国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八七年第二期　总第五十八期　No. 2 1987 Sum. 58

MA模型最优输入信号设计研究

胡德文　　施仁

（国防科技大学　自动控制系）　（西安交通大学）

摘　要：本文借助于组合数学中的差集理论，成功地解决了MA模型二位式周期饱和D-最优输入信号的设计问题。

一、前　　言

在系统辨识中，以二位式伪随机序列，特别是m序列作为输入信号，采用相关辨识法得到了很好的效果。这是因为m序列既能激起系统的所有模态响应，又不会干扰系统的正常运行，并具有产生简单、方便等特点。至今，人们已经研制出了各种型号的m序列发生器和相关分析仪。

但是随着问题的进一步深入，m序列也暴露了它的弱点。由于m序列的自相关函数在非零整数点上的值并非完全等于零，造成了相应的Wiener-Hopf方程中存在冗余项问题[1]，当推广到多变量系统时这一点更加突出。其次，人们还发现m序列会带来精度上的问题[2]。为此，有人对m序列作了不少改进，如逆重复m序列、偏置m序列、加权m序列以及多位式最大长度序列等等。但是这些方法或者是一种较m序列更精确的近似，或者是以产生和计算上的复杂性作代价，且有的难于掌握。

随着生物医学工程以及航空、军事技术的迅速发展，工业多变量控制以及大系统控制技术与理论的发展，人们对辨识信号提出了更高的要求。人们不仅希望测试的精度最高，而且希望加入系统的测试信号尽可能的短，于是最优输入信号的研究工作开展起来了[3]。1975年，在第6届IFAC世界大会上，Wernstedt和Hoffmeyer-Zlotnik[4]报告了他们用D-最优输入信号Plackett-Burman[5]序列辨识人体血液循环系统的脉冲响应函数的成果，比伪随机m序列的辨识精度提高了约50%。1986年，胡德文[6]曾在m序列的基础上提出了另一种D-最优输入信号IMS。本文利用组合数学的差集理论，从更广泛的角度寻找二位式周期饱和D-最优输入信号，对其功率谱密度进行推导，并与高斯白噪声、m序列及P-B序列作较为全面的比较。

本文1986年11月2日收到

二、最优输入信号的设计

1. 最优输入信号的概念

在系统辨识中，为了比较不同的试验，需要有一个评价试验“优良性”的统一量度，这一量度应与输入——输出信号拟合的参数精度有关。1946年，Rao和Cramer证明了这样一个重要的结论，即参数估计协方差在一定条件下，满足不等式

$$\mathrm{cov}\hat{\theta} \geqslant M_\theta^{-1}$$

其中 M_θ 是Fisher信息矩阵。当不等式取等号时，称参数估计达到了最小方差界（Rao-Cramer下界），参数估计精度达到了最高的程度。试验中，通常取

$$J = -\log\det M_\theta$$

或

$$J = \mathrm{tr}\, M_\theta^{-1}$$

作为最优设计准则。

考虑滑动平均（MA）模型：

$$y_t = b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} + \cdots + b_n u_{t-n} + \varepsilon_t$$

并设噪声 ε_t 服从正态分布 $N(0,\Sigma^2)$，记参数向量：

$$\beta^T = (b_1, b_2, \cdots, b_n, \Sigma^2) = (\theta^T, \Sigma^2)$$

可以证明[1]，其Fisher信息矩阵为

$$M_\beta = \begin{pmatrix} \dfrac{N}{\Sigma^2}\cdot\Gamma & 0 \\ 0 & \dfrac{N}{2\Sigma^4} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_\theta & 0 \\ 0 & \dfrac{N}{2\Sigma^4} \end{bmatrix}$$

式中

$$\Gamma = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\begin{bmatrix} u_{t-1}^2 & u_{t-1}u_{t-2} & \cdots & u_{t-1}u_{t-n} \\ u_{t-2}u_{t-1} & u_{t-2}^2 & \cdots & u_{t-2}u_{t-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{t-n}u_{t-1} & u_{t-n}u_{t-2} & \cdots & u_{t-n}^2 \end{bmatrix}$$

这里，设定输入信号服从功率约束：

$$\max_i \left\{ \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u_{t-i}^2 \right\} = 1 \qquad i = 1, \cdots, n$$

根据已知结果，极小化 J 等价于寻找序列 $\{u_t, t = 1-n, \cdots, N-1\}$，使得

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u_{t-i}u_{t-j} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases}$$

若输入信号满足这一要求，则在有效的算法下，

$$\mathrm{cov}\hat{\theta} = M_\theta^{-1} = \frac{\Sigma^2}{N}\cdot\Gamma^{-1} = \frac{\Sigma^2}{N}\cdot I$$

参数估计达到了最小方差界的最小值。

当 N 充分大时，输入信号可用白噪声序列近似代替，m 序列也具有近似的性质，但当样本 $N = n$ 时，m 序列的结果仅为

$$\operatorname{cov}\theta=\frac{\Sigma^2}{N+1}\begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 信号设计

1) 从前面看到，最优输入信号的设计就是寻找自相关函数在非零整数点上恒为零的序列。为了解决这一问题，我们将差集引进来。

所谓差集[8]，系指一由K^+个整数组成的模N的子集 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_{k^+}\}$，此子集诸元素间的差值 $d_i-d_j(\mathrm{mod}N)$，$i\neq j$，$i,j=1\sim K^+$，取数列 $1,2,\cdots$，$N-1$ 中每一个数恰好各 λ 次，用 $D(N,K^+,\lambda)$ 表征。如果在序号为 d_i，$d_i\in D$ 的码位上置符号 1，其余码位上置符号 -1，就得一 N 位码，它必具单值周期自相关函数：

$$R(m)=N-4(K^+-\lambda),\quad m\neq 0(\mathrm{mod}N)$$

以 7 位码 $-1,-1,1,-1,1,1,-1$ 为例，$D=\{3,5,6\}$，即 $D(7,3,1)$，这是一个周期长度为 7 的 m 序列，周期自相关函数在非零点上等于 -1。

2) 设输入信号为 $u(t)$，取：

$$u(t)=\begin{cases} A & t=d_i\in D,\ (\mathrm{mod}N) \\ B & t\neq d_i\in D,\ (\mathrm{mod}N) \end{cases}$$

这时，$R_u(m)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}u(t)u(t+m)$ 中的 $u(t)u(t+m)=A^2$ 的次数等于 λ，$u(t)u(t+m)=AB$ 的次数为 $2(K^+-\lambda)$，而 $u(t)u(t+m)=B^2$ 的次数为 $N-2K^++\lambda$，即[7]：

$$R_u(m)=\lambda A^2+2(K^+-\lambda)AB+(N-2K^++\lambda)B^2$$

令 $R_u(m)=0$，解二次方程，得

$$\frac{A}{B}=\frac{-(K^+-\lambda)\pm\sqrt{(K^+)^2-\lambda N}}{\lambda},\quad (\lambda\neq 0)$$

根据差集的定义，我们又有：$\lambda(N-1)=K^+(K^+-1)$，因此：

$$\frac{A}{B}=\frac{-(K^+-\lambda)\pm\sqrt{K^+-\lambda}}{\lambda}$$

若考虑单位功率约束，A、B 还应满足 $R_u(0)=1$，即：

$$K^+A^2+(N-K^+)B^2=N$$

特别地，对于形为 $D\left(N,\frac{N-1}{2},\frac{N-3}{4}\right)$的差集，

$$A=\frac{\sqrt{N}}{N}(\sqrt{N+1}\pm1),\quad B=\frac{\sqrt{N^2+N}}{N^2+N}(-N+1\pm\sqrt{N+1})$$

m 序列和平方剩余序列设计出的最优输入信号，都具有这种形式。

3) 我们曾在 m 序列的基础上提出了 IMS，并指出在功率约束下这种序列即为 MA 模型的周期饱和 D—最优输入信号。下面，我们就平方剩余序列设计另一种形式的最优输入信号，并采用我们自己在数论上的研究成果，指出一种“循环小数”设计法。

设P为素数，$P\equiv 3(\mathrm{mod}4)$，b为P的原根。这时，可将$\frac{1}{P}$展开成循环节长为$P-1$位的b进制纯循环小数，记为：

$$\frac{1}{p}=0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_{p-1}$$

这时，当$n_i=1,2,\cdots,p-1$时，$\frac{n_i}{p}$必具有如下形式

$$\frac{n_i}{p}=0.\dot{a}_ia_{i+1}\cdots a_{p-1}a_1\cdots\dot{a}_{i-1},\quad(1\leqslant n_i\leqslant p-1)$$

n_i值的大小可由整数$\overline{a_ia_{i+1}\cdots a_{p-1}a_1\cdots a_{i-1}}$的大小依次序排列出，不必另行计算。

现在我们取：

当i为奇数时，序列第n_i位上的值为A；

当i为偶数时，序列第n_i位上的值为B。这时，所得到的序列即为MA模型的一种最优输入信号。限于篇幅，在这里略去证明，举例说明：

$$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}=0.\dot{a}_1a_2a_3a_4a_5\dot{a}_6,\quad i\text{ 为奇数，}u_1=A;$$

推出：

$$\frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4}=0.\dot{a}_3a_4a_5a_6a_1\dot{a}_2,\quad i\text{ 为奇数，}u_2=A;$$

$$\frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}=0.\dot{a}_2a_3a_4a_5a_6\dot{a}_1,\quad i\text{ 为偶数，}u_3=B;$$

$$\frac{4}{7}=0.\dot{5}7142\dot{8}=0.\dot{a}_5a_6a_1a_2a_3\dot{a}_4,\quad i\text{ 为奇数，}u_4=A;$$

$$\frac{5}{7}=0.\dot{7}1428\dot{5}=0.\dot{a}_6a_1a_2a_3a_4\dot{a}_5,\quad i\text{ 为偶数，}u_5=B;$$

$$\frac{6}{7}=0.\dot{8}5712\dot{4}=0.\dot{a}_4a_5a_6a_1a_2\dot{a}_3,\quad i\text{ 为偶数，}u_6=B;$$

另外$u_0=B$，当$t>6$，或$t<0$时，$u(t)$作周期为7的延拓。本例中，$A=(2\cdot\sqrt{14}\pm\sqrt{7})/7$
$B=(-3\cdot\sqrt{14}\pm2\sqrt{7})/14$

在将$\frac{1}{p}$化成小数时，只需计算到第$\frac{p-1}{2}$位，其余位数的值可利用$a_{i+\frac{p-1}{2}}=a_i$计算即可。

3. 最优输入信号在最小二乘方法中噪声的要求

以上的工作，已经解决了在功率约束下MA模型的最优输入信号设计问题。现在我们再看一些文献中对模型中噪声加以“高斯白噪声”这一限制是否有无必要。虽然有的文献谈到了这个问题，但并无推导。系统模型仍为

$$y_t=b_1u_{t-1}+b_2u_{t-2}+\cdots+b_nu_{t-n}+\varepsilon_t$$

令

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix},\quad \theta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix},\quad \varepsilon=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix},\quad \phi=\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \cdots\cdots & u_{1-n} \\ u_1 & u_2 & \cdots\cdots & u_{2-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{N-1} & u_{N-2} & \cdots\cdots & u_{N-n} \end{bmatrix}$$

那么

$$Y=\phi\cdot\theta+\varepsilon$$

根据参数估计的最小二乘准则，推得：

$$\hat{\theta}=(\phi^T\phi)^{-1}\phi^TY=\theta+(\phi^T\phi)^{-1}\phi^T\cdot\varepsilon$$

协方差矩阵为

$$\mathrm{cov}\hat{\theta}=E\{(\theta-\hat{\theta})(\theta-\hat{\theta})^T\}=(\phi^T\phi)^{-1}\phi^T\cdot E\{\varepsilon\cdot\varepsilon^T\}\cdot\phi(\phi^T\phi)^{-1}$$

如果 $E\{\varepsilon\cdot\varepsilon^T\}$ 可与 $\phi(\phi^T\phi)^{-1}$ 互换，则 $\mathrm{cov}\hat{\theta}=(\phi^T\phi)^{-1}E\{\varepsilon\cdot\varepsilon^T\}$。为此，只需要噪声$\varepsilon_t$是零均值、不相关。这时的 $E\{\varepsilon\cdot\varepsilon^T\}$ 为正定对角线矩阵。特别地，当 $N=n$ 时，在 $J=\log\det(\mathrm{cov}\hat{\theta})$ 下，因 $J=-\log\det(\phi^T\phi)+\log\det E\{\varepsilon\cdot\varepsilon^T\}$，等价于 $J=-\log\det(\phi^T\phi)$。因此，“不相关”要求亦可取消。

4. 最优输入信号的功率谱密度

将N位码变成连续型的信号，采用面积法[1]可证明，其自相关函数在整数点上的值与离散信号在对应点上的值相等。当 $k\Delta<\tau<(k+1)\Delta$ 时，$R_u(\tau)$ 是关于 τ 的直线段，其两端取值分别为 $R_u(k\Delta)$ 和 $R_u((k+1)\Delta)$。不难理解，对于一般的非等幅二位式信号，这个结论同样成立（关于这一点，文[6]就IMS作了详细的证明）。故最优输入信号的相关函数（连续型）为

$$R_u(\tau)=\begin{cases} R_u(0)\cdot\left(1-\dfrac{|\tau|}{\Delta}\right), & |\tau|\leqslant\Delta\text{ 时}\quad(\Delta\text{为时间间隔}) \\ 0 & \Delta<|\tau|\leqslant(N-1)\Delta\text{ 时} \end{cases}$$

由于 $R_u(\tau)$ 的周期 $T_p=N\cdot\Delta$，并且有界，即满足狄利希雷条件，故可将它表为复数形式的 Fourier 级数：

$$R_u(\tau)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}C_re^{jr\omega_0\tau},\quad(\omega_0=2\pi/T_p\text{为基波频率}).$$

其中

$$C_r=\frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2}R_u(\tau)\,e^{-jr\omega_0\tau}d\tau$$

按照维纳—辛钦公式，有

$$\phi_u(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_u(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}C_re^{jr\omega_0\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau$$

因 $R_u(\tau)$ 的 Fourier 级数是均匀收敛的，其积分与求和的顺序可以变换，依此可推得：

$$\phi_u(\omega)=\frac{2\pi R_u(0)}{N}\cdot\left[\frac{\sin(\omega\Delta/2)}{\omega\Delta/2}\right]^2\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-r\omega_0)$$

此功率谱是关于ω对称的离散谱，且有一个$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$形的包络线，第一次取零的频

率就是时钟频率。当 $\omega=r\omega_0=\frac{N}{3}\omega_0$ 时，$\phi_u(\omega)\doteq\frac{2\pi R_u(0)}{N}\cdot(0.7071)$，即功率谱下降3dB，因此最优输入信号的频带为0～$f_c/3$ 周/次，其中 $f_c=1/\Delta$ 是时间脉冲频率。

注：伪随机序列的功率谱函数

$$\phi_u(\omega)=\frac{2\pi R_u(0)}{N^2}\delta(\omega)+\frac{2\pi R_u(0)(N+1)}{N^2}\left[\frac{\sin(\omega\Delta/2)}{\omega\Delta/2}\right]^2\cdot\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq 0}}^{\infty}\delta(\omega-r\omega_0)$$

它的直流分量的功率谱密度的值 $\phi_u(0)=\frac{2\pi}{N^2}R_u(0)$，因此，$m$ 序列的有效频带为：f_c/N～$f_c/3$ 周/次。在 $\omega=0$ 时，$\phi_u(\omega)$ 值跌落得很低，用于辨识时，系统的稳态误差很大。若采用静态测试求静态增益，其精度与最优输入信号是相等的，但都需要增加 $(n+1)\Delta$ 的额外实验时间。

5. 最优输入信号与其它序列的比较

这里所得到的最优输入信号与高斯白噪声、m 序列以及 Plackett-Burman 序列相比，具有非常明显的优点，分析如下。

与高斯白噪声相比：高斯白噪声是一随机序列，只有当样本无限大时，才呈现最优输入信号所具有的性质。就实际应用来讲，高斯白噪声具有如下缺点：①理想的高斯白噪声发生器在技术上难以实现；②即使由某种方法（如电子管热噪声，计算机算法）近似产生，由于它的值在（$-\infty,\infty$）之间分布，对系统的扰动可能非常之大，甚至超过系统输入所能允许的限度，这在生物医学探测中尤显得重要。这正是白噪声难于进入实用阶段的原因。

与 m 序列相比：本最优输入信号具有：①信息效果最高；②在白噪声干扰下各辨识参数互不影响即互相关函数等于零；③有效频带是 0～$f_c/3$，即包含直流分量；④相关分析的算法中无冗余项；⑤特别便于推广到多变量系统中去等独特之处。

与 P—B 序列相比：二者都是 D－最优输入信号（白噪声干扰下），但是①这里所得的信号还是周期饱和最优的，即对于一个 n 阶 MA 模型，信号除了一预置周期外只需要长度为 n 即可。而 P—B 序列则需要近 2 倍的时间[4]。显然，这在测试时间（数据点数）上占有很大的优势。在一些人体疾病检查以及工业过程测试中总是希望测试时间越短，有效数据越多越好。又因信号是周期的，极便于增加测试长度；②在一定范围内，可供选择的（饱和）最优输入信号要比 P—B 序列多得多。对每一个由 2^n 阶 Hadamard 矩阵设计的 P—B 序列，都可有对应的长度为 2^n-1 的 IMS 信号。除此还有所有 $4x+3$ 形的素数，孪生素数等供选择；③当序列所要求的长度增加时，（饱和）最优输入信号比 P—B 序列设计起来方便得多。在纸上设计一个 1024×1024 的 Hadamard 矩阵几乎是一件难以想象的事情，而设计一个长度为1023的 IMS 信号则为工程人员力所能及；④m 序列在各领域已广泛应用，人们对它已相当熟悉，易于对 IMS 推广。对于现在已研制出的专用仪器，只需稍作改进就行了；⑤对于多变量脉冲响应阵的辨识，在硬件、软件设计和相关运算等方面，优点都非常突出。

三、部分仿真结果

考虑单变量系统：

$$X(k)=1.5X(k-1)-0.7X(k-2)+u(k-1)+0.5u(k-2)$$
$$Y(k)=X(k)+\varepsilon(k),\ \varepsilon(k)\sim N(0,1)$$

求其系统的脉冲响应函数 $g(m)$。

1) 采用最优输入信号 IMS，$N=N_p=63$（周期），正负幅值比 $-1:0.75$，功率为 1。设 $g(m)$ 和 $\hat{g}_1(m)$ 分别为真实的和辨识出的系统脉冲响应函数

$$J_1=\sum_{m=1}^{63}[g(m)-\hat{g}_1(m)]^2$$

2) 采用 m 序列，$N=N_p=63$，即一个周期，功率为 1，$\hat{g}_2(m)$ 为辨识出的系统脉冲响应函数

$$J_2=\sum_{m=1}^{63}[g(m)-\hat{g}_2(m)]^2$$

在 MIC-80 微机上仿真，其十次结果分别是：

序　号	J_1	J_2
1	1.26378	1.93737
2	0.92869	1.23622
3	0.979485	1.0285
4	1.02093	4.3088
5	1.16267	1.35298
6	1.12769	1.90996
7	0.845624	3.42398
8	1.0241	1.36165
9	1.29416	0.684442
10	0.918604	1.31643
平均值：	1.05657	1.85603

这与理论值 $J_1=1$ 和 $J_2=2\times\frac{63}{64}$ 是相符合的，精度提高了近50%。

最后，感谢西安交通大学系统工程研究所万百五教授、数学系汪荣鑫副教授等的热情帮助。

参 考 文 献

[1] 韩光文，辨识与参数估计，国防工业出版社，1980年。

[2] P. D. Roberts, Use of Pseudorandom Binary Sequency in the Digital Simulation of Control System Subjected to Random Input Signals, Electronics Letters Vol 2 (1966), No.3.

[3] M. J. Levin, Optimal Estimation of Impulse Response in the Presence of Noise,

IRE. Trans. Circuit Theory, Vol. CT-7, PP. 50-56, Mar. 1960.

[4] J. Wernstedt, H. J. Hoffmeyer-Zlotnik, A New Variant for the Use of D-optimal Foctorial Designs in Estimating Dynamic Multivariable Systems Proc. of the IFAC 6th World Congress, Pt. 2, 1975.

[5] R.L. Plackett, I. P. Burman, The Design of Optimum Multifactorial Experiments Biometrica 33 (1946), 305.

[6] 胡德文，改良型m序列（IMS）及其应用，控制理论与应用，Vol. 3 (1986), No.1.

[7] 胡德文，最优输入信号设计，西安交大科技 No. 85-406, 1985, 9。

[8] M. Б.斯维尔德利克著，郭桂蓉译，陆仲良校，最佳离散信号，电子工业出版社，1975.

[9] W. D.T.戴维斯著，潘裕焕译，自适应控制的系统辨识，科学出版社，1977。

MA-Model Optimal Input Signal Design

Hu Dewen Shi Ren

Abstract

In this paper the design problem of optimal input signals for identification of MA-model is solved successfully by means of the difference-set theory of combinatorics. It is necessary to point out that this kind of optimal input signals will be better than M-sequences and Plackett-Burman sequences.