国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八七年第一期　总第五十七期　No.1 1987 Sum. 57

一阶与二阶常微分方程系统的隐式和半隐式解法

陈 武 凡

提　要　本文对于非定常问题在经Galerkin半离散化所得到的一阶及二阶常微分方程系统分别提出了具有二级精度的隐式和半隐式求解方案，并从数学上严格证明了这两个数值方案均是无条件稳定的；另对于正定对称矩阵，通过应用近似求逆法大大地减少了计算工作量；最后提供了两个简单算例，证明本方法是行之有效的。

一、引　言

诸如热传导、有阻尼或无阻尼振动等介质的非定常运动的数值解法，通常指的是有限差分法，有限元—有限差分混和法及有限元—数值积分法[1],[2]。后两者也就是人们熟知的半离散Galerkin近似法。按照这个方法，上述问题在经空间域上的离散化处理后，得到一个关于时间的一阶或二阶常微分方程系统。而这些常微分方程系统的解法（有限差分法和数值积分法）在数值法研究与工程应用中一直是十分引人注目的课题。不论是有限差分法，还是数值积分法，其具体处理上又分为显式与隐式二种方案。大家知道，显式方案工作量少，但稳定性条件对时间步长限制苛刻，且精度低；隐式方案的稳定性条件宽裕，精度较高，然而大型矩阵的求逆运算工作量较显式增加许多；例如Gellert[3]，Brusa[4]及Gladwell[5]等人的工作，在改善精度，稳定性条件方面很有成效，但在如何减少计算工作量这一问题上没有多大进展。

为克服隐式方案的这一缺陷，T.Belytchko与W.K.Liu曾对热传导问题(经离散化得到的）一阶常微分方程系统的解法，提出了所谓混合式时间积分分区隐—显方案[6],[7]。其基本思想是：把未知函数及其导数的系数矩阵分成显式与隐式（一对角矩阵）两部份，从而隐式求解部份仅需作对角矩阵的求逆运算，故工作量减少了。但不难想到，其解的精度是不高的。而一个好的数值方案，应该是精度与工作量同时得到改善，为此，本文试图从新的角度来研究这一问题。

本文1986年5月6日收到

为不失一般性，本文首先从有阻尼的粘一弹波方程的定解问题出发，经Galerkin半离散化处理后，得到一个二阶常微分方程系统；然后在令关于时间的二次偏导数为零，并在失去一初值条件的基础上，得到一阶常微分方程系统——对应于热传导问题。对于这两个方程系统分别取一阶导数项（一阶方程）和二阶导数项（二阶方程）作Taylor展开，使其各具二级精度；然后依一个特殊的方案构造隐式和半隐式公式。在本方法中，我们有意让所求矢量的系数矩阵保持正定对称性，这样它们的求逆运算就可用一近似方案来简化之，从而节省大量的计算机时。此外，我们对这两个数值方法的计算稳定性进行了分析，证明是无条件稳定的。最后本文提供了两个简单算例，显示了本法的优越性。

二、一阶与二阶常微分方程系统的导出

我们来考察有阻尼运动方程的定解问题：

$$
\begin{cases}
\alpha(\vec{r},t)u_{tt}+\beta(\vec{r},t)u_t=\gamma(\vec{r},t)\Delta u+f(\vec{r},t) \quad \text{在 } D \text{ 内} & (1)\\
\begin{cases}
u\,|_{t=0}=\psi_1(\vec{r}) & \\
u_t\,|_{t=0}=\psi_2(\vec{r}) & \vec{r}\in\Omega_t\\
(u_n+\nu u)\,|_{\partial\Omega_t}=\mu(\vec{r}_0,t),\ \vec{r}_0\in\partial\Omega_t & t\in[0,\ T]
\end{cases} & \begin{matrix}(2a)\\(2b)\\(2c)\end{matrix}
\end{cases}
$$

其中

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$;

u—所求函数；

Δ—Laplace 算子：

α，β，γ，f，ν，μ，ψ_1，ψ_2 均为已知的连续可微函数；

设 α，β，γ，ν，μ 的变化不依赖于时间；

D—时空域，$R^3\times[0,T]$；

Ω_t—某时刻 $t\in[0,\ T]$ 下的空间域，连续地依赖 t；

$\partial\Omega_t$—Ω_t 的边界，亦连续地依赖 t；

n—$\partial\Omega_t$ 的法方向；

$D=\bigcup\Omega_t$.

对问题(1)—(2)，依 Galerkin 法可构造如下内积：

$$(\ddot{u},v)+(\dot{u},v)+(u,v)=(f,v)+(\mu,v)\,|_{\partial\Omega_t},\quad \forall v\in H_0^1(\Omega_t) \tag{3}$$

式中上标“··”，“·”分别表示对时间的二阶和一阶导数，v 为测试函数，且

$$
\left.\begin{aligned}
v&=\sum_{i=1}^{m}\phi_i(x_j)u_i(t) \qquad j=1,2,3\\
(\ddot{u},v)&=\int_{\Omega_t}\alpha\ddot{u}v\,d\Omega_t\\
(\dot{u},v)&=\int_{\Omega_t}\beta\dot{u}v\,d\Omega_t
\end{aligned}\right\} \tag{4}
$$

$$(u,v)=\int_{\Omega_t}\gamma u_i v_i d\Omega_t+\int_{\partial\Omega_t}\gamma\nu u v d(\partial\Omega_t)$$

$$(f,v)=\int_{\Omega_t}f v d\Omega_t$$

$$(\mu,v)=\int_{\partial\Omega_t}\nu\mu v d(\partial\Omega_t)$$

于是，我们得到下面二阶线性常微分方程系统

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(t) & \text{在}[0,T]\text{内} \quad (5)\\ \boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{\psi}_1,\ \dot{\boldsymbol{u}}(0)=\boldsymbol{\psi}_2 & \quad (6)\end{cases}$$

若令 $u_{tt}=0$，并失去初值条件(2b)，则得到一阶线性常微分方程系统

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(t) & \text{在}[0,T]\text{内}\\ \boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{\psi}_1\end{cases} \tag{7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=[A_{ij}]=(\boldsymbol{\phi}_i,\boldsymbol{\phi}_j)=\int_{\Omega_t}\alpha\boldsymbol{\phi}_i^T\boldsymbol{\phi}_j d\Omega_t\\ \boldsymbol{M}&=[M_{ij}]=(\boldsymbol{\phi}_i,\boldsymbol{\phi}_j)=\int_{\Omega_t}\beta\boldsymbol{\phi}_i^T\boldsymbol{\phi}_j d\Omega_t\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{f}&=[f_i]=(f,\boldsymbol{\phi}_i)+\int_{\partial\Omega_t}\nu\mu\boldsymbol{\phi}_i d(\partial\Omega_t)\\ \boldsymbol{K}&=[K_{ij}]=(\boldsymbol{\phi}_i,\boldsymbol{\phi}_j)=\int_{\Omega_t}\gamma\boldsymbol{\phi}_{i,L}^T\boldsymbol{\phi}_{j,L}d\Omega_t+\int_{\partial\Omega_t}\gamma\nu\boldsymbol{\phi}_i^T\boldsymbol{\phi}_j d(\partial\Omega_t)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中$\boldsymbol{\phi}$为形函数。通常我们设

(1) 对于方程(5)，$\boldsymbol{A}$是正定对称的，$\boldsymbol{M}$与$\boldsymbol{K}$为正定或半正定对称；

(2) 对于方程(7)，$\boldsymbol{M}$是正定对称的，而$\boldsymbol{K}$为正定或半正定对称。

这两个假定，实际上往往成立。

三、两个数值方案及矩阵的简化求逆运算

我们首先分析方程(5)、(7)各自描述的物质运动规律。我们知道，物质非定常运动的实际物理过程，是从不平衡趋向于平衡的衰变过程。这一运动规律在数学上表现为：

(1) 对于热传导问题（方程(7)），要求刚度矩阵 $\boldsymbol{K}\neq 0$，即至少是非负定的，或要求矩阵$(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K})$的全部特征根大于零或等于零（个别）；

(2) 对于一类有阻尼振动（方程(5)），要求阻矩阵$\boldsymbol{M}\neq 0$，同样至少是非负定的，亦即要求矩阵$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{M})$的全部特征根大于零或部份等于零。

下面研究这两类方程的解法，先考察方程(7)并改写为

$$\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}(t) \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{R}=-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}$ 对上式我们有

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{u}}_{n-1}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_{n-1}+\boldsymbol{F}_{n-1}(t)\\ \ddot{\boldsymbol{u}}_{n-1}=[\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}(t)]'_{t=t_{n-1}}=\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{u}_{n-1}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}'(t)\end{cases} \tag{11}$$

而 $\boldsymbol{u}$ 的 Taylor 展开为

$$\boldsymbol{u}_{n-1}=\boldsymbol{u}_n-h\dot{\boldsymbol{u}}_n+\frac{1}{2}h^2\ddot{\boldsymbol{u}}+o(h^3) \tag{12}$$

将式(11)与(12)代入式(7)，从而导出

$$\left(\boldsymbol{M}+h\boldsymbol{K}+\frac{1}{2}h\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_{n-1}+h\left(\boldsymbol{I}-\frac{h}{2}\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1}\right)\boldsymbol{f}-\frac{h^2}{2}\boldsymbol{f} \tag{13}$$

这是一个二级精度的隐式公式，其中时间步长 $h>0$. 可以断言，矩阵($\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$)是对称的，且由于正定的 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 作用在$\boldsymbol{K}$上不可能改变$\boldsymbol{K}$的正惰性指标 r，即

$$r(\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K})\leqslant r(\boldsymbol{K})\leqslant m$$

式中 m 为$\boldsymbol{K}$的阶，仅当$\boldsymbol{K}$为正定时式中等号成立。可判定$\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$至少也是半正定的，而矩阵$\left(\boldsymbol{M}+h\boldsymbol{K}+\frac{1}{2}h^2\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\right)$必然是正定对称的。

对于方程(5)，本方法取下面方案

$$\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{u}}_{n-1}+\boldsymbol{M}(2\dot{\boldsymbol{u}}_n-\dot{\boldsymbol{u}}_{n-1}-h\ddot{\boldsymbol{u}}_{n-1})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{f}_n \tag{14}$$

将上式中的一阶及二阶导数按 Taylor 展开为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{u}}_n=(\boldsymbol{u}_n-\boldsymbol{u}_{n-1})\Big/h+\frac{1}{2}h\ddot{\boldsymbol{u}}_{n-1}+o(h^3)\\ \ddot{\boldsymbol{u}}_n=2(\boldsymbol{u}_n-\boldsymbol{u}_{n-1})/h^2-2\dot{\boldsymbol{u}}_{n-1}/h+o(h^3)\end{cases} \tag{15}$$

再将式(15)代入方程(14)，经整理为

$$\left(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M}+\frac{1}{2}h^2\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{u}_n=(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M})\boldsymbol{u}_{n-1}+h\left(\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}h\boldsymbol{M}\right)\dot{\boldsymbol{u}}_{n-1}+\frac{1}{2}h^2\boldsymbol{f}_n \tag{16}$$

式中矩阵$\left(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M}+\frac{1}{2}h^2\boldsymbol{K}\right)$、$(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M})$及$\left(\boldsymbol{A}+\frac{h}{2}\boldsymbol{M}\right)$也必然是正定对称的。我们说公式(16)是一个半稳式的准二级精度方案，每推进一个 h，须对 $\dot{\boldsymbol{u}}_{n-1}$ 显式地按偏心差分近似，即

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{u}}_{n-1}=(\boldsymbol{u}_{n-1}-\boldsymbol{u}_{n-3})/2h & \text{当 } n\geqslant 3 \text{ 时}\\ \dot{\boldsymbol{u}}_{n-1}=(\boldsymbol{u}_{n-1}-\boldsymbol{u}_{n-2})/h & \text{当 } n<3 \text{ 时}\\ \dot{\boldsymbol{u}}_0=\boldsymbol{\psi}_2 & \text{当 } n=1 \text{ 时}\end{cases} \tag{17}$$

故当 $n\geqslant 3$ 时，公式(16)也是二级精度的。不难看出，公式(13)是一特殊的单步公式，而(16)为一特殊的事实上的四步公式。提高解的精度是一个目标，而减少矩阵求逆的 CPU 时间是我们致力解决的另一目标。为此，我们利用矩阵$\left(\boldsymbol{M}+h\boldsymbol{K}+\frac{h^2}{2}\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\right)$与$\left(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M}+\frac{h^2}{2}\boldsymbol{K}\right)$的正定对称性，实现其近似求逆方案。下面叙述这一方案。

设矩阵$\boldsymbol{L}$是正定对称的，且改写为

$$\boldsymbol{L}=\mathcal{L}+(\boldsymbol{L}-\mathcal{L}) \tag{18}$$

其中$\mathcal{L}$为对角阵，无疑也是正定的，且

$$\mathcal{L}_{ij}=[L_{ij}],\ i=j;\quad \mathcal{L}_{ij}=0,\ i\neq j$$

另设矩阵

$$\boldsymbol{x}=\mathcal{L}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{L}-\mathcal{L})\mathcal{L}^{-\frac{1}{2}} \tag{19}$$

则可导出

$$\boldsymbol{L}=\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{x})\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} \tag{20}$$

设$\|\boldsymbol{x}\|\leqslant 1$，因而可得$\boldsymbol{L}^{-1}$的如下展开式

$$\boldsymbol{L}^{-1}=\mathcal{L}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^3+\cdots\cdots)\mathcal{L}^{-\frac{1}{2}} \tag{21}$$

故由上公式，可求出L^{-1}的各阶近似，如

$$\boldsymbol{L}_2^{-1}=2\mathcal{L}^{-1}\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}\boldsymbol{L}\mathcal{L}^{-1}\right)$$

$$\boldsymbol{L}_3^{-1}=3\mathcal{L}^{-1}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}\mathcal{L}^{-1}+\frac{1}{3}\boldsymbol{L}\mathcal{L}^{-1}\boldsymbol{L}\mathcal{L}^{-1}\right)$$

…………

由于这个求逆方案，仅仅是对角阵的逆与原阵的乘和加法运算，显然将节省大量CPU时间；实践表明，对称正定阵若用此方案作近似求逆，作到三阶近似已十分理想[8]。

四、两个数值方案的稳定性分析

本分析仅限于齐次方程，即认为公式(5)与(7)中的$f(t)=0$；此外，我们依能量法进行讨论。

1. 一阶方程系统

去掉公式(13)中的非齐次项，并改写为

$$\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_{n-1} \tag{22}$$

其中$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{M}+h^2\boldsymbol{K}+\frac{h^2}{2}\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\right)$。对上式，我们取能量范数

$$E=\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}$$

从而有

$$\boldsymbol{u}_n^T\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{u}_{n-1}^T\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{u}_{n-1} \tag{23}$$

式(23)是一个二次型，依数值计算稳定性$\boldsymbol{u}_n<\boldsymbol{u}_{n-1}$，故为保证式(23)成立，必然要求条件

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{P}^{-1}\leqslant\boldsymbol{I} \tag{24}$$

得到满足。为方便计，引入如下正交变换，让

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y},\ 而\ \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$$

代入式(23)，从而得到与式(24)的等价性条件，即要求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{P}^{-1}$ 的每一特征根满足不等式

$$\lambda_i(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{P}^{-1})\leqslant 1,\ i=1,2,\cdots,m \tag{25}$$

条件(25)的成立是显而易见的。因为 $\boldsymbol{P}>\boldsymbol{M}$，故 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 对 $\boldsymbol{M}$ 起着压缩作用，即可断言，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{M}$ 或 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{P}^{-1}$ 的特征根必然是小于 1 、大于零的。由于分析中，对 h 未作任何限制（除 $h>0$ 外），故二阶精度的隐式公式(13)是无条件稳定的。

2. 二阶方程系统

同样，去掉公式(16)中的非齐次项并改写为

$$\left(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M}+\frac{1}{2}h^2\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{u}_n=\left(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M}+\frac{1}{2}h^2\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{u}_{n-1}-\frac{1}{2}h^2\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_{n-1}+h\left(\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}h\boldsymbol{M}\right)\dot{\boldsymbol{u}}_{n-1}$$

或进一步

$$\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{u}_{n-1}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{n-1}+\boldsymbol{D}\varepsilon_{n-1} \tag{26}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\left(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M}+\frac{1}{2}h^2\boldsymbol{K}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}h^2\boldsymbol{K}\right)\\ \boldsymbol{D}&=\left(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M}+\frac{1}{2}h^2\boldsymbol{K}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}h\boldsymbol{M}\right)\\ \varepsilon_{n-1}&=h\dot{\boldsymbol{u}}_{n-1}\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

对式(26)，我们亦取能量范数

$$E_n=\boldsymbol{u}_n^T\boldsymbol{u}_n,\quad E_{n-1}=\boldsymbol{u}_{n-1}^T\boldsymbol{u}_{n-1}$$

故有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_n^T\boldsymbol{u}_n=&\boldsymbol{u}_{n-1}^T\boldsymbol{u}_{n-1}+\boldsymbol{u}_{n-1}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{n-1}+\varepsilon_{n-1}^T\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}\varepsilon_{n-1}\\&-2\boldsymbol{u}_{n-1}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{n-1}+2\boldsymbol{u}_{n-1}^T\boldsymbol{D}\varepsilon_{n-1}-2\boldsymbol{u}_{n-1}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\varepsilon_{n-1}\end{aligned} \tag{28}$$

同样依条件 $E_n\leqslant E_{n-1}$，要求下面不等式

$$\boldsymbol{u}_{n-1}^T(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}_{n-1}+\boldsymbol{u}_{n-1}^T(2\boldsymbol{D}-2\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D})\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_{n-1}^T\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}\varepsilon_{n-1}\leqslant 0 \tag{29}$$

必须成立。作下面分析。

首先对 $\varepsilon_{n-1}/h=\dot{\boldsymbol{u}}_{n-1}$ 取一阶近似

$$\varepsilon_{n-1}/h=(\boldsymbol{u}_n-\boldsymbol{u}_{n-1})/h+o(h^2), \tag{30}$$

不难想到，对于一个实际的物理衰变过程来说，任一时间间隔 $h=t_n-t_{n-1}$ 下前后两个物理量的绝对误差 ε_{n-1} 必介于最大绝对误差与最小绝对误差之间，即

$$-2\boldsymbol{u}_{n-1}\leqslant\varepsilon_{n-1}\leqslant 2\boldsymbol{u}_{n-1} \tag{31}$$

式中 $\boldsymbol{u}_{n-1}>0$. 但应特别注意到：ε_{n-1} 取最大值时，式(29)中的 $\boldsymbol{u}_{n-1}<0$；而取 ε_{n-1} 的最小值时，$\boldsymbol{u}_{n-1}>0$. 另外，仅在无阻尼振动、即等幅振动的情况下，式(31)的等号才成立。显然，若式(29)在这类极端情况下能得到满足，无疑对于有阻尼的振动、式(29)也必然会满足。

现作如下讨论：

(1) 当 $\varepsilon_{n-1}=2\boldsymbol{u}_{n-1}$ 时，式(29)左边为

$$(-\boldsymbol{u}_{n-1}^T)(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{D})(-\boldsymbol{u}_{n-1})-\boldsymbol{u}_{n-1}^T(2\boldsymbol{D}-2\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D})(2\boldsymbol{u}_{n-1})+2\boldsymbol{u}_{n-1}^T\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}(2\boldsymbol{u}_{n-1})$$

$$=-2\boldsymbol{u}_{n-1}^T\left[\left(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M}+\frac{h^2}{4}\boldsymbol{K}\right)\left(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M}+\frac{h^2}{2}\boldsymbol{K}\right)^{-2}\left(\frac{h^2}{2}\boldsymbol{K}\right)\right]\boldsymbol{u}_{n-1}$$

$$-2\boldsymbol{u}_{n-1}^T\left[(h\boldsymbol{M})\left(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M}+\frac{h^2}{2}\boldsymbol{K}\right)^{-2}\left(\boldsymbol{A}+\frac{h}{2}\boldsymbol{M}\right)\right]\boldsymbol{u}_{n-1} \qquad (32)$$

与前文分析类似，上式中二矩阵之特征值必然满足下面关系

$$0\leqslant\lambda_i\left[\left(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M}+\frac{h^2}{4}\boldsymbol{K}\right)\left(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M}+\frac{h^2}{2}\boldsymbol{K}\right)^{-2}\left(\frac{h^2}{2}\boldsymbol{K}\right)\right]\leqslant 1$$

$$0\leqslant\lambda_i\left[(h\boldsymbol{M})\left(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{M}+\frac{h^2}{2}\boldsymbol{K}\right)^{-2}\left(\boldsymbol{A}+\frac{h}{2}\boldsymbol{M}\right)\right]\leqslant 1$$

$$i=1,2,\cdots\cdots,m$$

由于这两组特征值全都是大于或等于零的，故二次型(32)必然满足式(29)的不等条件。

(2) 当 $\varepsilon_{n-1}=-2\boldsymbol{u}_{n-1}$，则式(29)左端为

$$\boldsymbol{u}_{n-1}^T(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}_{n-1}+\boldsymbol{u}_{n-1}^T(2\boldsymbol{D}-2\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D})(-2\boldsymbol{u}_{n-1})+(-2\boldsymbol{u}_{n-1}^T)\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}(-2\boldsymbol{u}_{n-1})$$

继续往下作，无疑会得到与式(32)完全相同的结果，故而有一致的结论。

本分析清楚地表明，一阶方程系统的隐式求解公式(13)和二阶方程系统的半隐式求解公式(16)均是无条件稳定的，且均具二阶精度。

五、算例与结语

1． 我们给出两个简单算例，来验证本方法的有效性。

定解问题 1

$$\begin{cases} u_t=10^{-2}u_{xx}+x & 0\leqslant x\leqslant 1,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=0 \\ u(x,0)=2x \end{cases}$$

该问题具有分离变量形式的解析解。另外，我们还借助下面的逼近函数

$$\tilde{u}(x,t)=x(1-x)[u_1(t)+u_2(t)]$$

（显然满足边界条件），对问题 1 实现 Galerkin 半离化，从而得到一阶常微分方程系统。它的求解方案按公式(13)进行，矩阵求逆运算亦按前文方法予以简化(其过程略)。所得数值与精解比较，作表 1．

定解问题 2

$$\begin{cases} u_{tt}+2u_t=10_{-1}u_{xx}+x & 0\leqslant x\leqslant 1,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=0 \\ u(x,0)=2x,\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

该问题亦有分离变量形式的解析解。我们采用与问题 1 完全相同的逼近函数，在对其实现 Galerkin 半离散化后，得到二阶常微分方程系统。它的求解按公式(16)进行，矩阵近似求逆亦依前法进行（略）。同样，我们将所获结果与精解比较，亦作表 2，

表 1

t	x	u近似	u精解
1.5	0.25	0.22172	0.22386
	0.50	0.43312	0.43129
	0.75	0.60246	0.60766
3	0.25	0.18902	0.18900
	0.50	0.36610	0.36569
	0.75	0.51587	0.51715
4.5	0.25	0.16112	0.16200
	0.50	0.31360	0.31328
	0.75	0.44420	0.44394

表 2

t	x	u近似	u精度
1.5	0.25	−0.261	−0.26270
	0.50	−0.327	−0.32582
	0.75	0.32	0.31532
3	0.25	0.009	0.00821
	0.50	−0.149	−0.14795
	0.75	−0.097	−0.09889
4.5	0.25	−0.01	−0.00965
	0.50	0.0101	0.01025
	0.75	0.0482	0.04884

2. 结语

本文工作旨在为着工程实际问题，降低计算费用和满足较好精度要求。所提两个数值方案是新的，且二阶有阻尼振动方程系统的稳定性证明，有一定特色。另对无阻尼振动，公式(16)依然是半隐式的，且亦无条件稳定。

本方法的基本思想可以应用到一类非线性的非定常输运和振动问题。

参 考 文 献

[1] T.J. Chung, Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, 1978 U.S.A.

[2] J.J. Connor, C.A. Brebbia, Finite Element Techniques for Fluid Flow, News-Butter Worths, 1976.

[3] M, Gellert, A New Algorithm Method for Direct Integration of Dyhamics System, Computers Struct, 9, 401-408 (1978).

[4] L. Brussa, L. Nigro, A One-step Method for Direct Integration of Structural Dyhamics Equations, Int. J. Numer. Methods. eng., 15, 685-690(1980).

[5] C.A. Addison, I.G. Iandwell, Second Derivative Methods Applied to Implicit

First and Second Order Systems, Int. J.Numer. Methods. Eng., 20, 1211-1231 (1984).

[6] T. Belytchko, R. Mulle, Stability of Explicit-Implicit Mesh Partitions in Time Integration, Int. J. Numer. Methods. eng., 12, 1575-1586(1978).

[7] W. K. Liu, T. Belytchko, Partitioned Rational Runge Kutta for Parabolic Systems, Int. J. Numer. Methods. eng., 20, 1581-1597 (1984).

[8] 陈武凡，Navier-Stokes 方程的一类广义变分原理及其有限元分析，第15届国际空间科学与技术会议文摘，东京，p.107, 1986,5.

Implicit and Semi-Implicit Methods Applied to First and Second-Order Systems

Chen Wufan

Abstract

An implicit method and a semi-implicit method applied to first and second-order systems are proposed in this paper. Being 2-Order pricise, these methods have been rigorously jutisfied to be unconditional stable in energy norm. In the struction of formula the coefficeint matrices remain positive definite and symmetry; so the operation of their inverse matrices have been simplified in an approximate procedure.