

# 极小极大稳健检测器的分析与设计

王海云 罗永光

**提 要** 本文评述了信号的极小极大稳健检测原理,对几种极小极大稳健检测器进行了分析,给出了它们的设计方法和 Monte-Carlo 模拟结果。

## 一、引 言

在信号检测理论的发展过程中,逐步形成了三种检测方法:参数检测法、非参数检测法和稳健检测法。

参数检测法是以噪声概率分布的先验知识完全确知为基础的,这种方法总是针对某种假定的分布模型按照性能要求的某个最佳准则设计出相应的最佳检测器。如果实际噪声分布偏离了模型假定,这种方法的最佳性就失去了基础,有时上述偏离即使很微小,也可能使这种最佳检测器性能严重恶化。

当噪声的统计特性基本上未知时,可以用非参数检测法。这种方法不要求精确的噪声统计特性知识,只须作出诸如分布函数连续等一般性的假设。不过,这种方法过于保守了,没有充分利用可供利用的噪声先验知识。

在实际中,噪声的统计特性往往不是先验确知的,不能用一个固定不变的概率分布作完全的描述。不过,在许多场合下噪声的概率分布总是或多或少地在某种固定分布的某个邻域内变化。稳健检测法就是考虑到这种统计特性不确定性提出来的。它的目的在于既要克服参数检测法只针对假设的确定噪声分布模型进行设计未必完全适合于真实情况的不“稳”性,又要克服非参数检测在噪声分布模型假定上约束过松、对真实的噪声先验知识考虑太少的不“健”性。在设计方法上,稳健检测法也要作噪声分布模型假定,但其模型不象参数法那样约束过死,而要在噪声分布知识的利用上实现最好的折衷。简言之,信号的稳健检测就是企图对于所有可能出现的概率分布设计出检测性能都令人满意的检测器来。

## 二、极小极大稳健检测

信号稳健检测可以在最佳检测的体系下加进一点稳健性的信号预处理而形成,也可

以直接按稳健统计学中的稳健假设检验导出,其中尤以一种称为极小极大稳健检测的方法研究得最为深入。极小极大稳健检测的思路是:如果能够在概率分布变化范围内针对最不利分布按照某个性能标准设计出最佳检测器,那么当实际遇到的概率分布不是最不利的、但又处于上述变化范围内时,检测器的性能总要比最不利分布下的性能优越些。在所有可能出现的概率分布中,找出使检测效果最差的最不利的分布,这就是所谓极小化;而在所有可供选择的检测器中,找出一个最佳的检测器,这就是所谓极大化。解决上述问题的关键在于找出最不利概率分布。只要最不利分布找到了,即可按参数检测方法设计出相应的最佳检测器,这样设计的检测器就是极小极大稳健检测器。

我们用  $D$  表示所有可供选择的检测器  $d$  的集合;用  $Q$  表示所有可能出现的概率密度  $p$  的集合,它也就是观测数据的概率密度可能变化的范围;用  $M$  表示设计检测器所依据的性能标准,它是检测器  $d$ 、概率密度  $p$  的实值函数(泛函):  $M(d, p)$ 。 $M$  可以是势函数、势函数的局部斜率、风险函数、检验统计量的渐近方差、检验效验等等。其中势函数、势函数的局部斜率等为有利量,因为其值越大表明检测器性能越好。反之,风险函数、检验统计量的渐近方差等为不利量。如设  $M$  为有利量,则信号的极小极大稳健检测就归结为对三元总体 ( $D$ 、 $Q$ 、 $M$ ) 寻找极小极大解的问题,即在  $M$  的约束下于  $Q$  中进行极小化处理,而在  $D$  中作极大化处理。

现考虑图 1 (a)、(b) 两种情况,图中我们以横轴上的一段表示概率密度的集合(一个概率密度为其中的一个点);以纵轴表示性能函数的取值;假设  $d_1$ 、 $d_2$ 、 $d_3$  构成可供选择的检测器的集合,即  $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ 。图中的曲线表示各检测器的性能随概率密度不同而变化的规律。

(1) 为叙述方便,我们以  $d^*(p)$  表示对于确定的概率密度  $p$  性能为最好的检测器,即:

$$M[d^*(p), p] = \sup_{d \in D} M(d, p) \quad (1)$$

对于图 1(a),  $d^*(p_1) = d^*(p_2) = d^*(p_3) = d_3$ ; 对于图 1(b),  $d^*(p_1) = d^*(p_2) = d_3$ ,  $d^*(p_3) = d_2$ 。

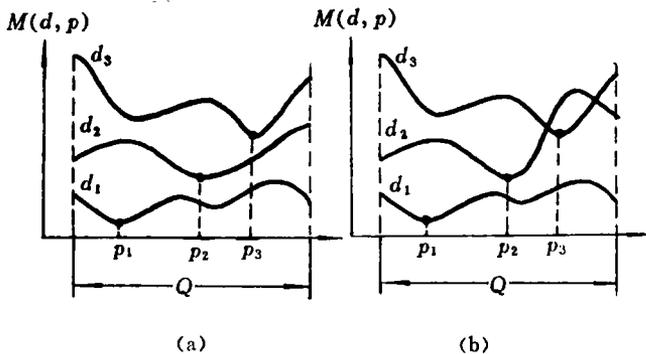


图 1

(2) 我们记  $p^*(d)$  为使检测器  $d$  具有最坏性能的概率密度:

$$p^*(d) \in \arg \min_{p \in Q} M(d, p) \quad (2)$$

一般地说,当  $p$  取遍  $Q$  时,每个检测器  $d$  都要在一些  $p$  上取得性能函数  $M(d, p)$  的最小值。对于图 1(a)、(b) 中的各个检测器,最坏的概率密度均只有一个,分别是:  
 $p^*(d_1) = p_1$ 、 $p^*(d_2) = p_2$ 、 $p^*(d_3) = p_3$ 。

(3) 先让  $p$  取遍  $Q$  以使  $M$  极小,再让  $d$  取遍  $D$  以使极小了的  $M$  再极大。此时的检测器(记为  $d_R$ )称为检测问题  $(D, Q, M)$  的极小极大稳健检测器。即:

$$d_R \in \arg \text{Max}_{d \in D} \inf_{p \in Q} M(d, p) \quad (3)$$

无论图 1(a) 还是图 1(b),各检测器的最坏性能分别为

$$\inf_{p \in Q} M(d_1, p) = M(d_1, p_1)$$

$$\inf_{p \in Q} M(d_2, p) = M(d_2, p_2)$$

$$\inf_{p \in Q} M(d_3, p) = M(d_3, p_3)$$

而且都有:  $M(d_3, p_3) > M(d_2, p_2) > M(d_1, p_1)$ 。这样

$$\text{Max}_{d \in D} \inf_{p \in Q} M(d, p) = M(d_3, p_3)$$

即图 1(a)、(b) 的极小极大稳健检测器都是  $d_3$ 。

(4) 当稳健检测器  $d_R$  工作于集合  $Q$  中的每个概率密度上时,具有相对最坏的最佳性能的概率密度  $p_L$  称为检测问题  $(D, Q, M)$  的最不利概率密度,即:

$$p_L \in \arg \text{Min}_{p \in Q} M[d_R, p] \quad (4)$$

在上两图中,  $p_L$  均为  $p_3$ 。

(5) 假如  $d_L$  是在最不利概率密度  $p_L$  下的最佳检测器:  $d_L = d^*(p_L)$ , 而  $p_L$  又是  $d_L$  具有最坏性能的概率密度:  $p_L = p^*(d_L)$ 。那么就称  $(d_L, p_L)$  为检测问题  $(D, Q, M)$  的鞍点解。也即,如果对于每一对  $(d \in D, p \in Q)$ , 下述鞍点条件成立:

$$M(d, p_L) \leq M(d_L, p_L) \leq M(d_L, p) \quad (5)$$

则  $(d_L, p_L)$  就是上述问题的性能鞍点。

图 1(a) 与图 1(b) 有区别,  $(d_3, p_3)$  是图 1(a) 所示检测问题的鞍点解,但不是图 1(b) 所示检测问题的鞍点解,因为对图 1(b), (5) 式不能满足。图 1(b) 这一类不存在鞍点解的检测问题研究得还不充分。本文只讨论图 1(a) 那样的鞍点解存在的情况。在一定的条件下,如果存在最不利概率密度,就一定存在鞍点解<sup>[1]</sup>, 此时,问题就归结为寻找最不利概率密度。

### 三、几种稳健检测器的分析与设计

#### 1. 基本概率比稳健检测

考虑如下二元假设检验:

$$\begin{aligned} H_0: x_i &= n_i & i &= 1, 2 \dots N \\ H_1: x_i &= \theta s_i + n_i & i &= 1, 2 \dots N \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $s_i=1$  为恒值信号;  $\theta>0$  表示信号的确知幅度参量;  $n_i$  是独立同分布的噪声样本, 只知观测数据的分布属于类高斯分布族:

$$Q_j = \{p_j(x) | p_j(x) = (1 - \varepsilon_j)\varphi_j(x) + \varepsilon_j h_j(x)\} \quad (7)$$

这里  $j=0, 1$ ,  $\varphi_j(x)$  为高斯概率密度,  $0 \leq \varepsilon_j \leq 1$ ,  $h_j(x)$  属于某个对称的概率密度族。

现将这种情况所对应的三元对策问题  $(D, Q, M)$  具体为

$D$ : 由似然比检验构成的最佳检测器  $d$  的集合。

$Q$ : 类高斯分布族;

$M$ : 风险函数  $R(d, p)$ , 其为不利量。

从而, 相应的对策应取极大极小而不再是极小极大, 即:

$$R(d^*, p) \leq R(d^*, p^*) \leq R(d, p^*) \quad (8)$$

首先要寻找最不利概率密度。在类高斯分布族内使风险函数取极大的概率密度对具有下列形式<sup>[2]</sup>:

$$p_0^*(x) = \begin{cases} (1 - \varepsilon_0)\varphi_0(x) & \text{当 } x \in \left\{x \mid \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} < c' \right\} \\ \frac{1}{c''}(1 - \varepsilon_0)\varphi_1(x) & \text{当 } x \in \left\{x \mid \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} \geq c'' \right\} \end{cases} \quad (9)$$

$$p_1^*(x) = \begin{cases} (1 - \varepsilon_1)\varphi_1(x) & \text{当 } x \in \left\{x \mid \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} > c' \right\} \\ c'(1 - \varepsilon_1)\varphi_0(x) & \text{当 } x \in \left\{x \mid \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} \leq c' \right\} \end{cases} \quad (10)$$

式中常数  $c'$ 、 $c''$  可由  $\int_{-\infty}^{\infty} p_j^*(x) dx = 1$  的约束, 用牛顿迭代法解出。

下面按照参数检测法得出相应的检测器结构。对应的单样本对数似然比为

$$\begin{aligned} v(x_i) &= \ln \frac{p_1^*(x_i)}{p_0^*(x_i)} \\ &= \ln c' \quad \text{当 } x_i \theta - \frac{\theta^2}{2} \leq \ln c' \\ &= x_i \theta - \frac{\theta^2}{2} \quad \text{当 } \ln c' < x_i \theta - \frac{\theta^2}{2} < \ln c'' \\ &= \ln c'' \quad \text{当 } x_i \theta - \frac{\theta^2}{2} \geq \ln c'' \end{aligned} \quad (11)$$

按样本独立的假定得检验统计量

$$v(X) = \sum_{i=1}^N v(x_i) \quad (12)$$

于是, 相应的稳健检测器为

$$d^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } v(X) \geq r \\ 0 & \text{当 } v(X) < r \end{cases} \quad (13)$$

判决门限  $r$  可按广义纽曼—皮尔逊准则确定。由检验统计量的概率密度作精确计算是很烦的, 考虑到样本数一般较大, 可以运用中心极限定理进行近似计算:

$$m_0 = E[v(X) | H_0] = N \int_{-\infty}^{\infty} v(x_i) p_0^*(x_i) dx_i \quad (14)$$

$$V_{\sigma r}[v(X) | H_0] = N \left[ \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x_i) p_0^*(x_i) dx_i - \frac{m_0^2}{N^2} \right] \triangleq \sigma^2 \quad (15)$$

于是  $p(v(X) | H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(v-m_0)^2}{2\sigma^2}\right]$ , 而门限可按虚警概率  $\alpha'$  的约束由下式解出:

$$\int_r^{\infty} p(v(X) | H_0) dv = 1 - \Phi\left[\frac{v-m_0}{\sigma}\right] = \alpha' \quad (16)$$

## 2. 渐近稳健 $M$ 检测

依然考虑(6)式的二元假设检验问题, 但此处不再采用似然比函数而以恒值信号幅度  $\theta$  的  $M$  估计量  $\theta_N$  作为检验统计量, 同时也不再以风险函数而是以该  $M$  估计量的渐近方差  $V_M(d, p)$  作为性能函数。由于渐近方差为不利量, 相应的检测问题也成为寻求三元总体  $(D_M, Q, V_M)$  的极大极小解, 其中  $Q$  为一类对称分布族,  $D_M$  是以  $M$  估计量构成的检测器  $d$  的集合。

设  $\theta_N$  为满足下式的  $M$  估计量:

$$\sum_{i=1}^N \rho(x_i - \theta) = \text{Min} \quad (17)$$

式中  $\rho(x_i - \theta) = -\ln p(x_i - \theta)$ 。在  $\rho(x)$  满足一定的正则条件下<sup>[3]</sup>, 当  $N \rightarrow \infty$  时,  $\sqrt{N}\theta_N$  是渐近正态分布的, 其渐近方差为

$$V_M(d, p) = V_M(\rho, p) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} l^2(x) p(x) dx}{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} l'(x) p(x) dx \right]^2} \quad (18)$$

式中  $l(x) = \frac{\partial}{\partial x} \rho(x)$  称为非线性函数。在概率密度集合  $Q$  中使上述渐近方差最大的概率密度  $p^*$  自然是最不利的, 相应的最佳非线性函数

$$l^*(x) = \frac{\partial}{\partial x} \rho^*(x) = \frac{\partial}{\partial x} (-\ln p^*(x)) = -\frac{p^{*'}(x)}{p^*(x)} \quad (19)$$

当集合  $Q$  为  $P$  点分布族时, 即

$$Q = \left\{ p(x) \left| \int_{-a}^a p(x) dx = P \quad p(x) \text{ 在 } (-a, a) \text{ 上对称且连续} \right. \right\} \quad (20)$$

相应的最不利概率密度<sup>[3]</sup>

$$p^*(x) = \begin{cases} b_1 \cos^2(c_1 x) & |x| \leq a \\ b_2 e^{-c_2 |x|} & |x| > a \end{cases} \quad (21)$$

式中常数  $b_1$ 、 $b_2$ 、 $c_1$ 、 $c_2$  由  $P$  点分布族的约束条件构成下列方程组求得:

$$\begin{aligned}
 b_1 \cos^2(c_1 a) &= b_2 e^{-c_2 a} \\
 -2b_1 c_1 \cos(c_1 a) \sin(c_1 a) &= -b_2 c_2 e^{-c_2 a} \\
 \frac{b_1}{2} \left( \frac{\sin 2c_1 a}{2c_1} + a \right) &= \frac{P}{2} \\
 \frac{b_1}{c_1} (ac_1 + \text{ctg } c_1 a) &= 1
 \end{aligned} \tag{22}$$

从而得到最佳非线性函数

$$l^*(x) = \begin{cases} 2c_1 \text{tg}(c_1 x) & |x| \leq a \\ c_2 \text{sgn}(x) & |x| > a \end{cases} \tag{23}$$

由  $\sum_{i=1}^N l^*(x_i - \theta_N) = 0$  解得  $\theta_N$  就可以得到判决规则

$$\begin{aligned}
 \sqrt{N} \theta_N &\begin{cases} \geq r & H_1 \\ < r & H_0 \end{cases} \tag{24}
 \end{aligned}$$

因为  $l^*(x)$  为  $x$  的单调增函数，所以上式又可写成下述公式：

$$\sum_{i=1}^N l^* \left( x_i - \frac{r}{\sqrt{N}} \right) \begin{cases} \geq 0 & H_1 \\ < 0 & H_0 \end{cases} \tag{25}$$

相应的检测器框图如图 2 所示。

判决门限  $r$  同样可由广义纽曼-皮尔逊准则确定。在  $H_0$  假设下， $\sqrt{N} \theta_N$  是零均值正态随机变量，方差为

$$\sigma^2 = V_M(\rho^*, p^*) = \frac{1}{4ab_1 c_1^2} \tag{26}$$

解下列方程可得门限  $r$ ：

$$1 - \Phi \left( \frac{r}{\sigma} \right) = \alpha' \tag{27}$$

### 3. 稳健随机逼近序贯 (SAS) 检测

设二元假设检验

$$\begin{aligned}
 H_0 & \quad x_i = \theta_0 + n_i, \quad i=1, 2 \dots N \dots \\
 H_1 & \quad x_i = \theta_1 + n_i, \quad i=1, 2 \dots N \dots
 \end{aligned} \tag{28}$$

其中  $\theta_j, j=0, 1$  分别代表  $H_j$  假设下信号的幅度，设  $|\theta_1 - \theta_0| = \delta > 0$ ， $\delta$  是一个很小的数。其他与(6)式相同。

对上述二元假设检验，相应三元对策问题  $(D, Q, M)$  现具体为

$D = D_{SA}$ ：为随机逼近 (SA) 估计量作序贯概率比检验构成序贯检测器  $d$  的集合。

$Q$ ：一类对称的概率密度族。

$M(d, p) = V_{SA}(d, p)$ ：检验统计量 SA 估计的渐近方差。在该性能标准下，使得对

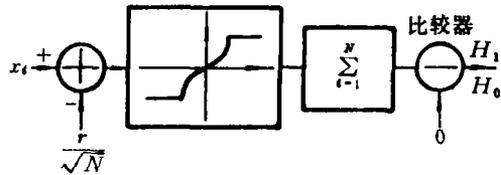


图 2 P 点分布下极值信号的 M 检测器框图

于所有  $p \in Q$  均有  $P_F(p) \leq \alpha$ 、 $P_M(p) \leq \beta$ ， $\alpha$ 、 $\beta$  为给定的性能指标。此时，相应的极大极小对策为

$$V_{SA}(d^*, p) \leq V_{SA}(d^*, p^*) = V_0 \leq V_{SA}(d, p^*) \quad (29)$$

由信号幅度的 SA 估计

$$\theta_N = \theta_{N-1} + \frac{Z_p}{N} g(x_N - \theta_{N-1}) \quad (30)$$

式中  $\theta_N$  为第  $N$  次观测后信号幅度的 SA 估计， $Z_p$  为与  $Q$  有关的常数， $g(\cdot)$  为非降奇函数。如果  $Z_p$  和概率密度  $p(x)$  满足一定的条件<sup>[4]</sup>，则  $\sqrt{N}\theta_N$  为渐近的正态随机变量，其渐近方差为

$$V_{SA}(g, p) = \frac{Z_p^2 \sigma_p^2}{2Z_p m_p'(0) - 1} \quad (31)$$

式中  $\sigma_p^2 = E[g^2(x)]$ ， $m_p'(0) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ - \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \theta') p(x) dx \right] \Big|_{\theta=0}$

同样，在概率密度集合  $Q$  中使渐近方差  $V_{SA}$  最大的  $p^*$  是最不利的概率密度，相应的最佳非线性函数

$$g^*(x) = - \frac{\partial}{\partial x} \ln p^*(x) \quad (32)$$

常数

$$Z_{p^*} = V_{SA}(g^*, p^*)$$

当具体地设  $Q$  为类高斯分布族时，可以得到下列结果：

$$p^*(x) = \begin{cases} (1 - \varepsilon) \varphi(x) & \text{当 } |x| < k \\ (1 - \varepsilon) \varphi(k) e^{-k(|x| - k)} & \text{当 } |x| \geq k \end{cases} \quad (33)$$

$$g^*(x) = - \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p^*(x) = \begin{cases} k & \text{当 } x > k \\ x & \text{当 } |x| \leq k \\ -k & \text{当 } x < -k \end{cases} \quad (34)$$

$$Z_{p^*} = V_{SA}(g^*, p^*) = \frac{1}{(1 - \varepsilon) [2\Phi(k) - 1]} \quad (35)$$

这样，以下式解得的具有鞍点性的  $\theta_N$  作为检验统计量：

$$\theta_N = \theta_{N-1} + \frac{Z_{p^*}}{N} g^*(x_N - \theta_{N-1}) \quad (36)$$

因为

$$p(\theta_N / H_0) \rightarrow N\left(\theta_0, \frac{V_0}{N}\right), \quad p(\theta_N / H_1) \rightarrow N\left(\theta_1, \frac{V_0}{N}\right)$$

所以由对数似然比检验可得稳健 SAS 检测的判决规则为

$$\begin{cases} \frac{N(\theta_1 - \theta_0)}{V_0} \left( \theta_N - \frac{\theta_1 + \theta_0}{2} \right) \leq A & \text{判 } H_0 \text{ 为真} \\ \frac{N(\theta_1 - \theta_0)}{V_0} \left( \theta_N - \frac{\theta_1 + \theta_0}{2} \right) \geq B & \text{判 } H_1 \text{ 为真} \\ A < \frac{N(\theta_1 - \theta_0)}{V_0} \left( \theta_N - \frac{\theta_1 + \theta_0}{2} \right) < B & \text{继续观测} \end{cases}$$

式中:  $A = \ln(\beta/(1-\alpha))$ ,  $B = \ln((1-\beta)/\alpha)$

#### 四、Monte-Carlo 模拟结果

根据上述分析和设计思路,我们在 M-20 微型计算机上对恒值信号的基本概率比稳健检测和渐近稳健 M 检测进行了 Monte-Carlo 试验。

首先,在类高斯分布族中模拟了高斯-拉普拉斯混合概率密度和最不利概率密度;在 P 点分布族中模拟了指数分布、高斯-高斯混合分布和最不利分布。它们的具体形式为

高斯-拉普拉斯混合概率密度:

$$p_{G-L}(x) = (1-\varepsilon)N(0,1) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma_L} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_L}|x|\right)$$

高斯-高斯混合概率密度:

$$p_{G-G}(x) = (1-\varepsilon)N(0,1) + \varepsilon N(0,\sigma_G^2)$$

指数形概率密度:

$$p_{\text{exp}}(x) = \alpha \exp(-\beta|x|)$$

对于基本概率比稳健检测器,在高斯-拉普拉斯混合分布的噪声背景下,分别取样本数  $N=8, 15, 20$ , 得到检测性能与污染概率密度的方差  $\sigma_L$  之间的关系,图 3 为  $N=8$  的情况,图中信号幅度  $\theta=1$ 、虚警率  $\alpha'=0.2$ 、污染度  $\varepsilon=0.1$ 。

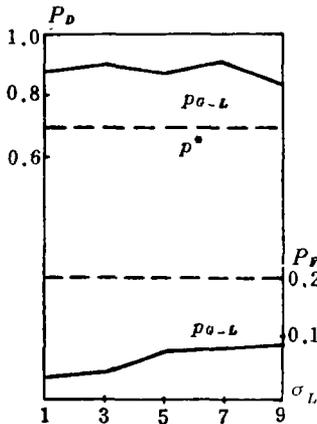


图 3

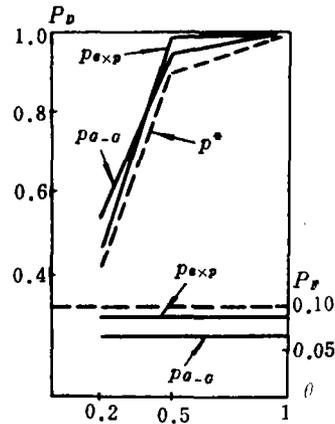


图 4

可见, 虚警概率  $P_F$  随着污染概率密度的方差  $\sigma_L$  的增大而增大。这是因为  $\sigma_L$  越大, 类高斯噪声密度“尾部”就越重, 它意味着大幅度噪声的出现概率越大。这样, 在  $H_0$  假设情况下超过判决门限而判为  $H_1$  的概率也随之增大。由图 3 还可看到,  $P_F$  始终低于最不利情况下的虚警率  $\alpha' = 0.2$ , 而  $P_D$  则大于最不利情况下的检测概率。

对于稳健  $M$  检测器, 分别在指数形分布和高斯—高斯混合分布的噪声背景下得到如图 4 所示的检测性能与信号幅度  $\theta$  之间的关系。图中, 虚警率  $\alpha' = 0.1$ , 样本数  $N = 40$ 。由图可见, 当信号幅度变化时,  $M$  检测器具有良好的恒虚警性能, 而且, 在上述两种噪声背景下  $P_F$  均低于最不利情况的虚警率  $\alpha' = 0.1$ 。同时, 检测概率  $P_D$  均在最不利情况之上。即最不利分布下检测器性能达到下限, 其它分布下的性能不会比它更坏, 表明检测器是稳健的。

### 参 考 文 献

- [1] S. Verd'u, H. V. Poor, On Minimax Robustness: A general Approach and Applications, IEEE Trans. Inf. Theory, Vol IT-30, No.2, 1984 pp328-340.
- [2] R. D. Martin, S. C. Schwartz, Robust Detection of a Known Signal in Nearly Gaussian Noise, IEEE Trans. Inf. Theory, Vol. IT-17 No. 1, 1971 pp 50-56.
- [3] A. H. EL-Sawy, V. D. Vandelinde, Robust Detection of Known Signals, IEEE Trans. Inf. Theory, Vol. IT-23 No. 6, 1977 722-727.
- [4] A. H. EL-Sawy, V. D. Vandelinde, Robust Sequential Detection of Signals in Noise, IEEE Trans. Inf. Theory Vol. IT-25 No. 3, 1979 pp 346-353.

## Analysis and Design of the Minimax Robust Detectors

Wang Haiyun Luo Yongguang

### Abstract

In this paper the principle of the minimax robust detection of signals is reviewed. Certain minimax robust detectors are analyzed and the design methods and Monte—Carlo Simulation results for them are provided.