国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八七年第一期　总第五十七期　No.1 1987 Sum. 57

具有可数个局中人的连续凸对策

黄 振 高

提 要 在合作对策的理论中，关于各种解的概念的研究向来是引人注目的课题。本文旨在研究一类特殊的合作对策即具有可数个局中人的连续凸对策的各种解。所得结果也可看成是具有有限个局中人的凸对策之相应结果的推广。

一、引 言

在合作对策的理论中，关于各种解的概念的研究向来是引人注目的课题。这是很自然的，因为这些解的概念从各自不同的侧面反映各局中人的行为。然而，从Von Neumann首次提出的稳定集到Schmeidler的核子，绝大多数解的概念在数学表示上都很复杂，从形式上很难看出它们所具有的性质，因而进行一般性的研究较为困难。鉴于此，几类特殊的合作对策引起了人们的兴趣，而凸对策就是其中的一类。七十年代初，Shapley和Maschler[4],[6]等人对有限个局中人的凸对策（简称有限凸对策）进行了深刻的研究，发现凸对策的各种解具有特别简单的结构。具体地说，他们证明了有限凸对策的核心（必非空）是唯一的稳定集，谈判集与核心重合，核与核子重合等结论。

具有可数个局中人的合作对策可看作局中人数很多时的理想化模型，研究这种对策有助于我们了解有限对策的局中人数无限增多时各局中人的行动趋势。另一方面，有限个局中人的对策只要添加可数个哑元（即对对策不产生任何影响的局中人）也可看作为有可数个局中人的对策。从这一点来看，后者的研究也具有更加广泛的意义。本文基于Delbrean[2]和Schmeidler[7]关于一般无限凸对策的核心的工作，旨在研究具有可数个局中人的连续凸对策的各种解，其中包括稳定集，谈判集，核和Shapley值等。

二、几条引理

设Ω是一集合，$\mathscr{A}$是Ω的一些子集组成的σ-代数，v是定义在$\mathscr{A}$上的非负实函数，满足$v(\phi)=0$，则称三元组$(\Omega, \mathscr{A}, v)$为对策，其中Ω的元素称为局中人，$\mathscr{A}$的元素称为联盟。在本文中，如果$\mathscr{A}$是Ω的一切子集所成的σ-代数，则把这样的对策记为

本文1986年5月30日收到

(Ω, v)，而且在不引起混淆时，还进一步简记为 v.

称对策 $(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 是连续的，如果对于 $\mathscr{A}$ 中的每一 S，由 $S_n \uparrow S$ 或 $S_n \downarrow S$ $(S_n \in \mathscr{A})$ 均可推得 $v(S_n) \longrightarrow v(S)$.

对策 $(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 的支付是指可测空间 $(\Omega, \mathscr{A})$ 上任何全空间测度为 $v(\Omega)$ 的非负测度。核心是指不能被任何联盟所拒绝的支付全体，即

$$\mathscr{C}(\Omega, \mathscr{A}, v) = \{\mu | \mu \text{ 是} (\Omega, \mathscr{A}) \text{上的测度，且} \mu(\Omega) = v(\Omega), \ \mu(S) \geqslant v(S), \ \forall S \in \mathscr{A}\}$$

另外还定义 $(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 的可接受集为

$$A(\Omega, \mathscr{A}, v) = \{\mu | \mu \text{是} (\Omega, \mathscr{A}) \text{上的测度，且} \mu(S) \geqslant v(S), \ \forall S \in \mathscr{A}\}$$

如果 $\forall \mu \in A(\Omega, \mathscr{A}, v)$，都可找到一个 $\lambda \in \mathscr{C}(\Omega, \mathscr{A}, v)$，使 $\lambda \leqslant \mu$，则说对策 $(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 具有大核心。

$(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 称为恰当对策，如果 $\forall S \in \mathscr{A}$，

$$v(S) = \inf_{\mu \in C(\Omega, \mathscr{A}, v)} \mu(S)$$

$(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 称为凸对策，如果 $\forall S, T \in \mathscr{A}$，

$$v(S) + v(T) \leqslant v(S \cap T) + v(S \cup T)$$

不难看出，如果 $(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 是凸对策，且由 $S_n \uparrow \Omega$ 可推得 $v(S_n) \to v(\Omega)$，则 $(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 是连续对策。

引理 2.1 设 $(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 是连续凸对策，则对于 $\mathscr{A}$ 中的任一上升序列 $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$，存在 $\mu \in \mathscr{C}(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 使 $\mu(S_i) = v(S_i)$，$i = 1, 2, \cdots$. 特别地，$(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 必为恰当对策。

这是 Delbrean[2]的引理 2.

引理 2.2 连续凸对策必具有大核心。

Sharky[8]证明当 Ω 有限时，引理的结论是对的。但当 Ω 无限时，他的证明也完全适用。

引理 2.3 设 $(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 是连续的恰当对策，则下面两个结论成立。

1） 核心 $\mathscr{C}(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 是弱紧集（相对于范数 $\|\mu\| = \sup\limits_{S \in \mathscr{A}} |\mu(S)|$）.

2） 存在非负测度 λ，使得核心中的测度关于 λ 一致连续，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$ 使得当 $\lambda(S) < \delta$ 时，$\mu(S) \leqslant \varepsilon$ $(\forall \mu \in \mathscr{C}(\Omega, \mathscr{A}, v))$.

这是 Schmeidler[7]的定理 3.10.

设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的 σ-子代数，则 $(\Omega, \mathscr{B}, v|_{\mathscr{B}})$（简记为 $(\Omega, \mathscr{B}, v)$）称为 $(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 的子对策，其中 $v|_{\mathscr{B}}$ 表示 v 限制在 $\mathscr{B}$ 上所得的函数。

引理 2.4 设 $(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 是连续凸对策，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的 σ-子代数，则

$$\mathscr{C}(\Omega, \mathscr{B}, v) = \{\mu|_{\mathscr{B}} \mid \mu \in \mathscr{C}(\Omega, \mathscr{A}, v)\}$$

这是 Delbrean[2]的投影定理。

由于我们仅考虑可数个局中人的情况，所以不妨设 $\Omega = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\} = Z$. 本文只限于考虑对策 (Z, v)。在此情况下，支付向量就是 l_1 中的非负向量（这里 $l_1 = \{(x_1,$

$x_2\cdots)\Big|\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty\}$)，即和数有限的非负序列。由于 l_1 中的强拓扑和弱拓扑等价（见[3]，P296），所以由引理2.1 和2.3有：

引理 2.5 连续凸对策 (Z,v) 的核心是 l_1 中的非空紧集。

对于有可数个局中人的对策 (Z,v)，分配集合可定义为

$$I_m(v)=\{x\in l_1 | x(\Omega)=v(\Omega),\ x_i\geqslant v(i)\}$$

其中 $x\in l_1$ 也看作 $(Z,2^Z)$ 上的测度，从而 $x(S)$ 表示和式 $\sum_{i\in S}x_i$. 我们还用 $e(S,x)$ 或 $e(S)$ 表示 $v(S)-x(S)$.

记 Z 的剖分 $\{\{1\},\{2\},\cdots,\{n-1\},\{n,n+1,\cdots\}\}$ 为 $\prod_n$，把 $\prod_n$ 的各元素看作局中人，我们可以得到 n 人对策 $(\prod_n, v|_{\prod_n})$，其中 $v|_{\prod_n}$ 定义为

$$v|_{\prod_n}(S)=v(\bigcup_{j\in S}j),\quad \forall S\subset\prod_n.$$

特别地，若 $x\in l_1$（看作一个对策），则 $x_{\prod_n}=x|_{\prod_n}$ 表示 R^n 中的一个向量，其第 i 个分量为

$$(x_{\prod_n})_i=\begin{cases} x_i & i<n \\ \sum_{j=n}^{\infty}x_j & i=n\end{cases}$$

如果记 $\mathscr{B}(\prod_n)$ 为 $\prod_n$ 生成的 σ-代数，则 $(\prod_n, v|_{\prod_n})$ 也可看作 (Z,v) 的子对策 $(Z,\mathscr{B}(\prod_n),v)$.

三、稳定集、谈判集、核和 Shapley 值

在这一节，除特别声明外，我们总假定局中人集合为 Z.

1. 稳定集

设 x，y 是对策 v 的两个分配，如果存在非空的 $S\subset Z$，使得 $x_i<y_i$ 对每一 $i\in S$ 都成立，而且 $y(S)\leqslant v(S)$，则称 y 优先于 x，记为 $y\ \mathrm{dom}\ x$. v 的稳定集是指任何满足如下两条件的分配子集 R：

(1) R 中任意两个分配都无优先关系。

(2) 若 $x\in I_m(v)-R$，则存在 $y\in R$ 使 $y\ \mathrm{dom}\ x$. 容易看出，如果 v 同时具有核心 C 和稳定集 R，则 $C\subset R$. 因此，如果核心 C 满足稳定集定义中的(2)，则它就是唯一的稳定集。

定理 3.1 设 (Z,v) 是连续凸对策，则核心是唯一的稳定集。

证明 任取核心 $\mathscr{C}(v)$ 外的分配 x，只要证明存在 $z\in\mathscr{C}(v)$ 使 $z\mathrm{dom}x$ 就够了。

因为 $x\bar{\in}\mathscr{C}(v)$，由连续性可知存在有限集合 $S^*\subset Z$ 使

$$e(S^*,x)=v(S^*)-x(S^*)>0$$

命

$$\alpha=\sup_{\substack{S\subset Z\\|S|<\infty}}\frac{e(S,x)}{|S|}>0,\quad（其中 |S| 为 S 的基数）$$

再取 S_0 使 $\frac{e(S_0,x)}{|S_0|}\geqslant\alpha/2$. 由于 S_0 有限，所以当 n 很大时有 $S_0\subset\{1,2,\cdots,n-1\}$，从而 $S_0\in\mathscr{B}(\prod_n)$，故

$$\max_{S\in\mathscr{B}(\prod_n)}\frac{e(S,x)}{|S|_n}\geqslant\frac{e(S_0,x)}{|S_0|}\geqslant\alpha/2 \tag{3.1}$$

这里$|S_n|$表示把$\{n,n+1,\cdots\}$看作单个局中人时S的基数，即

$$|S|_n=\begin{cases}|S| & S\not\supset\{n,n+1,\cdots\}\\ |S-\{n,n+1,\cdots\}|+1 & S\supset\{n,n+1,\cdots\}\end{cases}$$

以下我们不妨设(3.1)对一切 n 都成立,其左边的max在S_n达到,再记$Z_n=\{n,n+1,\cdots\}$.

假设已证存在n_0使 $S_{n_0}\cap Z_{n_0}=\Phi$，即$S_{n_0}\subset\{1,2,\cdots,n_0-1\}$，那么 $|S_{n_0}|=|S_{n_0}|_{n_0}$. 再命

$$y_i=(x_{\prod_{n_0}})_i+\frac{e(S_{n_0},x)}{|S_{n_0}|}\qquad i=1,\cdots,n_0 \tag{3.2}$$

由 S_n 的定义知

$$\frac{e(S,x)}{|S|_n}\leqslant\frac{e(S_n,x)}{|S_n|_n}\qquad\forall S\in\mathscr{B}(\prod_n) \tag{3.3}$$

于是当 $S\in\mathscr{B}(\prod_n)$时，

$$y(S)\geqslant(x_{\prod_{n_0}})(S)+|S|_{n_0}\frac{e(S,x)}{|S|_{n_0}}=v(S)$$

由此可见，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_{n_0})$是对策$(\prod_{n_0},v|_{\prod_{n_0}})$的可接受向量。据引理 2.2，$(\prod_{n_0},v|_{\prod_{n_0}})$ 具有大核心，所以存在 R^{n_0} 中的 $z^{n_0}\in\mathscr{C}(\prod_{n_0},v|_{\prod_{n_0}})$使 $z^{n_0}\leqslant y$. 于是从

$$v(S_{n_0})\leqslant z^{n_0}(S_{n_0})\leqslant y(S_{n_0})=v(S_{n_0})$$

得到

$$z^{n_0}(S_{n_0})=v(S_{n_0}),\quad z_i^{n_0}=y_i,\quad\forall i\in S_{n_0} \tag{3.4}$$

据引理 2.4，存在 $z\in\mathscr{C}(Z,v)$ 使 $z_{\prod_{n_0}}=z^{n_0}$. 由于 z 与 $z_{\prod_{n_0}}$的前n_0-1个分量相同，所以从(3.2)，(3.4)得到

$$z_i>x_i\qquad\forall i\in S_{n_0},\qquad z(S_{n_0})=v(S_{n_0})$$

这表明 $z\,\mathrm{dom}\,x$.

最后还需证明存在n_0使$S_{n_0}\cap Z_{n_0}=\phi$. 假如不存在这样的n_0，那么从 $S_n\in\mathscr{B}(\prod_n)$ 知道 $S_n\supset Z_n$ 对一切 n 成立，写为

$$S_n=S_n'\cup Z_n$$

其中 $S_n'\cap Z_n=\phi$，显见

$$|S_n|_n=|S_n'|+1=s_n'+1$$

由 S_n 的定义看出

$$\frac{e(s_n,x)}{s_n'+1}\geqslant\alpha/2 \tag{3,5}$$

因此$\{s'_n\}$有界（因为$e(S_n,x)$的有界性是显然的）。假如

$$\frac{e(S'_n,x)}{s'_n}\longrightarrow 0 \tag{3.6}$$

由$S'_n\subset S_n$及引理2.1知道存在$x_n\in\mathscr{C}(v)$使

$$v(S_n)=x_n(S_n),\qquad v(S'_n)=x_n(S'_n)$$

于是

$$v(S'_n)-v(S_n)=x_n(S'_n)-x_n(S_n)=-x_n(Z_n)$$

再由引理2.3，存在$\lambda\in l_1$，$\lambda\geqslant 0$，使$\mathscr{C}(v)$中的向量关于λ一致连续，于是$\lambda(Z_n)$很小时，$(x_n-x)(Z_n)$也很小，所以

$$e(S'_n,x)-e(S_n,x)=(x-x_n)(Z_n)\longrightarrow 0 \tag{3.7}$$

因此从(3.6)及s'_n的有界性得到

$$e(S_n,x)=e(S_n,x)-e(S'_n,x)+s'_n\frac{e(S'_n,x)}{s'_n}\longrightarrow 0$$

由此又有$\dfrac{e(S_n,x)}{s'_n+1}\longrightarrow 0$，这与(3.5)矛盾。可见(3.6)不真，因而存在子序列$\{n_k\}$及$\delta>0$使

$$\frac{e(S_{n_k},x)}{s'_{n_k}}\geqslant\delta,\qquad k=1,2,\cdots$$

再写

$$\begin{aligned}
&\frac{e(S'_{n_k},x)}{s'_{n_k}}-\frac{e(S_{n_k},x)}{|S_{n_k}|_{n_k}}\\
&=\frac{e(S'_{n_k},x)}{s'_{n_k}(s'_{n_k}+1)}-\frac{e(S_{n_k},x)-e(S'_{n_k},x)}{s'_{n_k}+1}\\
&\geqslant\frac{1}{s'_{n_k}+1}(\delta-(e(S_{n_k},x)-e(S'_{n_k},x)))
\end{aligned}$$

因为上式右端括号内的第二项当$k\longrightarrow\infty$时以0为极限（见(3.7)），所以括号内的值当k很大时为正，故k充分大时

$$\frac{e(S'_{n_k},x)}{s'_{n_k}}>\frac{e(S_{n_k},x)}{|S_{n_k}|_{n_k}}$$

这与(3.3)矛盾。 证毕

2. 谈判集

设x是v的一个分配，局中人k对局中人l的异议（关于x）是指(y,C)，其中

$$C\in\mathscr{J}_{kl}=\{S\subset Z\mid k\in S,\ l\overline{\in}S\}$$

y是$(C,2^C)$上的测度（也看作有限或无限的序列），满足$y(C)=v(C)$；$y_i>x_i$，$\forall i\in C$。对于这个异议，l对k的反异议是指(Z,D)，其中$D\in\mathscr{J}_{lk}$，Z是$(D,2^D)$上的测度，满足$Z(D)=v(D)$；$Z_i\geqslant y_i$，$\forall i\in D\cap C$；$Z_i\geqslant x_i$，$\forall i\in D-C$，如果对于

每一k对l的异议（关于x），都存在l对k的反异议，则称k与l处于平衡地位。谈判集就是满足如下条件的分配x的全体，即关于分配x，任何两个局中人都处于平衡地位。

显然，核心总是谈判集的子集，一般说来，两者并不重合，但对于连续凸对策，这一结论却是对的。

引理 3.2 设(Z,v)是连续凸对策，$x\in l_1$，$e(\cdot)=e(\cdot,x)=v(\cdot)-x(\cdot)$，$\alpha\in R$. 又设集合

$$\mathscr{P}=\{S\subset Z\mid e(S)\geqslant\alpha\}$$

非空，则$\mathscr{P}$中存在极大元和极小元（按照集合的包含关系）。

证明 由Zorn引理，只要证明$\mathscr{P}$的任一全序子集$\mathscr{P}_0$有上界和下界就够了，即证明

$$M=\bigcup_{S\in\mathscr{P}_0}S\qquad N=\bigcap_{S\in\mathscr{P}_0}S$$

都是$\mathscr{P}$中的元素即可。首先，M作为可数集合Z的子集，其本身也是可数的。设$M=\{i_1, i_1,\cdots,i_n,\cdots\}$, $i_k\in S_k\in\mathscr{P}_0$. 显然$M=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}S_k$. 由于$\mathscr{P}_0$是全序子集，所以对于每个$n$，都存在$S'_n\in\mathscr{P}_0$使$S'_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}S_k$，于是有$S'_n\uparrow M$，由连续性及$S'_n\in\mathscr{P}$得到$e(M)\geqslant\alpha$. 因此，$M\in\mathscr{P}$.

为证$N\in\mathscr{P}$，写

$$Z-N=\bigcup_{S\in\mathscr{P}_0}(Z-S)=\bigcup_{S\in\mathscr{P}'_0}S$$

其中$\mathscr{P}'_0=\{Z-S\mid S\in\mathscr{P}_0\}$仍为全序集合。进行类似的推理，我们知道存在$\mathscr{P}'_0$中的单调上升序列$\{S'_n\}$使$Z-N=\bigcup\limits_{n-1}^{\infty}S'_n$. 于是，$N=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(Z-S'_n)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S_n$，其中$S_n=Z-S'_n\in\mathscr{P}_0$. 再由连续性得$e(N)=\lim\limits_{n\to\infty}e(S_n)\geqslant\alpha$. 故$N\in\mathscr{P}_0$.　　证毕

引理 3.3 设(Z,v)是连续凸对策，$x\in l_1$，则$e(\cdot,x)$可达到上确界，即存在$P\in Z$使$e(P,x)=\sup\limits_{S\subset Z}e(S,x)$.

证明 显然，$e(\cdot,x)$的上确界是有限的，记之为α，把引理3.3应用到非空集合

$$\mathscr{P}_n=\left\{S\subset Z\mid e(S,x)\geqslant\alpha-\frac{1}{n}\right\}$$

可得$\mathscr{P}_n$的一个极小元$P_n\subset Z$. 根据凸性不等式，我们有

$$\begin{aligned}
e\Big(\bigcup_{k=1}^{n}P_k\Big)&=e\Big(P_1\cup\bigcup_{k=2}^{n}P_k\Big)\\
&\geqslant e(P_1)+e\Big(\bigcup_{k=2}^{n}P_k\Big)-e\Big(P_1\cap\Big(\bigcup_{k=2}^{n}P_k\Big)\Big)\\
&=\begin{cases} e\Big(\bigcup\limits_{k=2}^{n}P_k\Big), & \text{若 } P_1\subset\bigcup\limits_{k=2}^{n}P_k\\[2ex] >(\alpha-1)+e\Big(\bigcup\limits_{k=2}^{n}P_k\Big)-(\alpha-1), & \text{否则}\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\geqslant e(\bigcup_{k=2}^{n} P_k)$$

连续施行上面的推理 $n-1$ 次，得到

$$e(\bigcup_{k=1}^{n} P_k) \geqslant e(\bigcup_{k=2}^{n} P_k) \geqslant \cdots \geqslant e(P_n) \geqslant \alpha - \frac{1}{n}$$

记 $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$，由连续性得到

$$e(P) = \lim_{n\to\infty} e(\bigcup_{k=1}^{n} P_k) \geqslant \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{1}{n}\right) = \alpha$$

因此，P 即为所求。 证毕

定理 3.4 连续凸对策的谈判集与核心重合。

该定理的证明与[4]的相应定理相同，但这时必须用刚刚建立的两个引理。

3. 核

设 $x \in l_1$，$i, j \in Z$，$i \neq j$. 记 $e(S,x) = v(S) - x(S)$。令

$$s_{ij}(x) = \sup_{S \in \mathscr{J}_{ij}} e(S,x)$$

核 $k(v)$ 可用下式来定义

$$K(v) = \{x \mid x \in I_m(v),\ (s_{ij}(x) - s_{ji}(x))(x_j - v(j)) \leqslant 0,\ i, j \in Z\}$$

如所周知，有限对策的核总是非空的（这一结论最初是用不动点定理证明的）。对于可数个局中人的对策，情况不再这么简单了。考虑如下的对策 (Z, v)，

$$v(S) = \begin{cases} 1 & S = Z \\ 0 & S \neq Z \end{cases}$$

假如存在 $x \in K(v)$，则由 v 的对称性不难证明 $x_i = x_j$，$\forall i, j \in Z$. 由是 $x = 0$，这与 $x(Z) = v(Z) = 1$ 矛盾，所以 $K(v)$ 是空集，下面的定理表明，对于连续凸对策，这一情况就不再出现了。

引理 3.5 设 $x \in l_1$，(Z, v) 是连续凸对策。记

$$s_{ij}(x) = \sup_{S \in \mathscr{J}_{ij}} e(S,x),\ i \neq j,\ i, j \in Z$$

$$s_{ij}^{(n)}(x) = \max_{S \in \mathscr{J}_{ij} \cap \mathscr{F}(\Pi_n)} e(S,x),\ i \neq j,\ i, j \leqslant n$$

则 $\forall i, j \in Z$，$i \neq j$，$\lim_{n\to\infty} s_{ij}^{(n)}(x) = s_{ij}(x)$，而且在 $\mathscr{C}(v)$ 上收敛是一致的。

证明 我们仅就后一结论进行证明，前者的证明完全类似。由定义显然有

$$S_{ij}^{(n)}(x) \leqslant S_{ij}(x),\ \forall i, j \leqslant n-1,\ i \neq j$$

设 ε 为任意的正数，取 $S \in \mathscr{J}_{ij}$ 使

$$S_{ij}(x) < e(S,x) + \varepsilon/2 \tag{3.8}$$

根据引理 2.3，存在 $\lambda \in l_1, \lambda \geqslant 0$，使 $\mathscr{C}(v)$ 中的向量关于 λ 一致连续。于是存在 $\delta > 0$ 使

$$\lambda(S) < \delta \Longrightarrow x(S) < \varepsilon/4,\ \forall x \in \mathscr{C}(v) \tag{3.9}$$

取$N>j$，使$n>N$时有$\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i<\delta$，于是由上式推得

$$S\subset Z_n \Longrightarrow x(S)<\varepsilon/4,\quad \forall x\in\mathscr{C}(v) \tag{3.10}$$

再由引理2.1，存在$x_S^{(n)}\in\mathscr{C}(v)$使

$$x_S^{(n)}(S)=v(S),\qquad x_S^{(n)}(S\cup Z_n)=v(S\cup Z_n) \tag{3.11}$$

因此，(3.10)，(3.11)和$x\in\mathscr{C}(v)$一起表明，当$n>N$时

$$\begin{aligned} e(S,x)&=v(S)-x(S)=(x_S^{(n)}-x)(S)\\ &=(x_S^{(n)}-x)(S\cup Z_n)-(x_S^{(n)}-x)(Z_n-S)\\ &\leqslant e(S\cup Z_n,x)+\varepsilon/2\\ &\leqslant s_{ij}^{(n)}(x)+\varepsilon/2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

最后一个不等式成立是因为$n>j$时，$S\cup Z_n\in\mathscr{J}_{ij}\cap\mathscr{B}(\prod_n)$。结合(3.8)，(3.12)得到

$$s_{ij}(x)\leqslant s_{ij}^{(n)}(x)+\varepsilon,\qquad n>N,\qquad \forall x\in\mathscr{C}(v)$$

可见，$s_{ij}^{(n)}(x)$在$\mathscr{C}(v)$上一致收敛到$s_{ij}(x)$。 证毕

系 3.6 $s_{ij}(x)$在$\mathscr{C}(v)$上连续。

这是因为由上面的引理，$s_{ij}^{(n)}(x)$在$\mathscr{C}(v)$上一致收敛到$s_{ij}(x)$，而每一个$s_{ij}^{(n)}(x)$显然是连续的。

定理 3.7 设v是连续凸对策，则$K(v)\neq\phi$.

证明 对于每一n，$(\prod_n,\ v|_{\prod_n})$是n人凸对策。据[4]的主要结果，存在$x_{Rn}\in\mathscr{C}(\prod_n,\ v|_{\prod_n})$使

$$\max_{S\in\mathscr{J}_{ij}\cap\mathscr{B}(\Pi_n)} e(S,x_{Rn})=\max_{S\in\mathscr{J}_{ji}\cap\mathscr{B}(\Pi_n)} e(S,x_{Rn}),\quad i\neq j,\quad i,j\leqslant n$$

由投影定理（引理2.4），存在$x^n\in\mathscr{C}(v)$使$(x^n)_{\prod_n}=x_{Rn}$. 于是有

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(n)}(x^n)&=\max_{S\in\mathscr{J}_{ij}\cap\mathscr{B}(\Pi_n)} e(S,x^n)\\ &=\max_{S\in\mathscr{J}_{ji}\cap\mathscr{B}(\Pi_n)} e(S,x_{Rn})\\ &=\max_{S\in\mathscr{J}_{ji}\cap\mathscr{B}(\Pi_n^{\circ})} e(S,x_{Rn})\\ &=\max_{S\in\mathscr{J}_{ij}\cap\mathscr{B}(\Pi_n)} e(S,x^n)=s_{ij}^{(n)}(x^n) \end{aligned} \tag{3.13}$$

由于$\mathscr{C}(v)$是l_1中的紧集（引理2.5），存在$\{x^n\}$的子序列$\{x^{n_k}\}$，使$x=\lim\limits_{k\to\infty}x^{n_k}$（即$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-x_i^{n_k}|\to0$）。$\forall i,j\in Z$，$i\neq j$，由于$s_{ij}^{(n_k)}(x)$在$\mathscr{C}(v)$上一致收敛到连续函数$s_{ij}(x)$，故

$$s_{ij}^{(n_k)}(x^{n_k})\longrightarrow s_{ij}(x),\qquad s_{ji}^{(n_k)}(x^{n_k})\longrightarrow s_{ji}(x)$$

所以由(3.13)得到 $s_{ij}(x)=s_{ji}(x)$，$\forall i,j\in Z$，$i\neq j$. 因此，$xK\in(v)$.

证毕

引理 3.8 $s_{ij}(x)$定义中的上确界可达。

证明与引理3.2，3.3类似。

利用引理3.8，类似[4]，[5]中相应结论的证明，我们可得：

定理 3.9 设 (Z,v) 是连续凸对策，则

i) $k(v)$是谈判集的子集；

ii) $k(v)=\{x\in l_1 \mid x(Z)=v(Z),\ S_{ij}(x)=S_{ji}(x),\ j\neq i\}$；

iii) $k(v)\subset \mathscr{C}(v)$.

当然，iii)亦可从i)和定理3.4得到。

我们猜测连续凸对策的核只由一点组成，但迄今为止尚未得到证明。

4. Shapley值

Artstein[1]已研究过有可数个局中人的对策的Shapley值。他引进了类似于无原子对策值理论中的PNA的Banach空间acM（由形如$f(\mu)$的对策生成的闭线性子空间，其中f是绝对连续函数，μ是 $(Z,2^Z)$ 上的非负测度），并且证明在acM上存在唯一的Shapley值φ，而且φ是连续的(可数个局中人的对策之Shapley值的详细定义见[1])。在这里我们要指出的是，连续凸对策之全体是acM中的子集，而且acM恰是全体连续凸对策生成的闭线性子空间，此地所涉及到的拓扑都是指BV范数下的拓扑。

定理 3.10 acM＝CC，其中CC表示连续凸对策生成的闭线性子空间。如用φ表示acM上的那个Shapley值，则对于任何连续凸对策v，有$\varphi(v)\in\mathscr{C}(v)$。

证明 Artstein在[1]中已经证明acM是有限对策(即存在有限集合$N\subset Z$使$v(S)=v(S\cap N)$，$\forall S\subset Z$) 生成的闭线性子空间。由于任一有限对策都可表示为两个凸对策的差，故acM$\subset$CC，反过来，对于任一连续凸对策(Z,v)，定义有限对策v_n：

$$v_n(S)=v(S\cap N),\qquad N=\{1,2,\cdots,n\},\ n=1,2,\cdots$$

则 $\|v-v_n\|_{BV}\longrightarrow 0$. 这是因为由$v$的凸性与单调性知道

$$\begin{aligned}S_1\subset S_2\Longrightarrow v(S_1)+v(S_2\cap N)&\\ \leqslant v(S_1\cup(S_2\cap N))+v(S_1\cap N)&\\ \leqslant v(S_2)+v(S_1\cap N)&\end{aligned}$$

即

$$S_1\subset S_2\Longrightarrow(v-v_n)(S_1)\leqslant(v-v_n)(S_2)$$

由此得

$$\begin{aligned}\|v-v_n\|_{BV}&=v(Z)-v_n(Z)\\&=v(Z)-v(N)\longrightarrow 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

但$v_n\in$acM，$n=1,2,\cdots$，故$v\in\overline{\text{acM}}=$acM.

最后一个结论对于有限对策的正确性已由Shapley[6]证明，在一般情况下，我们从v和φ的连续性以及$v_n\xrightarrow{BV}v$可知同样的结论也成立。

证毕

本文是在刘德铭老师的指导下完成的，在此表示衷心的感谢。

参考文献

[1] Z. Artstein, Values of Games with Benumerably Many Players. Inter. J. Game Theory, 1(1971), 27-37.

[2] F. Delbrean, Convex Games and Extreme Points. J.Math. Anal. & Appl., 45(1974), 210-233.
[3] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators, Part I, Interscience, New York, 1958.
[4] M. Maschler, B. Peleg and L. S. Shapley, The Kernel and the Bargaining Set for Convex Games, Inter. J. Game Theory. 1(1972), 73-93.
[5] G. Owen, Game Theory, Second Edition, Academic Press, New York, 1982.
[6] L. S. Shapley, Cores of Convex Games, Inter. J. Game Theory, 1(1971), 11-26.
[7] D. Schmeidler, Cores of Exact Games, J. Math. Anal. & Appl., 40(1971), 214-225.
[8] W. W. Sharky, Cooperative Games with Large Cores, Inter. J. Game Theory, 11(1982), 175-182.

Continuous Convex Games with Countably Many Players

Huang Zhengao

Abstract

The purpose of this paper is investigating various solutions of continuous convex games with contably many players. We showed that for such games, the core is the unique stable set and coincides with the bargaininng set (for the grand coalition), and the kernel (for the grand coalition) is a nonempty subset of the core. These can be viewed as a generalization of similar results obtained by Shapley, Maschler and Peleg. The values of the games are also considered and it is proved that the Banach space acM, introduced by Artstein, is the closed linear subspace generated by all these games. Moreover, the value of every such game is in the core, as is the case for finite convex games.