高可信度,也就是说我们有很大的把握可以认为 $y_{12}$ 是正确的。对(23, 12)码发现了如下重要规律:

当 $W_i(E) \leq 3$ 时,如果 $e_{12} = 0$ ,则 $Y_1, Y_2$ 中至少有一个的错误数目不超过1,也即下二式:

$$W_i(E_1) \leq 1, W_i(E_2) \leq 1 \quad (2)$$

至少有一式成立。

又记: $Y'_1 = (y_1 y_2 \cdots y_{11})$ ,  $Y'_2 = (y_{13} y_{14} \cdots y_{23})$ ,则接收序列为 $Y = (Y_1 Y'_2)$ ;  $Y$ 左移11位以后的码序列 $Y''$ 为  $Y'' = (Y_2 Y'_1)$

于是由(2)式可知,将接收序列循环移位使 $y_{12}$ 对应最高可信度后,可以认为在 $Y, Y''$ 的信息组 $Y_1$ 和 $Y_2$ 中至少有一个的错误数不超过1。当 $W_i(E_1)$ 和 $W_i(E_2)$ 有一为0时,那么所对应的伴随式即是相应监督组中的错误图样;否则,依次一位一位地翻转 $Y$ 和 $Y''$ 中信息位中的每一位码元,一定能将其中之一的唯一错误翻转,变成一正确码元,此时的伴随式就是对应的监督区中的错误图样。记 $S''$ 为 $Y''$ 的伴随式,则判决输出的条件与(23, 12)硬判决捕错译码类似<sup>[2][5]</sup>:

$$\left. \begin{array}{l} \text{若不翻转: } W_i(S) \leq 3; W_i(S'') \leq 3 \\ \text{若翻转第 } j \text{ 位: } W_i(S + \underline{h}_j) < 3; W_i(S'' + \underline{h}_j) < 3 \end{array} \right\} \quad (3)$$

在上面的方法中是将 $Y = (Y_1 Y'_2)$ 和 $Y'' = (Y_2 Y'_1)$ 的信息位 $Y_1$ 和 $Y_2$ 的每一位都翻转。实际上 $Y_1, Y_2$ 中可靠性较高的码元相对说来出错的可能性很小,可以假定是无错的,因此没必要翻转,从而加快译码速度。由上述可得FHETD的步骤如下:

第一步:确定最高可信度码元的位置,对接收序列循环移 $q$ 位得 $Y$ ,使 $y_{12}$ 对应于最高可信度。

第二步:确定第 $I$ 个高可信度码元的可信度 $T$ ,或事先确定一门限 $T$ 。

第三步:计算伴随式 $S = HY^T$ 。

第四步：依次翻转 $Y$ 中 $Y_i$ 里可信度小于 $T$ 的码元，并按(3)式处理。若(3)式满足则得 $\hat{E}=(0S'^T)$ （不翻转时）或 $\hat{E}=(0\cdots 010\cdots 0S'^T)$ （使(3)式满足那位 $j$ ）；如果都不满足则转下一步。

第五步：将 $Y$ 左移11位得 $Y''$ ，计算伴随式 $S''=HY''^T$ ，其它与第四步类似。

将第四、第五步的 $\hat{E}$ 移 $-q$ 位(负号表示反相)就是FHETD的错误图样。若第四、第五步均无使(3)式满足的情况则FHETD译码失败。

### 三、(23,12)码FHETD运算量的讨论

本文以两向量相加并判决作为一运算单位，在FHETD中作一次向量相加等效于翻转一位码元，所以下面通过码元翻转的次数来计算FHETD的运算量。在上面FHETD的步骤中第二步已指出： $T$ 的确定方法有两种，一种是固定 $I_g$ ，选择第 $I_g$ 位高可信度值为 $T$ ，此时对不同的码序列 $T$ ，一般说是不一样的；另一种就是固定 $T$ 。

#### 1. 固定 $I_g$ 时的运算量

固定 $I_g$ 时，说明至少有 $I_g$ 个码元的可信度大于或等于第 $I_g$ 位高可信度值 $T$ ，则(23,12)码FHETD最大可能的翻转次数为

$$N_{rg} = n - I_g = 23 - I_g \quad (4)$$

定义比值

$$D_r = \frac{\text{标准运算量}}{\text{所提算法运算量}} \quad (5)$$

称其为减少因子，它反映了所提算法相对于标准算法在速度上改进的程度。当选标准算法为[2]中给出的(23,12)码硬判决捕错译码流程，此时标准运算量为 $2 \times 23$ ，则FHETD的减少因子为

$$D_r = 2 \cdot 23 / (23 - I_g) \quad (6)$$

#### 2. DMC中固定 $T$ 的运算量

固定 $T$ 时不翻转的码元个数是变化的，所以下面只计算不翻转的平均数目。如果接收码元 $y_i$ 的可信度 $\alpha_i \geq T$ 则不翻转。一般说来， $\alpha_i$ 是一随机量，对某一 $y_i$ 就有一不翻转的概率 $p_T = p(\alpha_i \geq T)$ ，在DMC（离散无记忆信道）中码元之间是独立的，则不需翻转的平均数为

$$N_r = \sum_{i=0}^n i C_n^i p_T^i (1-p_T)^{n-i} = n p_T = 23 p_T \quad (7)$$

减少因子为

$$D_r = 2 \cdot \frac{23}{23 - N_r} = \frac{2}{1 - p_T} \quad (8)$$

### 四、AGWN信道中FHETD的性能分析

设发射信号的电平与码元的关系为 $x_i = (-1)^{c_i}$ 不妨假设发射的码字为全0，则

$x_i=1$ , 在AGWN信道中接收信号 $r_i=x_i+n$ 的概率密度为

$$p(r_i) = [1/(\sqrt{2\pi\beta})] \exp[-(r_i-1)^2/(2\beta)] \quad (9)$$

此处 $\beta$ 为归一化的噪声方差,  $1/\beta$ 为信噪比, 则码元的错误概率为

$$p_b = \int_{-\infty}^0 r(y) dy$$

检测概率为

$$p_D = 1 - p_b$$

若设 $(n, k)$ 码的最小汉明距离为 $d$ , 硬译码的纠错能力为 $t = [(d-1)/2]$ , 则硬译码的字错误率为

$$p_H(\text{字}) = \sum_{i=t+1}^n C_n^i p_b^i p_D^{n-i}$$

当信噪比较大时

$$p_H(\text{字}) \approx C_n^{t+1} p_b^{t+1} \quad (10)$$

FHETD的性能分析也应区分固定 $I_b$ 和固定 $T$ 两种情况。前种情况的分析可看[6], 这里仅分析固定 $T$ 时的情形。此时FHETD的字错误概率为

$$\begin{aligned} p_{F_i}(\text{字}) &= p_H + p_{F_1}(T) + p_{F_2}(T) + \dots + p_{F_i}(T) \\ &= p_H + \sum_{i=1}^i p_{F_i}(T) \end{aligned} \quad (11)$$

$p_{F_i}(T)$ 指固定 $T$ 时 $i$ 位错用FHETD纠不过来的概率, 对(23,12)码

$$\begin{aligned} p_{F_1} &= C_n^1 \int_{-\infty}^{-T} p(x) \left[ \int_0^{-x} p(y) dy \right]^{n-1} dx \\ &> n \int_{-\infty}^{-T} p(x) \left[ \int_0^{-x} p(y) dy \right]^{n-1} dx \\ &= nF(-T) [F(T) - p_b]^{n-1} \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $F(x) = \int_{-p}^x p(y) dy$

$p_{F_2} = p$  ( $Y_1$ 中错的那位可信度 $\geq T$ ,  $Y_2'$ 中错的那位可信度 $\geq T$ )

$$\begin{aligned} &= C_{n_1}^1 \int_{-\infty}^{-T} p(x) dx \left[ \int_0^{\infty} p(y) dy \right]^{n_1-1} \\ &\quad \cdot C_{n_2}^1 \int_{-\infty}^T p(x) dx \left[ \int_0^{\infty} p(y) dy \right]^{n_2-1} \\ &= n_1 n_2 F^2(-T) p_b^{n-2} \end{aligned}$$

其中  $n_1=12$ ,  $n_2=11$ ,  $n_1+n_2=23=n$

$p_{F_3} = 2p$  ( $Y_1$ 中错那位可信度 $\geq T$ ,  $Y_2'$ 中有两位错)

$$\begin{aligned} &= 2C_{n_1}^1 \left[ \int_{-\infty}^T p(x) dx \right] \left[ \int_0^{\infty} p(y) dy \right]^{n_1-1} \\ &\quad \cdot C_{n_2}^2 \left[ \int_{-\infty}^0 p(x) dx \right]^2 \left[ \int_0^{\infty} p(y) dy \right]^{n_2-2} \\ &= n_1 n_2 (n_2-1) (F(-T) p_b^2 p_b^{n-3}) \end{aligned}$$

现在考察一下信噪比趋于 $\infty$ 的过程中FHETD的渐近性能, 译码渐近最佳系指:

$$\frac{\sum_{i=1}^t p_{F_i}(T)}{p_{\#}(\text{字})} \rightarrow k_0 \quad \text{信噪比 } 1/\beta \rightarrow \infty \quad (13)$$

其中  $k_0$  为一常数。如果采用的 FHETD 的  $(n, K)$  码元最高可信用度码元总处于信息集中，且不被翻转，那末由 (12) 式知一定有

$$p_{F_1}(T) \geq nF(-T)[F(T) - p_b]^{n-1} \triangleq p'_{F_1}(T) \quad (14)$$

**FHETD 的渐近性定理：**对于  $(n, k, d)$  码，FHETD 采取固定  $T$  值以保持  $N_T$  不变的方式，如果其误字性能满足 (14) 式，则当  $[(d-1)/2] \leq 3$  时 FHETD 有可能是渐近最佳的，否则它一定非渐近最佳。

证：AGWN 信道中，当  $T$  选定时码元不翻转的概率为

$$p_T = \int_{-\infty}^{-T} p(y) dy + \int_T^{\infty} p(y) dx$$

对于感兴趣的  $T$  值一般说来有：

$$\int_{-\infty}^{-T} p(y) dy \ll \int_T^{\infty} p(y) dy$$

故

$$p_T = \int_T^{\infty} p(y) dy = 1 - \int_{-\infty}^T p(y) dy = 1 - F(T)$$

或

$$F(T) = 1 - p_T$$

利用 (7) 式得

$$F(T) = 1 - N_T/n = (n - N_T)/n \quad (15)$$

当  $N_T$  固定时， $F(T)$  为一常数。当信噪比较大时  $F(T) \gg p_b$ ，则 (14) 式的  $p'_{F_1}(T)$  可近似成

$$p'_{F_1}(T) \approx K_F F(-T) \quad (16)$$

这里  $K_F = n(1 - N_T/n)^{n-1}$ ，当  $N_T$ ， $n$  固定时  $K_F$  为一常数，又

$$p_T = \int_T^{\infty} p(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \int_T^{\infty} \exp\left[-\frac{(y-1)^2}{2\beta}\right] dy$$

在定理的条件中要求  $N_T$  固定，也就是说  $p_T$  固定，那末由上式知当信噪比  $(1/\beta) \rightarrow \infty$  时为保证  $p_T$  固定，必有  $T \rightarrow 1$ ，即

$$F(-T) \rightarrow F(-1) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp\left[-\frac{(y-1)^2}{2\beta}\right] dy$$

令  $y-1=x$ ， $y=-x$  代入上式得

$$F(-1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp\left[-\frac{y^2}{2\beta}\right] dy = Q(2\sqrt{r})$$

$r = (1/\beta)$  为信噪比，由上式及 (16) 式有

$$p'_{F_1}(T) \approx \frac{K_F}{2} \exp(-2r) \quad (\text{信噪比极大时}) \quad (17)$$

由式 (10) 知纠错能力为  $t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$  的硬译码之误字率在极高信噪比时有

$$\begin{aligned}
 p_H(\text{字}) &\doteq C_n^{t+1} p_b^{t+1} = C_n^{t+1} \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp\left[-\frac{(y-1)^2}{2\beta}\right] dy \right\}^{t+1} \\
 &= C_n^{t+1} \left[ \int_{\sqrt{r}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \right]^{t+1} \\
 &= C_n^{t+1} [Q(\sqrt{r})]^{t+1} \\
 &\approx C_n^{t+1} \exp\left(-\frac{t+1}{2}r\right)
 \end{aligned}$$

将上式与(17)式代入(13)式得:

$$\sum_{i=1}^t p_{F_i}(T) / p_H(\text{字}) > p_{F_1}(T) / p_H(\text{字}) \approx k_e \exp((t-3)/2)r$$

其中  $k_e = k_F / 2C_n^{t+1}$  为一常数, 所以当  $t > 3$  时 FHETD 一定不是渐近最佳的,  $t \leq 3$  时才有可能渐近最佳。证毕。

该定理说明了当我们假定高可信度码元是无错的, 在信噪比趋于  $\infty$  时将导致可纠错的极限 (参考(17)式), 因此在采用上述假定时要十分小心, 要注意具体使用的码和具体的信道。但在信噪比不是很高时, 这一假定适用性如何还尚待解决。

## 五、FSETD 算法

FHETD 虽然利用了可信度信息, 但它是硬判决捕错码译的改进, 只能纠小于或等于  $t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$  个错。如果将 FHETD 的思想推广, 使其能纠大于  $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$  个错, 就得到了快速的软判决捕错译码 (FSETD)。同样我们仅讨论 (23, 12) 码。这里采用与前面相同的记号将接收序列  $Y$  分成两部分:

$$Y = (Y_1 Y_2) = (Y_1' Y_2')$$

此处  $y_{12}$  也对应最高可信度。由于 (24, 12) 码的  $d=8$ , 所以软判决译码最多可以纠  $d-1=7$  个错误。Y 的错误分布有如下重要规律:

当  $W_i(E) \leq 7$  时, 如果  $y_{12}$  无错, 则  $Y_1, Y_2$  中至少有一个的错误数不超 3 个, 或者说下面两个不等式

$$W_i(E_1) \leq 3, W_i(E_2) \leq 3 \quad (18)$$

至少有一个成立。

如果  $W_i(E_1) \leq 3$ , 我们将  $Y_1$  中所有组合小于等于 3 的码元都翻转, 对应于每一翻转由其伴随式都可以获得一候选错误图样。当然其中一定含有实际的错误图样, 因为上述的翻转一定有一个将  $E_1$  的  $W_i(E_1) (\leq 3)$  个错翻转成正确码元。如果  $W_i(E_1) > 3$ , 但  $W_i(E_2) \leq 3$ , 则可以将  $Y$  循环移 11 位得  $Y'' = (Y_2 Y_1')$ , 这样翻转  $Y_2$  中组合小于等于 3 的码元即可。也就是说, 只要  $W_i(E) \leq 7$ , 那末 (18) 式至少有一个成立, 通过上面的翻转得到一组候选错误图样, 其中一定含有真实的错误图样。我们选择其中软重量最轻者输

出, 而真实错误图样常常是最轻的, 同样,  $Y_1, Y_2$  中可信度较高的码元不必翻转。设  $Y_1, Y_2$  中有  $I_s$  位低可信度码元需要翻转, 这样就得 FSETD 的步骤如下:

第一步 将 (23, 12) 码循环移位得  $Y$ , 使  $Y$  的  $y_{12}$  对应最高可信度。

第二步 计算伴随式  $S = HY^T$ 。

第三步 依次翻转  $V = (Y_1 Y_2)$  中  $Y_1$  里  $I_s$  位低可信度码元中个数小于等于  $I_s = 3$  的码元组合, 翻转后的伴随式可依 (1) 式得到  $S'$ , 则得相应的候选错误图样:  $E_T = (E_e S'^T)$ 、 $E_e$  的长为 12, 它在翻转位为 1, 其它为 0。

第四步 将  $Y$  左移 11 位得  $Y'' = (Y_2 Y_1)$ , 重复第二、三步的操作。

第五步 选择上述错误图样集合中软重量最轻者输出。

将 (23, 12) 码的 FSETD 用于 (24, 12) 码的译码, 只须利用上面的  $E_T$  及其所计算的全监督检验  $L$  就可确定  $e_{24}$ , 也即 (24, 12) 译码只需在 (23, 12) 码译码的基础上稍加变动即可。

如果翻转后计算伴随式的方式按 [6] 中给出的方法进行, 那末向量相加的次数就与翻转的次数一一对应, 从而可求出 FSETD 的运算量为

$$N_s = 2 \sum_{i=0}^{I_s} C_{I_s}^i$$

其中  $I_s$  为同时翻转的码元数目, 对 (23, 12) 码  $I_s = 3$  将取得最好的性能。由于软判决译码的纠错能力是  $d - 1$ , 由前面 FHETD 的渐近最佳定理可得:

**FSETD 的渐近最佳定理:** 如果 FSETD 译码总使得最高可信度码元处于信息组中, 且不被翻转, 则当  $d \leq 4$  时, FSETD 有可能是渐近最佳的, 否则一定非渐近最佳的。

## 六、算法的计算机模拟

FHETD 应用时是作为 Chase 算法的硬译码部分, 这种结合简记为 FHETD-Chase 算法。如果标准算法选 Chase 算法 2, 则 FHETD-Chase 算法 2 的减少因子同样可用 (6) 式计算。我们把 FHETD-Chase 算法 2 和 FSETD 分别应用于一中速率的短波并行数传系统, 系统的详情可参考 [6, 7]。表 1、表 2 分别给出了 FHETD-Chase 算法 2 和 FSETD 的几种模拟参数。图 2 图 3 分别给出了它们的性能模拟曲线, 为比较起见也给出了硬判决译码和 Chase 算法 2 的性能模拟曲线。

从图中可见当  $I_s = 8$  时, FHETD-Chase 2 与标准 Chase 算法 2 的性能完全一样。当  $I_s > 8$  时, 除了低信噪比时性能较 Chase 2 差一点外, 在  $p_e < 10^{-3}$  时性能与 Chase 算法 2 趋于一致。又 FSETD 不仅运算量比 Chase 算法 2 大大减少, 而且性能也较它好, 原因大概是特有的信道特性造成的。

要强调的是上述模拟是针对一具体的短波信道, 其它信道的模拟情况这篇文章不准备讨论了。

表 1

$I_g$	8	10	12
$D_T$	8	3.5	4

表 2

$(I_s, I_e)$	(8, 3)	(8, 3)	(8, 2)	(6, 2)
$D_T$	3.4	7.6	8.6	14.5

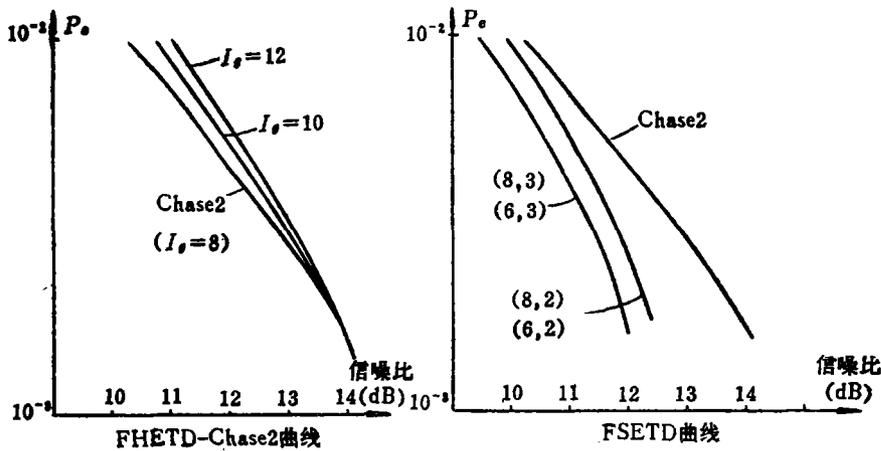


图 2

图 3

## 参 考 文 献

- [1] D.Chase, A class of Algorithms for Decoding Block Codes with channel Measurement Information, IT, Jan, 1972.
- [2] C.M.Hackett, An Efficient Algorithm for Soft-decision Decoding of the(24, 12) Extended Golay Code, IEEE, Trans. Comm, June, 1981.
- [3] H.Tanka, Simplified Correlation Decoding by Selecting Possible Codewords Using Erasure Information, IT, Sept 1983.
- [4] N.N.Terdolkar, Asymptotically Optimum Soft Decision Decoding, Ph.D.Dissertation 1983.
- [5] F.J.Macwillians, The Theory of Error-Correcting Codes, 1977.
- [6] 马建华, 软判决译码及其在短波数传中的应用, 1985年硕士论文。
- [7] 马建华、汪激玉, 方程组译码, 1985年“信息论与通信理论会议”论文。

## Fast Hard-decision Error Trap Decoding(FHETD) and Fast Soft-decision Error Trap Decoding(FSETD)

Ma Jianghua Wang Shayu

### Abstract

This paper proposes two kinds of soft-decision decoding algorithm of block codes—Fast Hard-decision Error Trap Decoding (FHETD) and Fast Soft-decision Error Trap Decoding (FSETD). Some theoretical analyses and simulation results to the algorithms are given.