

分段循环 Kalman 滤波及其对 估值精度的影响

金 宏

提 要 正如文[3]所说,分段循环 Kalman 滤波是减少 Kalman 滤波计算的最有效最有前途的方法之一。本文讨论了这种方法以及它对估值精度的影响,并讨论了采样间隔 Δt 、 $\Delta \tau = N \Delta t$ 如何选择的问题。最后给出一例证明这种方法的可用性。

一、引 言

随着科学技术的高速发展, Kalman 滤波(下面统简记为 K. F.) 技术越来越得到广泛利用,特别是空中、海上的导航应用。正如有些文章所说, K. F. 理论被认为是解决宇宙飞船、飞机和船只导航数据处理问题的理想方法^[2]。但是 K. F. 的计算量相当大,这对于飞行器需要进行实时跟踪并估算多个目标带来很大困难。

考虑非线性系统:

$$\dot{X}(t) = f(x(t)) + W(t) \quad (1.1)$$

$$Z(t) = h(x(t)) + V(t) \quad (1.2)$$

其中 $W(t)$ 、 $V(t)$ 为互不相关的零均值的白噪声,且 $X(0)$ 与 $W(t)$ 、 $V(t)$ 互不相关,

$$E[W(t)W^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau),$$

$$E[V(t)V^T(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau) \quad \forall t, \tau$$

其中: $\delta(t)$ 为 Dirac δ — 函数。

若给定初始估值及其估值协方差阵, \hat{X}_0 、 P_0 , 则有广义 K. F. 递推方程:

$$\bar{X}_{K+1} = \hat{X}_K + f(\hat{X}_K, t_K) \Delta t + \left[\frac{F \cdot f}{2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{t_K} \right] \Delta t^2 \quad (1.3)$$

$$\hat{X}_{K+1} = \bar{X}_{K+1} + K_{K+1} [Z_{K+1} - h(\bar{X}_{K+1}, t_{K+1})] \quad (1.4)$$

$$K_{K+1} = \bar{P}_{K+1} H_{K+1}^T [H_{K+1} \bar{P}_{K+1} H_{K+1}^T + R_{K+1}]^{-1} \quad (1.5)$$

$$\bar{P}_{K+1} = \phi_{K+1} P_K \phi_{K+1}^T + Q_K \quad (1.6)$$

$$P_{K+1} = [I - K_{K+1} H_{K+1}] \bar{P}_{K+1} \quad (1.7)$$

其中:

$$H_{K+1} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\bar{X}_{K+1}}, \quad F(t_K) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{X}_K} \quad (1.8)$$

$$\Phi_{K+1} = I + F(t_K) \Delta t + \frac{1}{2} [F'(t_K) + F^2(t_K)] \Delta t^2$$

由(1.3)~(1.7)式可知滤波的主要计算量是求增益矩阵 K_K , 因此减少计算增益阵将起很大作用。此外, 还可以简化模型、降低数据率(即增大 Δt)以及分离变量(将状态变量进行解耦)等^{[1][4][5]}。对增益阵计算的简化也有多种方法, 最简单的是预算增益将其贮存于飞行器计算机内。这样在测量次数较少的情况下, 它是解决配备最佳滤波器问题的实际办法, 当测量次数较多时, 预算增益通常是平稳地随着时间变化的, 并且可以用合适的曲线(直线、指数曲线等)来逼近, 这些曲线给出与真实增益几乎相同的响应, 当然也有它的缺点^{[2][3]}。本文要讨论的分段循环 K. F. 则是比较实用的简化方法之一。

二、分段循环 K.F. 理论

考虑模型(1.1)~(1.2)。所谓分段循环是指在滤波过程中, 不是每一时刻都要计算一次增益, 而是在一小区间内只计算一次开始时刻的增益, 而其它时刻的增益均用这个开始时刻的增益来近似, 这样一段一段逐步滤波。比如:

对第一循环区 K_1 (其区间长为 $\Delta \tau = N \Delta t$, 简称为 N), 在给定初始状态 \hat{X}_0 、 P_0 之下, 有“次佳滤波”:

$$\bar{X}_K = \hat{X}_{K-1} + f(\hat{X}_{K-1}, t_{K-1}) \Delta t \quad (2.1)$$

$$\hat{X}_K = \bar{X}_K + K_1 (Z_K - h(\bar{X}_K, t_K)) \quad (2.2)$$

$$K = 1, 2, \dots, N$$

其中:

$$K_1 = \bar{P}_1 H_1^T (H_1 \bar{P}_1 H_1^T + R_1)^{-1}$$

$$\bar{P}_1 = \Phi_1 P_0 \Phi_1^T + Q_0$$

$$H_1 = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\bar{x}_1}, \quad \Phi_1 = I + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_0} \Delta t$$

对第二循环区 K_{N+1} (假设区间长为 M), 其“次佳滤波”为:

$$\bar{X}_K = \hat{X}_{K-1} + f(\hat{X}_{K-1}, t_{K-1}) \Delta t \quad (2.3)$$

$$\hat{X}_K = \bar{X}_K + K_{N+1} (Z_K - h(\bar{X}_K, t_K)) \quad (2.4)$$

$$K = N+1, \dots, N+M$$

其中:

$$K_{N+1} = \bar{P}_{N+1} H_{N+1}^T (H_{N+1} \bar{P}_{N+1} H_{N+1}^T + R_{N+1})^{-1}$$

$$\bar{P}_{N+1} = \Phi_{N+1} P_N \Phi_{N+1}^T + Q_N$$

$$\Phi_{N+1} = I + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_N} \cdot \Delta t$$

$$H_{N+1} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{N+1}}$$

其初始条件 \hat{X}_N 可由(2.2)获得, 而 P_N 则由下式确定 (可以证明这种近似是合理的而且是最优的^[3])

$$P_N = P_{N/0} - P_{N/0} H_N^T \left(H_N P_{N/0} H_N^T + \frac{R_N}{N} \right)^{-1} H_N P_{N/0} \quad (2.5)$$

其中:

$$P_{N/0} = \Phi_{N,0} P_0 \Phi_{N,0}^T + Q_0$$

$$\Phi_{N,0} = I + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_0} \cdot N \Delta t$$

同样对 \hat{X}_{N+M} 的误差协方差 P_{N+M} 可由下式确定

$$P_{N+M} = P_{N+M/N} - P_{N+M/N} H_{N+M}^T \left(H_{N+M} P_{N+M/N} H_{N+M}^T + \frac{R_{N+M}}{M} \right)^{-1} H_{N+M} P_{N+M/N}$$

其中:

$$P_{N+M/N} = \Phi_{N+M,N} P_N \Phi_{N+M,N}^T + Q_N$$

$$\Phi_{N+M,N} = I + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_N} \cdot M \Delta t$$

重复上述步骤得到每个循环区的“次佳滤波”。有以下几点值得说明:

1. 由于进行分段滤波, 滤波速度的确加快了, 但由于在每一循环区内只计算了一次增益, 这样滤波精度肯定下降。为了能跟踪目标, 区间长度 N 、 M 的取值就不能过大, 但也不能太小, 若取得太小, 其效果不显著。

2. 前面说过, 每个循环区间长度可以取得不一样, 在处理实际问题时, 可视需要再具体确定。后面还将继续考虑这个问题。

3. 对离散系统和线性系统同样可利用这种方法来计算, 而且效果更好。至于这种分段滤波对估值精度的影响如何以及 N 的选择将是下面所要关心的问题。

三、分段循环K.F.对估值精度的影响

讨论之前, 先规定: 凡带有 * 号的表示由(1.3)—(1.7)计算得到的值, 而不带有 * 号的表示由分段循环滤波计算得到的值。且记:

$$\begin{aligned} \delta \bar{P}_K &= \bar{P}_K^* - \bar{P}_K & \delta P_K &= P_K^* - P_K \\ \delta H_K &= H_K^* - H_K & \delta K_K &= K_K^* - K_K \\ \delta \Phi_K &= \Phi_K^* - \Phi_K & K &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.1)$$

并假设由(1.8)得到的 H_K , Φ_K 变化比较小, 即 δH_K , $\delta \Phi_K$ 在下面的讨论中可看成是少量。考虑 K_1 区, 由方程(2.2)、以及由 Taylor 级数展开(1.2)得到的

$$Z_K \doteq h(\bar{X}_K, t_K) + H_K(X_K - \bar{X}_K) + V_K$$

可得

$$P_K = \bar{P}_K - \bar{P}_K H_K^T K_1^T - K_1 H_K \bar{P}_K + K_1 H_K \bar{P}_K H_K^T K_1^T + K_1 R_K K_1^T \quad (3.2)$$

同样由(1.4)得

$$P_K^* = \bar{P}_K^* - \bar{P}_K^* H_K^{*T} K_K^{*T} - K_K^* H_K^* \bar{P}_K^* + K_K^* H_K^* \bar{P}_K^* H_K^{*T} K_K^{*T} + K_K^* R_K K_K^{*T} \quad (3.3)$$

将(3.1)代入(3.3)进行展开并注意到(3.2), 则有

$$\begin{aligned} \delta P_K = & \delta \bar{P}_K - \bar{P}_K H_K^T \delta K_K^T - \delta \bar{P}_K H_K^T K_1^T - \delta \bar{P}_K H_K^T \delta K_K^T \\ & - \delta K_K H_K \bar{P}_K - K_1 H_K \delta \bar{P}_K - \delta K_K H_K \delta \bar{P}_K \\ & + K_1 H_K \bar{P}_K H_K^T \delta K_K^T + K_1 H_K \delta \bar{P}_K H_K^T K_1^T \\ & + K_1 H_K \delta \bar{P}_K H_K^T \delta K_K^T + \delta K_K H_K \bar{P}_K H_K^T K_1^T \\ & + \delta K_K H_K \delta \bar{P}_K H_K^T K_1^T + K_1 R_K \delta K_K^T + \delta K_K R_K K_1^T \\ & + o^2(\delta K_K) + o(\delta H_K) \end{aligned} \quad (3.4)$$

很显然

$$\delta P_1 = 0 \quad \delta \bar{P}_2 = 0 \quad (3.5)$$

由(3.4)得

$$\begin{aligned} \delta P_2 = & -\bar{P}_2 H_2^T \delta K_2^T - \delta K_2 H_2 \bar{P}_2 + K_1 H_2 \bar{P}_2 H_2^T \delta K_2^T \\ & + \delta K_2 H_2 \bar{P}_2 H_2^T K_1^T + K_1 R \delta K_2^T + \delta K_2 R_2 K_1^T \\ & + o^2(\delta K_2) + o(\delta H_2) \end{aligned}$$

由此可知, δP_2 至少是含有 δK_2 一阶的小量

$$\delta P_2 = o(\delta K_2) + o(\delta H_2)$$

另外从(1.6)不难得到:

$$\delta P_{K+1} = \Phi_{K+1} \delta P_K \Phi_{K+1}^T + o(\delta \Phi_{K+1}) \quad (3.6)$$

从而 $\delta \bar{P}_3$ 至少也是含 δK_2 一阶的小量。以此类推可得: $\delta \bar{P}_{K+1}$ 至少是含 $\delta K_2, \dots, \delta K_K$ 的一阶的小量。于是(3.4)可以简写成

$$\begin{aligned} \delta P_K = & \delta \bar{P}_K - \bar{P}_K H_K^T \delta K_K^T - \delta \bar{P}_K H_K^T K_1^T - \delta K_K H_K \bar{P}_K \\ & - K_1 H_K \delta \bar{P}_K + K_1 H_K \bar{P}_K H_K^T \delta K_K^T \\ & + K_1 H_K \delta \bar{P}_K H_K^T K_1^T + \delta K_K H_K \bar{P}_K H_K^T K_1^T \\ & + K_1 R_K \delta K_K^T + \delta K_K R_K K_1^T + o^*(\delta K_K, \delta H_K, \delta \Phi_K) \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中

$$\begin{aligned} o^*(\delta K_K, \delta H_K, \delta \Phi_K) \triangleq & o^2(\delta K_K(2)) + o(\delta H_K(2)) \\ & + o(\delta \Phi_K(2)) + o(\delta K_K(2), \delta H_K(2), \delta \Phi_K(2)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

另外注意到

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbf{K}} &\triangleq K_1 H_{\mathbf{K}} \bar{P}_{\mathbf{K}} H_{\mathbf{K}}^T + K_1 R_{\mathbf{K}} - \bar{P}_{\mathbf{K}} H_{\mathbf{K}}^T \\
&= K_1 (H_{\mathbf{K}} \bar{P}_{\mathbf{K}} H_{\mathbf{K}}^T + R_{\mathbf{K}}) - \bar{P}_{\mathbf{K}} H_{\mathbf{K}}^T \\
&= K_1 (H_{\mathbf{K}}^* (\bar{P}_{\mathbf{K}}^* - \delta \bar{P}_{\mathbf{K}}) H_{\mathbf{K}}^{*T} + R_{\mathbf{K}}) \\
&\quad - (\bar{P}_{\mathbf{K}}^* - \delta \bar{P}_{\mathbf{K}}) H_{\mathbf{K}}^{*T} + o(\delta H_{\mathbf{K}}) \\
&= [K_1 - \bar{P}_{\mathbf{K}}^* H_{\mathbf{K}}^{*T} (H_{\mathbf{K}}^* \bar{P}_{\mathbf{K}}^* H_{\mathbf{K}}^{*T} + R_{\mathbf{K}})^{-1}] (H_{\mathbf{K}}^* \bar{P}_{\mathbf{K}}^* H_{\mathbf{K}}^{*T} + R_{\mathbf{K}}) \\
&\quad - K_1 H_{\mathbf{K}}^* \delta \bar{P}_{\mathbf{K}} H_{\mathbf{K}}^{*T} + \delta \bar{P}_{\mathbf{K}} H_{\mathbf{K}}^{*T} + o(\delta H_{\mathbf{K}})
\end{aligned}$$

且由 (1.5)

$$K_{\mathbf{K}}^* = \bar{P}_{\mathbf{K}}^* H_{\mathbf{K}}^{*T} (H_{\mathbf{K}}^* \bar{P}_{\mathbf{K}}^* H_{\mathbf{K}}^{*T} + R_{\mathbf{K}})^{-1}$$

从而上式可以写成

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbf{K}} &= -\delta K_{\mathbf{K}} (H_{\mathbf{K}}^* \bar{P}_{\mathbf{K}}^* H_{\mathbf{K}}^{*T} + R_{\mathbf{K}}) - K_1 H_{\mathbf{K}}^* \delta \bar{P}_{\mathbf{K}} H_{\mathbf{K}}^{*T} \\
&\quad + \delta \bar{P}_{\mathbf{K}} H_{\mathbf{K}}^{*T} + o(\delta H_{\mathbf{K}}) \\
&= o(\delta K_{\mathbf{K}}(2)) + o(\delta H_{\mathbf{K}}(2)) + o(\delta \Phi_{\mathbf{K}}(2))
\end{aligned}$$

因此 (3.7) 又可简写成

$$\begin{aligned}
\delta P_{\mathbf{K}} &= \delta \bar{P}_{\mathbf{K}} + \Delta_{\mathbf{K}} \delta K_{\mathbf{K}}^T + \delta K_{\mathbf{K}} \Delta_{\mathbf{K}}^T - \delta \bar{P}_{\mathbf{K}} H_{\mathbf{K}}^T K_1^T - K_1 H_{\mathbf{K}} \delta \bar{P}_{\mathbf{K}} \\
&\quad + K_1 H_{\mathbf{K}} \delta \bar{P}_{\mathbf{K}} H_{\mathbf{K}}^T K_1^T + o^*(\delta K_{\mathbf{K}}, \delta H_{\mathbf{K}}, \delta \Phi_{\mathbf{K}}) \\
&= \delta \bar{P}_{\mathbf{K}} - \delta \bar{P}_{\mathbf{K}} H_{\mathbf{K}}^T K_1^T - K_1 H_{\mathbf{K}} \delta \bar{P}_{\mathbf{K}} \\
&\quad + K_1 H_{\mathbf{K}} \delta \bar{P}_{\mathbf{K}} H_{\mathbf{K}}^T K_1^T + o^*(\delta K_{\mathbf{K}}, \delta H_{\mathbf{K}}, \delta \Phi_{\mathbf{K}}) \\
&= (I - K_1 H_{\mathbf{K}}) \delta \bar{P}_{\mathbf{K}} (I - K_1 H_{\mathbf{K}})^T + o^*(\delta K_{\mathbf{K}}, \delta H_{\mathbf{K}}, \delta \Phi_{\mathbf{K}})
\end{aligned} \tag{3.9}$$

再由 (3.6) 得

$$\begin{aligned}
\delta P_{\mathbf{K}} &= (I - K_1 H_{\mathbf{K}}) \Phi_{\mathbf{K}} \delta P_{\mathbf{K}-1} \Phi_{\mathbf{K}}^T (I - K_1 H_{\mathbf{K}})^T \\
&\quad + o^*(\delta K_{\mathbf{K}}, \delta H_{\mathbf{K}}, \delta \Phi_{\mathbf{K}}) \\
&= \dots \\
&= A_1 \delta P_1 A_1^T + o^*(\delta K_{\mathbf{K}}, \delta H_{\mathbf{K}}, \delta \Phi_{\mathbf{K}})
\end{aligned}$$

其中

$$A_1 = \prod_{i=0}^{K-2} (I - K_1 H_{\mathbf{K}-i}) \Phi_{\mathbf{K}-i} \quad (K \geq 2)$$

由 (3.5) 及 (3.8) 得

$$\begin{aligned}
\delta P_{\mathbf{K}} &= o^*(\delta K_{\mathbf{K}}, \delta H_{\mathbf{K}}, \delta \Phi_{\mathbf{K}}) \\
&= o^2(\delta K_{\mathbf{K}}(2)) + o(\delta H_{\mathbf{K}}(2)) + o(\delta \Phi_{\mathbf{K}}(2)) \\
&\quad + o^2(\delta K_{\mathbf{K}}(2), \delta H_{\mathbf{K}}(2), \delta \Phi_{\mathbf{K}}(2))
\end{aligned} \tag{3.10}$$

(3.10) 表明, 通过分段循环滤波, 滤波误差除了增益误差二阶的小量外, 还包含转移矩阵和测量矩阵误差 $\delta \Phi_{\mathbf{K}}$ 、 $\delta H_{\mathbf{K}}$ 一阶的小量以及它们之间的二阶的小量。其实 $\delta \Phi_{\mathbf{K}+1}$ 、 $\delta H_{\mathbf{K}+1}$ 都可看成是 $\delta K_{\mathbf{K}}$ 的小量。如前面所假设, 若它们的变化很小并可忽略的话, 增益误差的二阶小量就是分段滤波误差的主要因素。

特别地对于线性系统, (3.9) 可简写成:

$$\delta P_{\mathbf{K}} = o^2(\delta K_{\mathbf{K}}(2)) \tag{3.11}$$

此式表明, 对于线性系统, 分段循环滤波误差只是增益误差的二阶的小量。

至于滤波误差的大小如何, 还得由系统本身以及各分段区间长度的大小 N 所决定。对一些特殊的、平稳的系统, N 就可取得大些。有时甚至可以取得很大。比如后面的例 1 中 N 可以取到 150 以上。

同样对于第二循环区 K_{N+1} , 也有类似的结果

$$\begin{aligned} \delta P_K &= A_{N+1} \delta P_N A_{N+1}^T + \varrho^2 (\delta K_K(N+1)) \\ &\quad + \varrho (\delta H_K(N+1)) + \varrho (\delta \Phi_K(N+1)) \\ &\quad + \varrho^2 (\delta K_K(N+1), \delta H_K(N+1), \delta \Phi_K(N+1)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中

$$A_{N+1} = \prod_{i=0}^{K-N-1} (I - K_{N+1} H_{K-i}) \Phi_{K-i} \quad (K \geq N+1)$$

若系统是线性的, (3.12) 就可简写成

$$\delta P_K = A_{N+1} \delta P_N A_{N+1}^T + \varrho^2 (\delta K_K(N+1)) \quad (3.13)$$

与(3.10)、(3.11)式不同的是, 这里多了项小量: $A_{N+1} \delta P_N A_{N+1}^T$. 事实上, 当线性系统是一致可观和可控时, K.F. 渐近稳定, 从而 A_{N+1} 有界。

对其它各区结论也是如此。

四、 Δt 和 N 的选择

关于采样间隔 Δt 及 N 大小的选择问题, 文献[2]、[3]、[5]中都进行了比较详细的讨论。我们知道提高 K.F. 运算实时能力的最简单的办法是降低数据率(即增大 Δt)。但是若 Δt 取得过大而又不进行数据预先平滑, 这时滤波性能在一定程度上将会降低。而进行数据的预先平滑是有效的而且是最佳的, 并且滤波方程中的测量噪声协方差将相应降低为: $R(K) = \dot{R}(K) \cdot \Delta t_0 / \Delta t$, 其中 $\dot{R}(K)$ 表示当采样间隔取为 Δt_0 时, t_K 时刻的测量噪声协方差阵。

至于区间长度 N 的选择, 首先从(2.2)可知, $N \geq 2$ 时才有简化意义。另外[4]中给出了分段循环 K.F. 相对于实时的速度与 N 的近似关系式:

$$S_{N, \Delta t} = S_R \left(\frac{\Delta t}{\Delta t_0} \right) \frac{N S_0}{2 S_0 + (N-1)} \quad (4.1)$$

其中: S_0 为数据率相同时, 利用事先算好的权矩阵的 K.F. 的计算速度与 K.F. (1.3) — (1.7) 计算速度之比(与 Δt 无关); S_R 为 K.F. (1.3) — (1.7) 在采样间隔为 Δt_0 时相对于实时的速度。

改写(4.1)成

$$N = \frac{(2S_0 - 1) S_{N, \Delta t}}{S_R \left(\frac{\Delta t}{\Delta t_0} \right) S_0 - S_{N, \Delta t}}$$

由此可知, N 随着 $S_{N, \Delta t}$ 的增大而增大, 但是估值误差与 N 成正比, 所以在确定 N 时, 不仅要考虑到计算速度, 而且也要考虑到估计的收敛性, 以确保跟踪目标。

前面已经提到, 各循环区间长度可以不一样, 但每一区间长度可以根据前一循环区间长度以及其最后时刻的估值误差的大小来确定。显然这样的确定要比随便给定区间长度要好得多。具体过程是这样的:

预先给定估值误差的上、下界, α 、 β , 其中: $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, 且 $\alpha < \beta$, 下面我们来考虑第 $i+1$ 循环区间长度的确定。

假设第 i 循环区的终端时刻是 t_j , 且其区间长度为 N , 并考虑性能指标: $tr(P_j)$ 。

如果 $tr(P_j) \geq \beta$, 说明经过第 i 循环区后, 估值误差已经超过给定的上界, 这时直观上在确定第 $i+1$ 循环区的长度时要适当缩短其长度 (相对于前一区间长度), 即小于 N 。记其长度为 $N - L_\beta$, 其中 L_β 为自然数。

同样, 如果 $tr(P_j) \leq \alpha$, 此式说明经过第 i 循环区后估值误差还很小, 这时我们可适当加长第 $i+1$ 循环区的长度, 以加快滤波速度。记其区间长度为: $N + L_\alpha$, 其中 L_α 为自然数。

如果 $\alpha < tr(P_j) < \beta$, 则说明第 i 循环区间长度 N 选得比较合适, 这样我们可把第 $i+1$ 循环区间长度仍取为 N 。

其中 α 、 β 、 L_α 、 L_β 均可预先就具体问题而具体给定。在后面的例子中, 都取了: $\alpha = L_\alpha = 0$, $\beta = 2$, $L_\beta = 1$ 。

若考虑其它性能指标, 比如 $tr(\delta P_j)$, 同样可按上面的方法去确定 N , 这里就不再赘述。

五、举例说明

考虑一线性离散动力学系统, 其动态方程为

$$X_k = A_k X_{k-1} + W_{k-1}$$

测量方程为

$$Z_k = X_k + V_k$$

其中: X_k 是状态变量, $\{W_k\}$ 、 $\{V_k\}$ 是互不相关的零均值的白噪声序列, 且它们与初始状态均不相关。

若已知: $A_k = 1 + 0.5e^{-T^k}$, $Q_k = 1$, $R_k = 2 + (-1)^k/100$, 时间间隔 $T = 4$, 初始状态: $X_0 = \hat{X}_0 = 100$, $P_0 = 1000$ 。由这些已知数据可看出, 系统比较稳定, 从而分段区间长度 N 可取得很大。若取 $N = 150$, 可得由分段循环滤波得到的状态估值与由 (1.3) — (1.7) 得到的估值相差只在 $-12 \sim 9$ (m) 之间 (图1(a)), 它们的误差相差也只在 $-1.2 \sim 1$ 之间 (图1(b))。

若改变已知条件: $A_k = 1 + 0.5\sin(K/T)$, $Q_k = 2 + (-1)^k$, $R_k = 1$, 即动态噪声变化较大, 但初始状态不变, 这时 N 需适当选择。在图 2 中 N 取值为 15。

图 1 和图 2 表明当系统比较稳定时, 采用分段循环滤波来代替 (1.3) — (1.7) 对估值误差的影响不太大, 从而 N 可取得大些, 以确保滤波在线进行。但就一般问题而

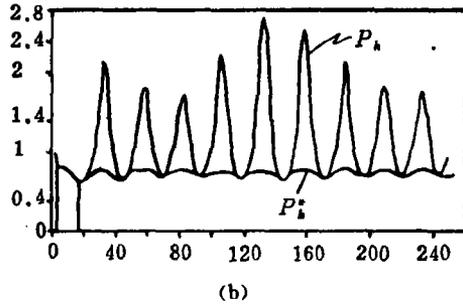
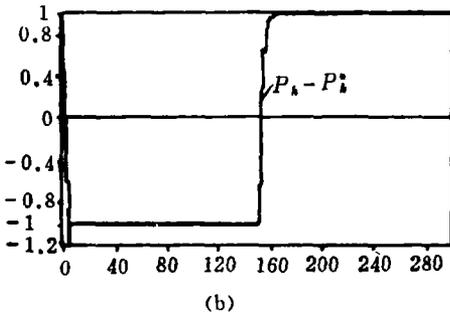
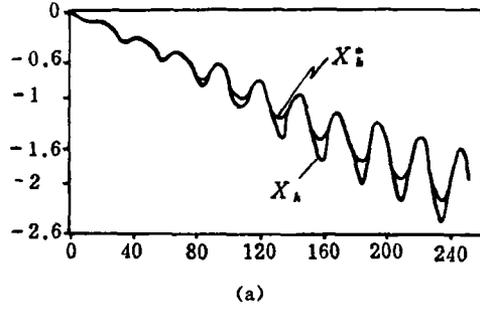
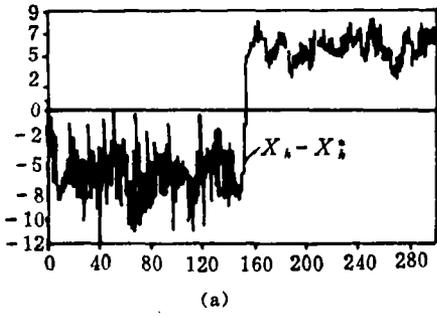


图1

图2

言，系统模型常常是非线性的，这时 N 需适当取值，不能取得过大。

总之为了能实时跟踪，就有必要利用分段循环 K.F. 方法。本文在讨论这种方法的基础上给出具体例子进行了比较，至于 N 还需视具体问题才能确定。

六、符号说明

$$\hat{X}_K \triangleq E[X_K | Z^K] \quad , \quad \text{其中 } Z^K = \{Z_1, \dots, Z_K\}$$

$$\bar{X}_K \triangleq E[X_K | Z^{K-1}]$$

$$P_K = E[(X_K - \hat{X}_K)(X_K - \hat{X}_K)^T]$$

$$\bar{P}_K = E[(X_K - \bar{X}_K)(X_K - \bar{X}_K)^T]$$

$$\delta A_K(M) = \{\delta A_M, \dots, \delta A_K\} \quad K \geq M$$

$o(\delta A)$ 表示至少含有 δA 一阶的小量，

$o^2(\delta A)$ 表示至少含有 δA 二阶的小量。

参 考 文 献

- [1] Paul P. Chen, Real-Time Kalman of Apollo LM/AGS Rendezvous Radar Data, AIAA, No 957, 1970.
- [2] Larry D. Brock and George T. Schmidt, General Questions on Kalman Filtering in Navigation Systems, Theory and Application of Kalman Filtering, AD-704306,

- Chapter 10, 1970. 转载于“国外拦截技术”, 1972年第7期。
- [3] Robert M. Dressler, Real-Time Implementation of the Kalman Filtering Trajectory Estimation, AD-699424.
- [4] R. E. Pentecost and A. R. Stubberud, Synthesis of Computationally Efficient Sequential Linear Estimators, IEEE Tran. on Aerospace and Electronics System, March 1961.
- [5] 贾沛璋, 朱征桃, 最优估计及其应用, 科学出版社, 1984.

The Piecewise—recursive Kalman Filter and Its Influence on the Accuracy of Estimation

Jin Hong

Abstract

As shown in previous studies^[3], the piecewise—recursive Kalman filter is one of the most efficient and promising approach to decrease the computation requirements of the Kalman filter. In this paper the approach and its influence on the accuracy of estimation and the problem of how to choose the Δt (the sampling interval) and $\Delta\tau = N \cdot \Delta t$ (the interval between gain—matrix calculations) are considered. In the final portion of the paper, a example is given to show the applicability of the approach.