国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八六年第四期　总第五十六期　No. 4 1986 Sum.56

关于旋进椭圆的讨论

李 苹 非

摘 要　本文采用作用角变量的方法，讨论了闭合轨道在一般幂次型引力势作用下的情况。采用这种方法时，初始轨道接近于圆轨道的假设是不必要的，而且引力势的形式可以推广到平方反比力场和其它幂次力场。文中给出了轨道闭合的判别公式。若中心力包括r^{-2}项和r^{-3}项时，即相对论校正情况，则轨道闭合成为旋进椭圆；它的旋进角速度可以计算出来。

一、引　言

质点在有心引力场中运动，引力场的势函数U为一般幂次型，即

$$U=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{r^i}$$

其中r为质点到引力中心的距离，k_i为常数。若质点经过一段时间的运动之后，其运动状态能回到初始运动状态，则称质点的运动轨道是闭合的。

本文采用作用角变量的方法对轨道的闭合性进行了讨论，给出了轨道闭合的一般判别式。

此外，对于引力势为

$$U=\frac{k_1}{r}+\frac{k_2}{r^2}$$

的特殊情况进行了较详细的研究，指出此情况下的闭合轨道为旋进椭圆，并给出其旋进角速度。

二、轨道闭合的判别公式

质量为m的质点在一般幂次型引力势的有心引力场中运动，质点在球坐标系中的动能T为

1986年1月5日收到

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) \tag{1}$$

其中 θ 为余纬度，ϕ 为方位角，r 为质点到引力中心的距离。势能V为

$$V=\sum_{i=1}^{n}-\frac{k_i}{r^i} \tag{2}$$

其中$k_i(i=1,2,\cdots,n)$为常数。正则动量p_r, p_θ, p_ϕ为

$$p_r=m\dot{r},\quad p_\theta=mr^2\dot{\theta},\quad p_\phi=mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} \tag{3}$$

质点的哈密顿函数H为

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{r^i} \tag{4}$$

根据哈密顿函数的这种形式，有关W的哈密顿一雅可比方程就能写成

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2\right]-\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{r^i}=\alpha_1 \tag{5}$$

其中 常数α_1为总能量，即$\alpha_1=E$。

对方程(5)中的变量进行分离。将下式

$$W=W_r(r)+W_\theta(\theta)+W_\phi(\phi) \tag{6}$$

作试探解代入方程(5)，并注意到在(5)式只有方括号中的最后一项才包含有 ϕ 的相关性。如果方程对于所有的ϕ都成立，则必有

$$\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi}=\alpha_\phi \tag{7}$$

其中 α_ϕ 为积分常数。于是哈密顿一雅可比方程就成为

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left\{\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2+\frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta}\right\}\right]-\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{r^i}=E$$

在花括号内的项仅包含对 θ 的相关性。因此，就必定等于一个常数

$$\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2+\frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta}=\alpha_\theta^2 \tag{8}$$

其中 α_θ 为积分常数。

现在，哈密顿一雅可比方程就只包含对 r 的相关性

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha_\theta^2}{r^2}=2m\left(E+\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{r^i}\right) \tag{9}$$

方程(7)、(8)、(9)能直接积分以求得生成函数，但我们主要关心的是求取作用角变量。

有三个作用角变量，它们定义为：

$$J_1\equiv J_\phi=\oint p_\phi d\phi=\oint\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi}d\phi \tag{10}$$

$$J_2\equiv J_\theta=\oint p_\theta d\theta=\oint\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}d\theta \tag{11}$$

$$J_3 = J_r = \oint p_r dr = \oint \frac{\partial W_r}{\partial r} dr \tag{12}$$

根据方程(7)、(8)、(9)，这三个定积分能写成

$$J_\phi = \oint \alpha_\phi d\phi \tag{13}$$

$$J_\theta = \oint \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta}} d\theta \tag{14}$$

$$J_r = \oint \sqrt{2m\left(E + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{r^i}\right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr \tag{15}$$

(13)式的积分将很容易得到，在一个周期中，ϕ 变化2π弧度，所以

$$J_\phi = 2\pi\alpha_\phi \tag{16}$$

(14)式的积分并没有特别的数学上的困难。对于保守力系，势能V与速度无关，我们有

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

其中L为拉格朗日函数，$L = T - V$。从而可得

$$\sum_j \dot{q}_j p_j = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

当约束与时间无关时，T是$\dot{q}_j$的二次齐次函数。根据欧拉定理，如果f是一系列变量q_j的n次齐次函数，则

$$\sum_j q_j \frac{\partial f}{\partial q_j} = nf$$

此处$n=2$，所以

$$\sum_j \dot{q}_j p_j = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$$

若用平面极坐标表示动能，则有

$$p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} = p_r\dot{r} + p\dot{\psi} = 2T$$

这里的ψ是轨道上质点的平面方位角。因此方程(14)中的$p_\theta d\theta$能为$pd\psi - p_\phi d\phi$所置换，作用变量就变为

$$J_\theta = \oint p d\psi - \oint p_\phi d\phi$$

当θ变化2π时，ϕ和ψ也变化2π，而积分成为

$$J_\theta = 2\pi(p - p_\phi)$$

若采用平面极坐标系表示动能，有

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2)$$

于是，正则动量为

$$p_r = m\dot{r}, \quad p = mr^2\dot{\psi}$$

有关的哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p^2}{r^2}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{r^i}$$

与(4)式所表达的哈密顿函数比较，可得

$$p^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}$$

根据(8)式，可得：

$$p^2 = \alpha_\theta^2$$

因此

$$J_\theta = 2\pi(\alpha_\theta - \alpha_\phi) \tag{17}$$

根据(16)和(17)，则有

$$J_\theta + J_\phi = 2\pi\alpha_\theta$$

最后一个 J_r 的积分现在能写成

$$J_r = \oint \sqrt{2m\left(E + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{r^i}\right) - \frac{(J_\theta + J_\phi)^2}{4\pi^2 r^2}}\, dr$$

即

$$J_r = \oint \sqrt{2mE + 2m\frac{k_1}{r} + \left[2mk_2 - \frac{(J_\theta + J_\phi)^2}{4\pi^2}\right]\frac{1}{r^2} + 2m\frac{k_i}{r^i}}\, dr \tag{18}$$

当k_i是某些特定值时，式(18)可以利用复变函数求留数的方法求出积分值，得到

$$J_r = f(E, J_\theta + J_\phi)$$

解得

$$E = \varphi(J_r, J_\theta + J_\phi)$$

这时，哈密顿函数

$$H = E = \varphi(J_r, J_\theta + J_\phi)$$

于是，根据作用角变量理论，$r = r(t)$的运动频率为

$$\nu_r = \frac{\partial H}{\partial J_r}, \quad \nu_\theta = \frac{\partial H}{\partial J_\theta}, \quad \nu_\phi = \frac{\partial H}{\partial J_\phi}$$

由于在H中，$J_\theta + J_\phi$ 是组合出现的，因此 θ 和 ϕ 是简并的。这时轨道闭合的条件是

$$\frac{\nu_r}{\nu_\theta} = \frac{\nu_r}{\nu_\phi} = \frac{N_1}{N_2} \tag{19}$$

其中N_1、N_2为正整数。这就是轨道闭合的判别公式。

三、引力势 $U=\frac{k_1}{r}+\frac{k_2}{r^2}$ 的讨论

我们取引力势$U=\frac{k_1}{r}+\frac{k_2}{r^2}$进行计算。这时，式(16)和(17)均不变，而式(18)变为

$$J_r=\oint\sqrt{2mE+2m\frac{k_1}{r}+\left[2mk_2-\frac{(J_\theta+J_\phi)^2}{4\pi^2}\right]\frac{1}{r^2}}\,dr \tag{20}$$

用留数法求积式(20)，为此我们把被积函数写成一般的形式

$$-\sqrt{A+\frac{2B}{r}-\frac{c}{r^2}}$$

在原点的留数为$R_0=-\sqrt{-c}$，在无穷远处的留数为$R_\infty=-\frac{B}{\sqrt{A}}$，总的积分值是留数之和的$-2\pi i$倍：

$$J_r=2\pi i\left(\sqrt{-c}+\frac{B}{\sqrt{A}}\right)$$

根据式(20)，可得

$$A=2mE,\ B=mk_1,\ C=\frac{(J_\theta+J_\phi)^2}{4\pi^2}-2mk_2$$

因此

$$J_r=2\pi i\left(\sqrt{-\left[\frac{(J_\theta+J_\phi)^2}{4\pi^2}-2mk_2\right]}+\frac{mk_1}{\sqrt{2mE}}\right)$$

$$=-\sqrt{(J_\theta+J_\phi)^2-8\pi^2mk_2}+k_1\pi\sqrt{\frac{2m}{-E}}\qquad(E<0) \tag{21}$$

由(21)解得

$$E=-\frac{2\pi^2mk_1^2}{\left(J_r+\sqrt{(J_\theta+J_\phi)^2-8\pi^2k_2m}\right)^2} \tag{22}$$

方程(22)提供了H与作用角变量的函数关系，即

$$H=E=-\frac{2\pi^2mk_1^2}{\left(J_r+\sqrt{(J_\theta+J_\phi)^2-8\pi^2k_2m}\right)^2} \tag{23}$$

可见，H中所含的三个变量J_r、J_θ、J_ϕ不能以组合$(J_r+J_\theta+J_\phi)$的形式出现，而只有J_θ、J_ϕ能以组合$(J_\theta+J_\phi)$的形式出现，因此运动频率有下列关系

$$\nu_r=\frac{\partial H}{\partial J_r}=\frac{4\pi^2mk_1^2}{\left(J_r+\sqrt{(J_\theta+J_\phi)^2-8\pi^2k_2m}\right)^3}$$

$$\nu_\theta=\frac{\partial H}{\partial J_\theta}=\nu_\phi=\frac{\partial H}{\partial J_\phi}$$

$$=\frac{4\pi^2 mk_1^2}{(J_r+\sqrt{(J_\theta+J_\phi)^2-8\pi^2k_2m})^3}\cdot\frac{J_\theta+J_\phi}{\sqrt{(J_\theta+J_\phi)^2-8\pi^2k_2m}}$$

因为$\gamma_\theta=\gamma_\phi$，所以运动依然具有单一简并性。但$\gamma_\theta=\gamma_\phi\neq\gamma_r$，所以，质点运动一周时，轨道不闭合；但当(19)式条件得到满足时，即质点在运行若干周后，轨道可以闭合。

四、旋 进 椭 圆

下面，我们将求解这一运动轨道方程。

这时，势函数为

$$U=\frac{k_1}{r}+\frac{k_2}{r^2}$$

引力$F=\nabla U$，即

$$F=-\frac{k_1}{r^2}-\frac{2k_2}{r^3}$$

由比尼公式可得

$$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=\frac{1}{m}(k_1u^2+2k_2u^3) \tag{24}$$

其中 $u=r^{-1}$，h为动量矩。

化简方程(24)，得

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\left(1-\frac{2k_2}{mh^2}\right)=\frac{k_1}{mh^2} \tag{25}$$

方程(25)的通解为

$$u=A\cos(\omega\theta+\varepsilon)+\frac{k_1}{mh^2} \tag{26}$$

式中 $\omega^2=1-\frac{2k_2}{mh^2}$，$\omega$为旋进角速度，$A$、$\varepsilon$为积分常数，可由初始条件确定。

将$u=\frac{1}{r}$代入式(26)，得

$$r=\frac{1}{A\cos(\omega\theta+\varepsilon)+\frac{k_1}{mh^2}}$$

$$r=\frac{\frac{mh^2}{k_1}}{1+\frac{mh^2}{k_1}A\cos(\omega\theta+\varepsilon)} \tag{27}$$

方程(27)代表了转动的椭圆，它的半通径p和偏心率e分别为

$$p=\frac{mh^2}{k_1} \qquad e=\frac{mh^2}{k_1}A$$

即

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\omega\theta+\varepsilon)} \tag{28}$$

椭圆转动时，每一转中轨道的拱点线进动为

$$\frac{2\pi}{\omega}-2\pi=2\pi\left(\frac{1}{\omega}-1\right)=2\pi\left(\sqrt{\frac{mh^2}{mh^2-2k_2}}-1\right) \tag{29}$$

这里$\omega<1$。因此，进动速率为

$$\left(\frac{2\pi}{\omega}-2\pi\right)\Big/2\pi=\frac{1}{\omega}-1$$

$$=\sqrt{\frac{mh^2}{mh^2-2k_2}}-1$$

参 考 文 献

[1] H. Goldstein, Classiicial Mechanics, Addison-Weslcy publishing Coupany, 1959.
[2] 凌德海，高等力学（讲义），国防科技大学，1985.

The Discussion about precessing Ellipse

Li Gefei

Abstract

On the basis of the method of action-angle variables the conditions of closed orbits under the action of general power—type gravitation potential are discussed on this paper. By method it is unnecessary to assume that the initial orbit is near to a circular orbit. Form of gravitation potential can be extented to the inverse proportional force field and other power force field. The discrimination formula of the closed orbits is given. Finally, if the central force contains an r^{-2} term and an r^{-3} term, as provided by relativistic corrections, then the orbit is closed and is in the form of a precessing ellipse. Finally the precessing angular velocity of the ellipse is calculated.