国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八七年第一期　总第五十七期　No.1 1987　Sum. 57

解稳态二维笛卡尔几何下中子输运方程的离散节块输运方法

王　尚　武

提　要　离散节块输运方法（DNTM）是用来求解中子输运方程的一种高精度的粗网格输运理论方法。它的主要思想是，利用横向积分过程，将原来的二维方程转化为若干个耦合的一维方程。与传统的离散纵标法(S_N方法)相比，该方法所用空间网格可以粗一个量级以上，而计算结果的精度相当。DNTM对角度变量的处理与S_N方法相同。本文介绍了利用平坦泄漏离散节块法数值求解二维笛卡尔几何下中子输运方程的理论和方法。在此基础上，发展了线性泄漏离散节块输运方法。针对这两种情况，分别编制了两个离散节块输运程序，并对几个一维和二维问题的本征值进行了计算，获得了令人满意的结果。

一、引　言

我们知道，在数值求解微分-积分形式的中子输运方程时，空间差分、角度离散S_N方法是人们公认的有效和精确的方法，并在实际问题中被广泛采用。但是，由于S_N方法用的是精细网格，所需计算内存大，计算时间也不经济。在三维情况下这个缺点更为突出。在这种情况下，粗网格方法的使用就显得很有必要。本文所讨论的离散节块输运方法正是近几年发展起来的求解中子输运方法的一种有效的粗网数值方法，它具有精度高、计算时间省、贮存量小等优点。[1—3]

该方法的基本思想是，利用横向积分，将原来的n维方程转化为若干个耦合的一维常微分方程，同时引进了横向洩漏项。这些局部耦合的常微分方程可以按照中子飞行方向转化为局部节块内的一维积分方程。然后，对这些积分方程采用近似求解技术（角度离散、剩余权重法）来求解。各个节块之间的耦合是根据节块表面上中子角通量的连续性条件来实现的。

本文在直角坐标系中将离散节块输运方法用于二维中子输运方程的计算，并把平坦洩漏近似推广到线性泄漏近似。编制了在这两种情况下的计算程序。对几个检验性问题

本文 1986 年4月5日收到

作了计算，验证了方法的正确性。

与此同时，国内外的一些学者也在从事这方面的研究工作，但本文的工作，主要是其中的线性泄漏部份，是独立地完成的。

二、计算方法简介

1. 节块法的基本方程

假定散射和外源均是各向同性的，稳态多群中子输运方程为

$$\hat{\Omega}\cdot\nabla\psi_g(\vec{r},\hat{\Omega})+\Sigma_g^t\psi_g(\vec{r},\hat{\Omega})=Q_g(\vec{r}) \tag{1}$$

其中

$$Q_g(\vec{r})=\begin{cases}\sum\limits_{g'=1}^{G}(x_g\nu\Sigma_{g'}^f+\Sigma_{g'\to g}^s)\phi_{g'}(\vec{r})+S_g(\vec{r}) & \text{(外源问题)} \quad (2a)\\ \sum\limits_{g'=1}^{G}\left(\dfrac{x_g}{\lambda}\nu\Sigma_{g'}^f+\Sigma_{g'\to g}^s\right)\phi_{g'}(\vec{r}) & \text{(本征值问题)} \quad (2b)\end{cases}$$

而

$$\phi_{g'}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi}d\hat{\Omega}\cdot\psi_{g'}(\vec{r},\hat{\Omega}) \tag{3}$$

称为标通量（也称角度积分通量）。在前面各方程中，所用符号有一般公认的意义。

在二维笛卡尔几何下，将所研究的空间分区均匀系统分成若干个互不相交的方形节块（也称子区）。在第 k 个节块内，多组输运方程为：

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\psi_g^k(x,y,\mu,\eta)+\eta\frac{\partial}{\partial y}\psi_g^k(x,y,\mu,\eta)+\Sigma_g^{t,k}\cdot\psi_g^k=Q_g^k(x,y) \tag{4}$$

其中上标 k 是第 k 个节块的标号；(μ,η)分别为中子飞行方向 $\hat{\Omega}$ 对(x,y)轴的方向余弦。

选取局部空间坐标系。其坐标原点位于节块 k 的中央。再引入无量纲的局部空间变量(x,y)，它们分别以节块 k 的长和宽之一半为单位。于是(4)式变为

$$\frac{2\mu}{\Delta x^k}\frac{\partial}{\partial x}\psi_g^k(x,y,\mu,\eta)+\frac{2\eta}{\Delta y^k}\frac{\partial}{\partial y}\psi_g^k+\Sigma_g^{t,k}\cdot\psi_g^k=Q_g^k(x,y) \tag{5}$$

这里$(-1\leqslant x,y\leqslant 1;\ k=1,2,\cdots,K;\ g=1,2,\cdots,G)$；$(\Delta x^k,\ \Delta y^k)$分别代表节块 k 的长和宽。

其中

$$Q_g^k(x,y)=\begin{cases}\sum\limits_{g'=1}^{G}(x_g\nu\Sigma_{g'}^{f,k}+\Sigma_{g'\to g}^{s,k})\phi_{g'}^k(x,y)+S_g^k(x,y) & \text{(固定外源问题)} \quad (6a)\\ \sum\limits_{g'=1}^{G}\left(\dfrac{x_g}{\lambda}\nu\Sigma_{g'}^{f,k}+\Sigma_{g'\to g}^{s,k}\right)\phi_{g'}^k(x,y) & \text{(本征值问题)} \quad (6b)\end{cases}$$

而

$$\phi_{g'}^k(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}d\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\,\psi_{g'}^k(x,y,\mu,\eta) \tag{7}$$

$$(\eta=\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi)$$

2. 线性洩漏离散节块方程

推导的基本步骤：

①用 $P_l(y)$（或 $P_l(x)$）（$l=0,1$）乘方程(5)的两边，再对空间变量 y（或 x）从 -1 到 $+1$ 积分。这样就把原来的偏微分方程转化为几个耦合的一维常微分方程。其中引入了横向泄漏项。

②将所得的常微分方程依照中子飞行方向转化为积分形式。这样就得到了计算节块内部角通量矩以及节块表面角通量矩的方程：

$$\begin{cases}\psi_{gx}^{k(l)}(x,\mu,\eta)=\psi_{gx}^{k(l)}(-1,\mu,\eta)e^{-\Sigma_1^k(1+x)/\mu} \\ \qquad +\dfrac{\Delta x^k}{2\mu}\displaystyle\int_{-1}^{x}dx'\hat{Q}_{gx}^{k(l)}(x',\mu,\eta)e^{-\Sigma_1^k(x-x')/\mu} \qquad (\mu>0) \qquad (8a) \\ \psi_{gx}^{k(l)}(x,\mu,\eta)=\psi_{gx}^{k(l)}(1,\mu,\eta)e^{-\Sigma_1^k(x-1)/\mu} \\ \qquad +\dfrac{\Delta x^k}{2|\mu|}\displaystyle\int_{x}^{1}dx'\hat{Q}_{gx}^{k(l)}(x',\mu,\eta)e^{-\Sigma_1^k(x-x')/\mu} \qquad (\mu<0) \qquad (8b)\end{cases}$$

$$\psi_{gx}^{k(l)}(1,\mu,\eta)=\psi_{gx}^{k(l)}(-1,\mu,\eta)e^{-2\Sigma_1^k/\mu}$$

$$+\frac{\Delta x^k}{2\mu}\int_{-1}^{1}dx'\hat{Q}_{gx}^{k(l)}(x',\mu,\eta)e^{-\Sigma_1^k(1-x')/\mu} \qquad (\mu>0) \qquad (9a)$$

$$\psi_{gx}^{k(l)}(-1,\mu,\eta)=\psi_{gx}^{k(l)}(1,\mu,\eta)e^{-2\Sigma_1^k/|\mu|}$$

$$+\frac{\Delta x^k}{2|\mu|}\int_{-1}^{1}dx'\hat{Q}_{gx}^{k(l)}(x',\mu,\eta)e^{-\Sigma_1^k(x'+1)/|\mu|} \qquad (\mu<0) \qquad (9b)$$

其中

$$l=0,1;\quad \Sigma_1^k\equiv\frac{\Delta x^k}{2}\cdot\Sigma_g^{t,k}$$

$$\psi_{gx}^{k(l)}(x,\mu,\eta)\equiv\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}p_l(y)\psi_g^k(x,y,\mu,\eta)dy \qquad (l=0,1)$$

$$Q_{gx}^{k(l)}(x)\equiv\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}p_l(y)Q_g^k(x,y)dy \qquad (l=0,1)$$

$$\hat{Q}_{gx}^{k(0)}=Q_{gx}^{k(0)}(x)-\frac{\eta}{\Delta y^k}[\psi_g^k(x,1,\mu,\eta)-\psi_g^k(x,-1,\mu,\eta)]$$

$$\hat{Q}_{gx}^{k(1)}=Q_{gx}^{k(1)}(x)-\frac{\eta}{\Delta y^k}[\psi_g^k(x,1,\mu,\eta)+\psi_g^k(x,-1,\mu,\eta)]+\frac{2\eta}{\Delta y^k}\psi_{gx}^{k(0)}(x,\mu,\eta)$$

同理，可得 y 方向上与此类似的方程。这样，我们就得到了由十六个方程组成的耦合方程组。节块间的耦合是通过节块表面角通量矩的连续性条件来实现的。到此为止，我们

所导出的方程未作任何近似，均是严格成立的。

3. 近似技术

只有对方程(8)、(9)中连续的角度和空间变量采用近似技术后，才能数值求解。取近似的办法是：

① 对连续的角度变量进行离散处理。本文作者对二维(x,y)几何下(μ,η)变量如何离散化以及如何计算角度积分通量(7)作了比较详细的探讨[4]。

② 对连续的空间变量的函数利用一组正交完备的函数系（例如勒让德多项式）展开。采用剩余权重处理，得到展开系数所满足的方程

$$\begin{cases} \psi_{g\,xm}^{k(l)}(\mu_s,\eta_{sm})=\psi_{g\,x}^{k(l)}(-1,\mu_s,\eta_{sm})\left[G_{g\,k}^{x+}(\mu_s)\right]_m+\sum\limits_{n=0}^{NM}\left[G_{g\,k}^{xx+}(\mu_s)\right]_{mn}\cdot\hat{Q}_{g\,xn}^{k(l)}(\mu_s,\eta_{sm}) & (\mu_s>0) \quad (10a) \\ \psi_{g\,xm}^{k(l)}(\mu_s,\eta_{sm})=\psi_{g\,x}^{k(l)}(1,\mu_s,\eta_{sm})\left[G_{g\,k}^{x-}(\mu_s)\right]_m+\sum\limits_{n=0}^{NM}\left[G_{g\,k}^{xx-}(\mu_s)\right]_{mn}\cdot\hat{Q}_{g\,xn}^{k(l)}(\mu_s,\eta_{sm}) & (\mu_s<0) \quad (10b) \end{cases}$$

其中

$$\psi_{g\,xn}^{k(l)}(\mu_s,\eta_{sm})\equiv\int_{-1}^{1}\psi_{g\,x}^{k(l)}(x,\mu_s,\eta_{sm})p_n(x)dx$$

$$\hat{Q}_{g\,xn}^{k(l)}(\mu_s,\eta_{sm})\equiv\int_{-1}^{1}\hat{Q}_{g\,x}^{k(l)}(x,\mu_s,\eta_{sm})p_n(x)dx$$

$$(l=0,1;\ n=0,1,\cdots,NM;\ k=1,2,\cdots,K;\ g=1,2,\cdots,G)$$

$$\begin{cases} \psi_{g\,x}^{k(l)}(1,\mu_s,\eta_{sm})=\psi_{g\,x}^{k(l)}(-1,\mu_s,\eta_{sm})T_{g\,k}^{+x}(\mu_s)+\sum\limits_{n=0}^{NM}\left[G_{g\,k}^{+x}(\mu_s)\right]_n\cdot\hat{Q}_{g\,xn}^{k(l)}(\mu_s,\eta_{sm}) & (\mu_s>0) \quad (11a) \\ \psi_{g\,x}^{k(l)}(-1,\mu_s,\eta_{sm})=\psi_{g\,x}^{k(l)}(1,\mu_s,\eta_{sm})T_{g\,k}^{-x}(\mu_s)+\sum\limits_{n=0}^{NM}\left[G_{g\,k}^{-x}(\mu_s)\right]_n\cdot\hat{Q}_{g\,xn}^{k(l)}(\mu_s,\eta_{sm}) & (\mu_s<0) \quad (11b) \end{cases}$$

方程(10)、(11)中各矩阵元的定义以及计算它们时所用的递推公式均在[5]中给出。

4. 线性横向泄漏的处理

在方程(10)、(11)中，定义

$$\mathscr{L}_{g\,xn}^{k(0)}(\mu_s,\eta_{sm})\equiv\frac{2\eta_{sm}}{\Delta y^k}\left[\psi_{g\,y}^{k(n)}(1,\mu_s,\eta_{sm})-\psi_{g\,y}^{k(n)}(-1,\mu_s,\eta_{sm})\right] \quad (12a)$$

$$\mathscr{L}_{g\,xn}^{k(1)}(\mu_s,\eta_{sm})\equiv\frac{2\eta_{sm}}{\Delta y^k}\left[\psi_{g\,y}^{k(n)}(1,\mu_s,\eta_{sm})+\psi_{g\,y}^{k(n)}(-1,\mu_s,\eta_{sm})-\psi_{g\,xn}^{k(0)}(\mu_s,\eta_{sm})\right] \quad (12b)$$

则有

$$\hat{Q}_{g\,xn}^{k(l)}(\mu_s,\eta_{sm})=Q_{g\,xn}^{k(l)}-\mathscr{L}_{g\,xn}^{k(l)}(\mu_s,\eta_{sm}) \quad (13)$$

其中

$$Q_{g\,xn}^{k(l)}=\sum_{g'=1}^{G}\left(\frac{\chi_g}{\lambda}\nu\Sigma_{g'}^{f,k}+\Sigma_{g'\to g}^{s,k}\right)\phi_{g'\,xn}^{k(l)} \quad （本征值问题） \quad (14)$$

而

$$\phi_{g'\,xn}^{k(l)}=\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi}d\hat{\Omega}\,\psi_{g'\,xn}^{k(l)}(\hat{\Omega})=\sum_{s=1}^{N}\sum_{m=1}^{M_s}w_{sm}\psi_{g'\,xn}^{k(l)}(\mu_s,\eta_{sm}) \quad (15)$$

注意到横向泄漏的展开系数依赖于节块表面角通量的n阶矩。但是，目前我们仅知道0阶和1阶矩，故我们只能构造出横向泄漏的前两个系数。即泄漏项只能展开至线性项。

线性泄漏近似也就是节块表面角通量的线性近似。

5. 本征值和节块平均通量的计算公式

利用节块法，我们求出了系统的有效增殖因子——本征值 λ，以及各个均匀节块内的平均群中子通量。

① 本征值的计算公式为

$$\lambda^{(h)}=\lambda^{(h-1)}\cdot\frac{F^{(h)}}{F^{(h-1)}} \tag{16}$$

其中，h 表示外迭代（即裂变源迭代）的次数。而

$$F^{(h)}=\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{g=1}^{G}\nu\Sigma_g^{f,k}\left(\phi_{gx0}^{k(0)}+\phi_{gy0}^{k(0)}\right)\right]^{(h)} \tag{17}$$

② 均匀节块群中子通量的平均值为

$$\langle\phi_g^k\rangle=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}dy\cdot\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi}d\hat{\Omega}\,\psi_g^k(x,y,\hat{\Omega})=\frac{1}{4}\left(\phi_{gx0}^{k(0)}+\phi_{gy0}^{k(0)}\right) \tag{18}$$

三、数 值 计 算

1. 计算的简单步骤

从假设的散射和裂变源以及横向泄漏出发，象解离散 S_N 方程一样[6]，通过对空间角度网格的直接扫描来求解方程(10)、(11)以及与之相应的 y 方向上的方程。得到的节块表面角通量空间矩用来更新泄漏项；得到的节块内部角通量矩的展开系数则用来产生新的散射和裂变源。在计算程序中采用了通常的内（群内散射和泄漏）迭代和外（裂变源）迭代。暂时还没有使用加速收敛的方法。针对以上所述的计算方法，编制了两个 FORTRAN77 程序——FLDNTM 和 LLDNTM，并利用它们对三个检验性问题作了计算，得到了好的数值结果。

2. 数值结果

表 1 给出了程序 FLDNTM 和 LLDNTM 对M.R. Wagner 样本问题[7]本征值的计算结果，并与 S_N 方法程序 TWOTRAN[8]的计算结果作了比较。

表 1 M.R. Wagner 样本问题本征值 λ 的计算结果

方 法	角度近似方式	每个单元网格数目	本征值 λ
TWOTRAN	S_8	10×10	1.044823
LLDNTM[a]	D_8	1	1.044713
FLDNTM[b]	D_8	1	1.046065
TWOTRAN	S_4	10×10	1.045141
LLDNTM[c]	D_4	1	1.045331
FLDNTM[c]	D_4	1	1.045745

a) 线性横向泄漏，节块内部角通量矩展开至平方项。内、外迭代收敛判据分别为 10^{-3} 和 10^{-5}；

b) 平坦横向泄漏，其余同 a)；

c) 内、外迭代收敛判据分别为 10^{-4} 和 10^{-6}. 节块内部角通量矩展开至平方项。

从表 1 可以看出，离散节块粗网格方法对本征值 λ 的计算结果与粗细网格有限差分法的计算结果符合得很好。在同样的角度近似下，LLDNTM程序的计算结果比FLDNTM程序的计算结果要好。

表 2 列出了 FLDNTM，LLDNTM 对轻水堆栅元问题[9]的本征值的计算结果。该问题的 4×4 个均匀的燃料单元被轻水慢化剂所包围。计算参数取自参考文献[10]。将计算结果分别与TPM2D[11]和COXY[9]（两者均为穿透几率法），QP1（积分输运理论）[10]的计算结果作了比较，符合得很好。

表 2 LWR 栅元问题本征值 λ 的计算结果

方 法	角度近似方式	网格数目	本征值
FLDNTM[a]	D_8	6×6	1.2128
	D_4	6×6	1.2138
LLDNTM[b]	D_8	6×6	1.2122
	D_4	6×6	1.2129
TPM2D		6×6	1.2128
QP 1		6×6	1.2128
		10×10	1.2124
COXY		6×6	1.2129
		10×10	1.2140

a) 平坦泄漏，节块内部角通量展开至线性项。内、外迭代的收敛判据分别为 10^{-4} 和 10^{-5}；

b) 线性泄漏，节块内部角通量矩展开至平方项。内、外迭代收敛判据分别为10^{-4}和 10^{-5}.

表 3 列出了 FLDNTM、LLDNTM 对一维水——燃料系统[9]本征值的计算结果。为把一维问题变成二维问题，在无限扩展的 y 方向上取二个节块，并在上下两个端面上采用全反射边界条件。将计算结果与 DTF—IV（S_N 方法）、COXY（穿透几率法）以及扩散理论方法 DIXY[9]、TMP2D[11]的结果作了比较。

表 3 一维水—燃料系统本征值的计算结果

计算方法	角度近似方式	本征值	与 S_{16} 之偏差
DTF—IV	S_{16}	0.56662	/
	S_4	0.56867	+0.00205
TPM2D		0.56746	+0.00084
COXY		0.56583	−0.00079
DIXY		0.57871	+0.01209
FLDNTM[a]	D_4	0.56982	+0.00320
	D_8	0.56721	+0.00059
LLDNTM[b]	D_4	0.56982	+0.00320
	D_8	0.56718	+0.00056

a) 平坦泄漏，节块内部角通量矩展开至平方项。对 D_4 近似，内、外迭代收敛判据分别为 10^{-4} 和 10^{-6}；对 D_8 近似，内、外迭代收敛判据分别为 10^{-3} 和 10^{-5}；

b) 线性泄漏，其余同 a)。

致 谢

本文的完成，先后得到了我校况蕙孙教授、清华大学张育曼老师、美国 J.J.Dorning 教授以及西安交大谢仲生教授的指点，本校 202 教研室陈翔、张树发两位老师也给了我许多有益的帮助。在上机计算过程中，得到了刘鸣飞同志的大力协助，在此一并致谢。

参 考 文 献

[1] J. J. Dorning, Nodal Transport Methcd After Five Years, The Proc. of an Intern. Topical Mtg. Sponsored by the Math. & Comput. Division of ANS, Knoxiville, Tennessee, April 9-11 (1985).

[2] R. D. Lawrence & J. J. Dorning, New Coarse-Mesh Diffusion and Transport Theory Methods for the Efficient Numerical Calculations of Multidimensional Reactor Power Distributions, Proc. of DECD/NEA-CRP Specialists' Mtg. on Calcutation of 3-D Rating Distribution in Operating Reactors, Paris, 383 (1979)

[3] R. D. Lawrence, et al., A Nodal Integral Transport Theory Method for Multidimensional Reactor Physics and Shielding Calculations, Proc. of ANS Topical Mtg. on 1980 Advances in Reactor Physics and Shielding, Sun Valley, ID., 240 (1980)

[4] 王尚武，二维空间几何下角度积分通量的数值计算方法，国防科大学报，第四期，1985 年。

[5] 王尚武，硕士学位论文，1985 年。

[6] K. D. Lathrop & F. W. Brinkley, Theory and Use of the General-Geometry TWOTRAN Program, LA-4432, LASL, 1970.

[7] M. R. Wagner, A Nodal Discrete-Ordinates Method for the Numerical Solution of the Multidimensional Transport Equation, Proc. of ANS Topical Mtg. on Comput. Method in Nucl. Engr., Williamsburg, VA (1979).

[8] K. D. Lathrop & F. W. Brinkley, LASL, LA-4848-MS (1973),

[9] H. Häggblom, et al., Nucl. Sci. Engr., 56, 411 (1975).

[10] C. Maeder, EIR-Bericht Nr-290 (1975).

[11] 赵春雷等，二维轻水堆燃料组件中中子通量分布计算，第二届反应堆数值计算专业会议文献，1985年。

A Discrete Nodal Transport Method Applied to Solve Two-Dimensional Neutron Transport Equation in Cartesian Geometry

Wang Shangwu

Abstract

In this paper, the theory and method are described in detail for solving two-dimensional neutron transport equation in cartesian geometry by using Flat Leakage Discrete Nodal Transport Method (FLDNTM). Based on this, a Linear Leakage Discrete Nodal Transport Method (LLDNTM), more accurate than FLDNTM, is developed. Two computer codes—FLDNTM & LLDNTM, are created and applied to the calculations of one-and two-dimensional test problems, the excellent numerical results are obtained.